

Práctico 4
Matemática Discreta I – Año 2020/2
FAMAF

1. Congruencias

Recordamos que:

- $x \equiv y (m)$ si y sólo si $m \mid (x - y)$.
- Si $x_1 \equiv x_2 (m)$ y $y_1 \equiv y_2 (m)$, entonces $x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 (m)$ y $x_1 y_1 \equiv x_2 y_2 (m)$. Además para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $x_1^n \equiv x_2^n (m)$.

1. a) Calcular el resto de la división de 1599 por 39 sin tener que hacer la división. (Ayuda: $1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1$).
b) Lo mismo con el resto de 914 al dividirlo por 31.
2. Probar que el resto de dividir n^2 por 4 es igual a 0 si n es par y 1 si n es impar.
3. Sean a, b, c números enteros, ninguno divisible por 3. Probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

4. Hallar el resto en la división de x por 5 y por 7 para:
a) $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$;
b) $x = 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 71 \cdot 101$.
5. Calcular las tablas de suma y multiplicación de \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_5 y de \mathbb{Z}_6 .
6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que todo número de la forma $4^n - 1$ es divisible por 3.
7. Hallar la cifra de las unidades y la de las decenas del número 7^{15} .
8. a) Probar las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11.
b) Decir por cuáles de los números del 2 al 11 son divisibles los siguientes números:

$$12342 \qquad 5176 \qquad 314573 \qquad 899.$$

9. Probar que si m y n son coprimos, entonces

$$x \equiv y (m) \wedge x \equiv y (n) \iff x \equiv y (m.n)$$

2. Ecuaciones en congruencias

10. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) 2x \equiv -21 \pmod{8} \qquad b) 2x \equiv -12 \pmod{7} \qquad c) 3x \equiv 5 \pmod{4}.$$

11. Sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ tales que $d \mid a$, $d \mid b$ y $d \mid m$. Probar que la ecuación $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ tiene solución si y sólo si la ecuación

$$\frac{a}{d} \cdot x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\left(\frac{m}{d}\right)}$$

tiene solución.

12. Resolver la ecuación $221x \equiv 85 \pmod{340}$. Hallar todas las soluciones x tales que $0 \leq x < 340$.
13. (i) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$36x \equiv 8 \pmod{20}$$

usando el método visto en clase.

- (ii) Dar todas las soluciones x de la ecuación anterior tales que $-8 < x < 30$.

14. (i) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$21x \equiv 6 \pmod{30}$$

usando el método visto en clase.

- (ii) Dar todas las soluciones x de la ecuación anterior tales que $0 < x < 35$.

15. Hallar todos los x que satisfacen:

$$\begin{array}{lll} a) x^2 \equiv 1 \pmod{4} & c) x^2 \equiv 2 \pmod{3} & e) x^4 \equiv 1 \pmod{16} \\ b) x^2 \equiv x \pmod{12} & d) x^2 \equiv 0 \pmod{12} & f) 3x \equiv 1 \pmod{5} \end{array}$$

16. Encontrar los enteros cuyos cuadrados divididos por 19 dan resto 9.
17. Dado $t \in \mathbb{Z}$, decimos que t es *invertible módulo* m si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $th \equiv 1 \pmod{m}$.
- a) ¿Es 5 invertible módulo 17?
- b) Probar que t es invertible módulo m , si y sólo si $(t, m) = 1$.
- c) Determinar los invertibles módulo m , para $m = 4, 5, 6, 11, 12, 16$. ¿Qué relación observas con el Ejercicio 5?

3. Teorema de Fermat

18. Obtener el resto en la división de 2^{21} por 13; de 3^8 por 5 y de 8^{25} por 127.
19. Encontrar el resto en la división de a por b en los siguientes casos:
- a) $a = 4^{1000}$; $b = 7$; c) $a = 7^{83}$; $b = 10$;
 b) $a = 123^{456}$; $b = 31$; d) $a = 11^{12} \cdot 13^{11}$; $b = 12$.
20. Probar que si $(a, 1001) = 1$ entonces 1001 divide a $a^{720} - 1$.
21. Probar que todo número impar a satisface: $a^4 \equiv 1(16)$, $a^8 \equiv 1(32)$, $a^{16} \equiv 1(64)$.
 ¿Se puede asegurar que $a^{2^n} \equiv 1(2^{n+2})$?
22. a) Probar que no existen enteros no nulos tales que $x^2 + y^2 = 3z^2$.
 b) Probar que no existen racionales no nulos a, b, r tales que $3(a^2 + b^2) = 7r^2$.
23. Encontrar el resto de $2016! - 2015!$ en la división por 2017.
24. Probar que si p es primo, entonces $(p - 2)! \equiv 1(p)$.

4. Sistemas de ecuaciones

25. Hallar todos los $x \in \mathbb{Z}$ que satisfacen los siguientes sistemas de congruencias:

$$\begin{array}{cccc}
 a) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv -1 \pmod{15} \end{cases} &
 b) \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{2} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} &
 c) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases} &
 d) \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{2} \\ 3x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}
 \end{array}$$

26. Hallar el menor entero positivo n que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:
- a) el resto de n en la división por 10 es 3,
 b) el resto de $3n$ en la división por 7 es 2, y
 c) el resto de $4n$ en la división por 9 es 5.
27. En un grupo de 20 amigos se reparten alfajores entre todos y sobran 7 alfajores. Tres amigos se van, devuelven su parte y se vuelve a repartir el total de alfajores entre los amigos que quedan. Sobran 5 alfajores. ¿Cuántos alfajores, como mínimo, había para repartir?

5. Ejercicios adicionales

28. (*) ¿Para qué valores de n es $10^n - 1$ divisible por 11?
29. (*) Probar que para ningún $n \in \mathbb{N}$ se puede partir el conjunto $\{n, n+1, \dots, n+5\}$ en dos partes disjuntas no vacías tales que los productos de los elementos que las integran sean iguales.
30. (*) El número 2^{29} tiene nueve cifras y todas distintas. ¿Cuál dígito falta? (No está permitido el uso de calculadora).
31. Sea p un primo impar y $q = \frac{p-1}{2}$. Probar que $p \mid (q!)^2 + (-1)^q$.
32. Cinco hombres recogieron en una isla un cierto número de cocos y resolvieron repartirlos al día siguiente. Durante la noche uno de ellos decidió separar su parte y para ello dividió el total en cinco partes y dió un coco que sobraba a un mono y se fue a dormir. Enseguida otro de los hombres hizo lo mismo, dividiendo lo que había quedado por cinco, dando un coco que sobraba a un mono y retirando su parte, se fue a dormir. Uno tras otro los tres restantes hicieron lo mismo, dándole a un mono el coco que sobraba. A la mañana siguiente repartieron los cocos restantes, dándole a un mono el coco sobrante. ¿Cuál es el número mínimo de cocos que se recogieron?