Geometría Diferencial

Período | 2020-II

Práctico 6

Ej. 1 Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $h : U \to \mathbb{R}$ una función acotada suave. Sea M la superficie dada por el gráfico de h. Escribir una expresión para el área de regiones en M que involucre las derivadas parciales de h.

Ej. 2 Se consideran el paraboloide de revolución $M = \left\{\left(x, y, x^2 + y^2\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ y la silla de montar $N = \left\{\left(x, y, x^2 - y^2\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$. Mostrar que las intersecciones de M y N con el cilindro sólido $\left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ tienen igual área.

Ej. 3 En cada caso, mostrar que f es un difeomorfismo y decidir si preserva área de regiones, donde P es el plano $z = 0$ y C es el cono $\left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\right\}$.

- $f : P \to P$, $f(x, y, 0) = (x, 2y + \operatorname{sen} y, 0)$
- $f : P \to P$, $f(x, y, 0) = (3x + 5y + 2, 4x + 7y, 0)$
- $f : C \to P - \{(0,0,0)\}$, $f(x, y, z) = (x, y, 0)$
- $f : C \to C$, $f(x, y, z) = \sqrt{2}\,(x, y, z)$.

Ej. 4 Mostrar que el difeomorfismo $F : C \to S^2 - \{N, S\}$ del ejercicio 11 del Práctico 5 (la proyección de Arquímedes) preserva áreas, y usar este resultado para dar el área de la intersección del hemisferio $y > 0$ de S con el semiespacio $z > 1/2$, recurriendo al área de regiones del cilindro.

Ej. 5 Sea S la superficie de revolución con curva generatriz $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ periódica con período a. Mostrar que si γ tiene rapidez unitaria, entonces el área de S es $2\pi \int_0^a r(s)\, ds$. Usar este resultado par dar el área del toro $T(R, r)$. ¿Qué consume más pintura, pintar un dona con parámetros $R = 10$, $r = 3$ o una dona con parámetros $R = 7$, $r = 4$?

Ej. 6 Sean P un plano, S una superficie y $f : P \to S$ una isometría local. Probar que $||f(p) - f(q)|| \leq ||q - p||$ para cada p y q en P.

Ej. 7 Mostrar que los difeomorfismos del ejercicio 3 no son isometrías.

Ej. 8 Probar que si $f : M \to N$ satisface que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una isometría lineal para todo $p \in M$, entonces f es una isometría local. (La recíproca se prueba en la teoría.)

Ej. 9 Sean $U = \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y S la superficie parametrizada por $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), \ln(\cos(v)) + u)$. Dado θ fijo en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, considerar la curva en S, $\alpha : \mathbb{R} \to S$ con $\alpha(t) = \varphi(t, \theta)$. Mostrar que la longitud de α no depende de θ.

Ej. 10 Sea $U = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ y suponer que hay una superficie $H \subseteq \mathbb{R}^3$ y una carta de H, $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to H$, con coeficientes de la primera forma fundamental de φ dados por $E(u, v) = G(u, v) = 1/v^2$ y $F(u, v) = 0$. Sea $r > 0$ y considerar la curva $\alpha : (0, \pi) \subset \mathbb{R} \to H$ dada por

$$\alpha(t) = \varphi(r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$$

Mostrar que la longitud de la curva α no depende de r, mejor aún, si $0 < t_0 \leq t_1 < \pi$, entonces

$$\operatorname{long}(\alpha)|_{[t_0, t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\operatorname{sen}(s)} ds$$

Si $r > 1$, encontrar el ángulo de la intersección de α con la curva $\beta(s) = \varphi(1, s)$ en el punto de intersección. [Hint: Si $\alpha(t_0) = \beta(s_0)$, usar que φ es carta para expresar t_0 y s_0 en términos de r. Posteriormente, calcular el producto interno entre $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(s_0)$].

Área e Isometrías Locales

Ej. 11 Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una carta de una superficie regular S, y denotar por E, F, G los coeficientes de la primera forma fundamental de φ. Mostrar que el vector tangente $a\varphi_u + b\varphi_v$ biseca el ángulo entre curvas coordenadas si y solo si

$$\sqrt{G}(aE + bF) \quad = \quad \sqrt{E}(aF + bG).$$

Si $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ es dada por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, encontrar un vector tangente a S, el cual biseca el ángulo entre las curvas coordenadas en el punto $p = (1, 1, 0)$ de S.

Ej. 12 Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to H \subseteq \mathbb{R}^3$ la carta del helicoide dada por $\varphi(u, v) = (u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), v)$. Mostrar que la familia de curvas $\gamma(t) = \varphi(\mathrm{senh}(c \pm t), t)$, con $c \in \mathbb{R}$, biseca los ángulos de las líneas coordenadas en cada punto.

Ej. 13 Sean M y N dos superficies regulares. Sea F una transformación euclidiana de $\mathbb{R}^3$ y suponer que $F(M) \subset N$. Probar que $F|_M : M \to N$ es una isometría local. Deducir que las rotaciones alrededor del eje de una superficie de revolución S son isometrías de S.

Ej. 14 Considerar el semiplano $M = \{(x, y, 0) \mid y > 0\}$ y el cono

$$C = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\right\}.$$

Encontrar una isometría local $f : M \to C$.
[Hint: Tomar f que lleve rayos de M a rayos de C de la forma $f(t(\cos s, \sin s), 0) = \rho t(\cos(\lambda s), \sin(\lambda s), 1)$ con $(0 < s < \pi, t > 0)$ para ciertas constantes ρ y λ.]

Ej. 15 Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria y curvatura nunca nula, y sea $\phi : (a, b) \times (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(s, t) = \alpha(s) + t\alpha'(s).$$

Suponer que la imagen de ϕ es una superficie regular, que se denomina *superficie tangente a la curva* α.

- Verificar que $\phi_s \times \phi_t$ es nunca nula.
- Mostrar que si dos curvas definidas en el mismo intervalo (a, b) tienen la misma función curvatura (nunca nula), entonces las superficies tangentes son localmente isométricas.
- Considerar la hélice de rapidez unitaria $\alpha(s) = (a\cos(s/A), a\,\mathrm{sen}(s/A), s/A)$, con $a > 0$ y $A = \sqrt{a^2 + 1}$. Encontrar una isometría local de la superficie tangente a α a un anillo en el plano $z = 0$ (describirlo como la superficie tangente a una circunferencia).

Ej. 16 Sea C el cilindro $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Encontrar una isometría $f : C \to C$ tal que el conjunto de puntos fijos de f tenga exactamente dos elementos.

Ej. 17 Sea C un constante real, $0 < C \leq 1$ y considerar la superficie de revolución $\mathcal{R}_C$ con curva generatriz $\gamma_C(t) = (r_C(t), h_C(t))$ definida por

$$\begin{cases} r_C(t) & = \quad C\sqrt{1 + t^2} \\ h_C(t) & = \quad \displaystyle\int_0^t \sqrt{1 - C^2 \frac{x^2}{1 + x^2}}\, \mathrm{d}\, x \end{cases}$$

y sea $\psi_C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{R}_C$ la parametrización de $\mathcal{R}_C$ dada por

$$\psi_C(t, s) \quad = \quad (r_C(t)\cos(s/C), r_C(t)\sin(s/C), h_C(t)).$$

Denotemos por H el helicoide con carta global $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to H$, $\varphi(u, v) = (0, 0, v) + u \cdot (\cos(v), \sin(v), 0)$. Mostrar que la función $F : H \to \mathcal{R}_C$ definida por $F(p) = \psi_C(u, v)$, si $p = \varphi(u, v)$ es una isometría local. Mostrar que para $C = 1$, $\mathcal{R}_C$ es el catenoide.

Ej. 18 (Opcional) Sea F una isometría local que lleva los rayos del helicoide en los meridianos de una superficie de revolución $\mathcal{R}$. Suponer que la curva generatriz de $\mathcal{R}$, $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, es de rapidez unitaria y satisface $\mathrm{k}(t) + h'(t)/r(t) = 0$, donde k es la curvatura signada de γ. Probar que $\mathcal{R}$ es el catenoide.

Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $h : U \to \mathbb{R}$ una función acotada suave. Sea M la superficie dada por el gráfico de h. Escribir una expresión para el área de regiones en M que involucre las derivadas parciales de h.

2. Se consideran el paraboloide de revolución $M = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y la silla de montar $N = \{(x, y, x^2 - y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Mostrar que las intersecciones de M y N con el cilindro sólido $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tienen igual área.

3. En cada caso, mostrar que f es un difeomorfismo y decidir si preserva área de regiones, donde P es el plano $z = 0$ y C es el cono $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

   - $f : P \to P,\ f(x, y, 0) = (x, 2y + \operatorname{sen} y, 0)$
   - $f : P \to P,\ f(x, y, 0) = (3x + 5y + 2, 4x + 7y, 0)$
   - $f : C \to P - \{(0, 0, 0)\},\ f(x, y, z) = (x, y, 0)$
   - $f : C \to C,\ f(x, y, z) = \sqrt{2}\,(x, y, z)$.

4. Mostrar que el difeomorfismo $F : C \to S^2 - \{N, S\}$ del ejercicio 11 del Práctico 5 (la proyección de Arquímedes) preserva áreas, y usar este resultado para dar el área de la intersección del hemisferio $y > 0$ de S con el semiespacio $z > 1/2$, recurriendo al área de regiones del cilindro.

5. Sea S la superficie de revolución con curva generatriz $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ periódica con período a. Mostrar que si γ tiene rapidez unitaria, entonces el área de S es $2\pi \int_0^a r(s)\, ds$. Usar este resultado par dar el área del toro $T(R, r)$. ¿Qué consume más pintura, pintar un dona con parámetros $R = 10$, $r = 3$ o una dona con parámetros $R = 7$, $r = 4$?

6. Sean P un plano, S una superficie y $f : P \to S$ una isometría local. Probar que $||f(p) - f(q)|| \leq ||q - p||$ para cada p y q en P.

7. Mostrar que los difeomorfismos del ejercicio 3 no son isometrías.

8. Probar que si $f : M \to N$ satisface que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una isometría lineal para todo $p \in M$, entonces f es una isometría local. (La recíproca se prueba en la teoría.)

9. Sean $U = \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y S la superficie parametrizada por $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), \ln(\cos(v)) + u)$. Dado θ fijo en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, considerar la curva en S, $\alpha : \mathbb{R} \to S$ con $\alpha(t) = \varphi(t, \theta)$. Mostrar que la longitud de α no depende de θ.

10. Sea $U = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ y suponer que hay una superficie $H \subseteq \mathbb{R}^3$ y una carta de H, $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to H$, con coeficientes de la primera forma fundamental de φ dados por $E(u, v) = G(u, v) = 1/v^2$ y $F(u, v) = 0$. Sea $r > 0$ y considerar la curva $\alpha : (0, \pi) \subset \mathbb{R} \to H$ dada por

    $$\alpha(t) \quad = \quad \varphi(r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$$

    Mostrar que la longitud de la curva α no depende de r, mejor aún, si $0 < t_0 \leq t_1 < \pi$, entonces

    $$\operatorname{long}(\alpha)|_{[t_0, t_1]} \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\operatorname{sen}(s)} ds = \left(\ln(\tan(s/2))\right|_{t_0}^{t_1}.$$

    Encontrar el ángulo de la intersección de α con la curva $\beta(s) = \varphi(1, s)$ en el punto de intersección.
    [Hint: Si $\alpha(t_0) = \beta(s_0)$, usar que φ es carta para expresar t_0 y s_0 en términos de r. Posteriormente, calcular el producto interno entre $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(s_0)$].

11. Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una carta de una superficie regular S, y denotar por E, F, G los coeficientes de la primera forma fundamental de φ. Mostrar que el vector tangente $a\varphi_u + b\varphi_v$ biseca el ángulo entre curvas coordenadas si y solo si

    $$\sqrt{G}(aE + bF) \quad = \quad \sqrt{E}(aF + bG).$$

    Si $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ es dada por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, encontrar un vector tangente a S, el cual biseca el ángulo entre las curvas coordenadas en el punto $p = (1, 1, 0)$ de S.

12. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to H \subseteq \mathbb{R}^3$ la carta del helicoide dada por $\varphi(u, v) = (u\cos(v), u\operatorname{sen}(v), v)$. Mostrar que la familia de curvas $\gamma(t) = \varphi(\operatorname{senh}(c \pm t), t)$, con $c \in \mathbb{R}$, biseca los ángulos de las líneas coordenadas en cada punto.

13. Sean M y N dos superficies regulares. Sea F una transformación euclidiana de $\mathbb{R}^3$ y suponer que $F(M) \subset N$. Probar que $F|_M : M \to N$ es una isometría local. Deducir que las rotaciones alrededor del eje de una superficie de revolución S son isometrías de S.

14. Considerar el semiplano $M = \{(x, y, 0) \mid y > 0\}$ y el cono

    $$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}.$$

    Encontrar una isometría local $f : M \to C$.
    [Hint: Tomar f que lleve rayos de M a rayos de C de la forma

    $$f(t(\cos s, \sin s), 0) = \rho t(\cos(\lambda s), \sin(\lambda s), 1)$$

    $(0 < s < \pi, t > 0)$ para ciertas constantes ρ y λ.]

15. Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria y curvatura nunca nula, y sea $\phi : (a,b) \times (0,\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(s,t) = \alpha(s) + t\alpha'(s).$$

Suponer que la imagen de ϕ es una superficie regular, que se denomina *superficie tangente a la curva* α.

- Verificar que $\phi_s \times \phi_t$ es nunca nula.
- Mostrar que si dos curvas definidas en el mismo intervalo (a,b) tienen la misma función curvatura (nunca nula), entonces las superficies tangentes son localmente isométricas.
- Considerar la hélice de rapidez unitaria $\alpha(s) = (a\cos(s/A), a\,\mathrm{sen}(s/A), s/A)$, con $a > 0$ y $A = \sqrt{a^2+1}$. Encontrar una isometría local de la superficie tangente a α a un anillo en el plano $z = 0$ (describirlo como la superficie tangente a una circunferencia).

16. Sea C el cilindro $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Encontrar una isometría $f : C \to C$ tal que el conjunto de puntos fijos de f tenga exactamente dos elementos.

17. Sea C un constante real, $0 < C \leq 1$ y considerar la superficie de revolución $\mathcal{R}_C$ con curva generatriz $\gamma_C(t) = (r_C(t), h_C(t))$ definida por

$$\begin{cases} r_C(t) &= C\sqrt{1+t^2} \\ h_C(t) &= \displaystyle\int_0^t \sqrt{1 - C^2 \frac{x^2}{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x \end{cases}$$

y sea $\psi_C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{R}_C$ la parametrización de $\mathcal{R}_C$ dada por

$$\psi_C(t,s) \quad = \quad (r_C(t)\cos(s/C), r_C(t)\sin(s/C), h_C(t)).$$

Denotemos por H el helicoide con carta global $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to H$, $\varphi(u,v) = (0,0,v) + u \cdot (\cos(v), \sin(v), 0)$. Mostrar que la función $F : H \to \mathcal{R}_C$ definida por $F(p) = \psi_C(u,v)$, si $p = \varphi(u,v)$ es una isometría local. Mostrar que para $C = 1$, $\mathcal{R}_C$ es el catenoide.

18. (Opcional) Sea F una isometría local que lleva los rayos del helicoide en los meridianos de una superficie de revolución $\mathcal{R}$. Suponer que la curva generatriz de $\mathcal{R}$, $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, es de rapidez unitaria y satisface $\mathrm{k}(t) + h'(t)/r(t) = 0$, donde k es la curvatura signada de γ. Probar que $\mathcal{R}$ es el catenoide.