Análisis Funcional I – 2020
Práctico 5

(1) (a) Probar que si $1 < p < \infty$ y $1 - 1/p = 1/p'$ entonces $(\ell^p)'$ es isométricamente isomorfo a $\ell^{p'}$.
(b) Probar que $(\ell^1)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^∞. ¿Vale el mismo resultado intercambiando los roles de ℓ^1 y ℓ^∞?
(c) Probar que $(c_0)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^1. ¿Qué ocurre con c'?
(d) Probar que si $0 < p < 1$ entonces existe un isomorfismo lineal entre $(\ell^p)'$ y ℓ^∞.

(2) (a) Un espacio normado N es completo si y sólo si para todo $(x_n) \in N$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n =: \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$
(b) Sea N un espacio de de Banach. Si $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge incondicionalmente (es decir no depende del orden).

(3) Sea N un espacio normado, $S \subseteq N$ un subespacio vectorial cerrado.
(a) Probar que N/S es normado con
$$||x + S|| = \inf_{y\in S} ||x + y||.$$
(b) Probar que si N es un espacio de Banach entonces N/S es un espacio de Banach.
(c) Probar que para todo $x \notin S$ existe $F \in N'$ tal que $F(x) \neq 0 = F(y)$ para todo $y \in S$.

(4) (a) Sean N y M espacios de Banach. Probar que $A \in B(N, M)$ es inyectiva y $A(N)$ es cerrado si y sólo si existe k tal que $||x|| \leq k||Ax||$.
(b) Sean N y M, espacios de Banach. Probar que $A \in B(N, M)$ tiene imagen $A(N)$ cerrada si y sólo si existe k tal que para todo $y \in A(N)$ existe $x \in N$ con $Ax = y$ y $||x|| \leq k||y||$.

(5) Probar el ejercicio 10 del Práctico 4 asumiendo que la transformación lineal A_0 es continua, sobreyectiva pero no inyectiva.

(6) Probar que si N y M son espacios de Banach, el conjunto
$$\{A \in B(N, M) : A \text{ es inyectivo y } A(N) \text{ es cerrado}\}$$
es abierto en $B(N, M)$.

(7) Sea N un espacio normado.

(a) Probar que para todo $x \neq 0$ en N existe $F \in N'$ tal que $||F|| = 1$ y $F(x) = ||x||$.

(b) N' separa puntos en N, es decir, dados $x_1 \neq x_2 \in N$ existe $F \in N'$ tal que $F(x_1) \neq F(x_2)$.

(c) Probar que para todo $x \in N$ existe $\tilde{x} : N' \to \mathbb{K}$, definida por $\tilde{x}(F) = F(x)$ lineal y continua, es decir $\tilde{x}$ pertenece al bidual o doble-dual $N'' := (N')'$ de N.

(d) Probar que la aplicación $x \to \tilde{x}$ es lineal e isométrica.

(8) Hacer el ejercicio 5.23 de la página 159 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.

(9) Hacer los ejercicios 5.23, 5.26, 5.28 y 5.30 de la página 165 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.