Geometría Diferencial
Período | 2020-II
Práctico 7

FAMAF

Operador de Forma

Ej. 1 Una superficie S se dice *reglada* si para todo $p \in S$ existe una carta coordenada $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ de S con $p \in \phi(U)$ de la forma

$$\phi : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(s,t) = \alpha(s) + tV(s), \tag{1}$$

donde $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ y $V : (c,d) \to \mathbb{R}^3$ son curvas suaves, llamadas la curva base y la curva directriz de ϕ, respectivamente.

- Mostrar que el helicoide es una superficie reglada.
- Mostrar que la silla de montar M dada por la ecuación $z = xy$, está doblemente reglada, es decir hay dos sistemas coordenados como en (1) distintos, con distintos rayos (las imágenes de las rectas $t \mapsto \alpha(s) + tV(s)$).

Ej. 2 Encontrar curvas guías del helicoide y de la silla de montar.

Ej. 3 Mostrar que una superficie cubierta por una sola carta es orientable. En particular el helicoide y los gráficos de funciones (definidas en abiertos del plano, con valores reales) son orientables.

Ej. 4 Sea M la superficie definida como el conjunto de nivel de un valor regular de una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Probar que M es orientable. En particular, la cinta de Moebius no es el conjunto de nivel de un valor regular de ninguna función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$.

Ej. 5 Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función, y sea S la superficie definida por su gráfico. Mostrar que $n : S \to \mathbb{R}^3$,

$$n(\varphi(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}}\left(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\right),$$

define un campo normal unitario en S, donde $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.
Para cada una de las siguientes funciones, definidas en su dominio, sea S la superficie definida por su gráfico. Hallar en cada caso las direcciones principales, las curvaturas principales y las direcciones asintóticas (si existen) en el punto $p = (0,0,0)$. Decir qué tipo de punto es p.

- $f(x,y) = axy$
- $f(x,y) = (x+y)^2$
- $f(x,y) = x^4 + y^4$
- $f(x,y) = x^4 - y^4$

Calcular en cada caso la curvatura gaussiana y la curvatura media en el punto $(0,0,0)$.

Ej. 6 Mostrar que las curvaturas principales de la superficie de revolución M con curva generatriz $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ están dadas por

$$k_1 = -k_\gamma \qquad k_2 = -\frac{h'(t)}{r(t)||\gamma'(t)||},$$

donde k_γ es la *curvatura signada* de γ (como se define a partir del Ejercicio 18 del Práctico 2). Mostrar que los meridianos y paralelos son líneas de curvatura.
[Hint: Probarlo cuando γ es de rapidez unitaria y deducir el caso general]

Ej. 7 Sea M la superficie de revolución con curva generatriz $\gamma(t) = \left(e^{-t^2}, t\right)$. Determinar los puntos de M con curvatura gaussiana positiva.

Ej. 8 Mostrar que el catenoide es una superficie mínima, es decir tiene curvatura media constante nula.

Ej. 9 Considerar la superficie S de $\mathbb{R}^3$ con una carta global $\varphi : (-1,1)\times(-1,1) \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi(u,v) \quad = \quad \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right).$$

Mostrar que:

- Los coeficientes de la primera forma fundamental de φ son $E(u,v) = G(u,v) = (1+u^2+v^2)^2$ y $F(u,v) = 0$.
- Una orientación de S obtenida por φ es $n : S \to S^2$, definida por

$$n(p) \quad = \quad \frac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2), \text{ si } p = \varphi(u,v).$$

- Las curvas coordenadas, definidas por $\gamma_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)$ y $\beta_{v_0}(u) = \varphi(u, v_0)$, son líneas de curvatura y las curvaturas principales en $p = \varphi(u,v)$ son dadas por $k_1(p) = -k_2(p) = 2/(1+u^2+v^2)^2$.
- La curva $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es una línea asintótica de S si y solo si $u(t) \pm v(t)$ es constante.
- La superficie S es una superficie mínima (llamada *superficie de Enneper*)

Superficie de Enneper vizualizada como una *soap film*. Imagen por Henry Segerman

Ej. 10 Sea S la superficie de revolución generada por la curva de rapidez unitaria $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, donde

$$r(t) = C\cos t, \qquad h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 u}\, du,$$

con $0 < C \leq 1$. Probar que S tiene curvatura gaussiana constante 1. Dibujarla para distintos valores de C.

Ej. 11 Se llama *tractoide* (o la *anti-esfera*) a la superficie de revolución cuya curva perfil es la tractriz (Ejercicio 12 del práctico 1). Mostrar que tiene curvatura gaussiana constante igual a -1.

Ej. 12 Mostrar que el valor promedio de la curvatura normal en dos direcciones ortogonales cualesquiera en p es $H(p)$.

Ej. 13 Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales son bisectrices de las direcciones asintóticas.

Ej. 14 Sea p un punto de una superficie S con curvatura gaussiana positiva y sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva suave de rapidez unitaria con $\alpha(0) = p$ y curvatura κ. Mostrar que

$$\kappa(0) \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de S en p.

Ej. 15 Sean X e Y direcciones principales de T_pS con autovalores k_1 y k_2 respectivamente, y sea $v(\theta) = \cos(\theta)X + \operatorname{sen}(\theta)Y$. Mostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa_{n,p}(v(\theta))\mathrm{d}\theta \quad = \quad H(p),$$

donde $H(p)$ es la curvatura media de S en p.

Ej. 16 Sea A el operador de forma de una superficie M en el punto p y sea $\{u, v\}$ una base ortonormal de T_pM. ¿Qué información geométrica da $\langle Au, v\rangle = 0$?

Ej. 17 Sean M una superficie con una orientación $n : M \to S^2$ y $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ una curva de rapidez unitaria y curvatura nunca nula. Mostrar que α es una *línea asintótica de* M; esto es $\langle A_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \alpha'(t)\rangle = 0$, si y solo si el vector binormal $B_\alpha(t)$ es paralelo a $n(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.

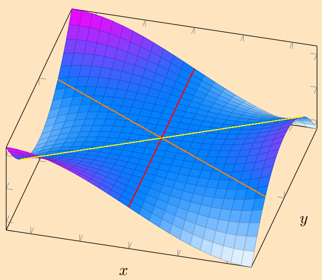
Ej. 18 Sea M una superficie orientada tal que M contiene una línea recta $\alpha : \mathbb{R} \to M$, $\alpha(t) = p + tu$ con $||u|| = 1$. Entonces α es una línea asintótica.

Ej. 19 Mostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de la curva son parabólicos o planares.

Ej. 20 Sea α una curva espacial de rapidez unitaria y curvatura positiva. Mostrar que la superficie tangente a α tiene curvatura gaussiana cero.

Ej. 21 Sea S la *silla de mono*, es decir, el gráfico de la función definida por $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

- Mostrar que por el origen pasan tres líneas asintóticas diferentes.
  [Hint: Buscar líneas rectas en S que pasen por el origen. Notar que x^3-3xy^2 factoriza como $x\left(x+\sqrt{3}y\right)\left(x-\sqrt{3}y\right)$].
- Probar que las rotaciones en 120^o y 240^o alrededor del eje z son isometrías de S.
- Mostrar que $\alpha(t) = \left(t, 0, t^3\right)$ es una línea de curvatura de S por el origen y encontrar dos más usando (b)
- Probar que el origen es un punto planar de S.



Ej. 22 Mostrar que toda superficie compacta (cerrada y acotada) tiene un punto elíptico.
[Hint: Considerar el punto mas lejano de la superficie al origen y relacionar con el Ejercicio 11 del Práctico 2.]

Ej. 23 ¿Es verdad que si para un punto p de una superficie conexa existe un entorno que contiene puntos de S a ambos lados del plano tangente afín $p + T_pS$, entonces p es hiperbólico?

Ej. 24 Sea p un punto de una superficie regular M. Mostrar que si T_pM tiene dos direcciones asintóticas ortogonales, entonces la curvatura media de M en p es nula.

Ej. 25 Verificar que las curvas coordenadas de la parametrización $\phi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ del helicoide son líneas asintóticas y deducir que el helicoide es una superficie mínima. Hallar el ángulo que forman las líneas asintóticas con las líneas de curvatura del helicoide sin encontrar explícitamente estas últimas.

Ej. 26 Hallar una superficie S y un difeomorfismo $F : S \to S$ que preserve curvatura gaussiana (es decir $K(F(p)) = K(p)$ para todo $p \in S$), pero que no sea una isometría.

Ej. 27 Dibujar una superficie difeomorfa a un toro menos un punto con curvatura gaussiana negativa.
[Hint: Usar el Ejercicio 6 para estudiar el signo de la curvatura gaussiana en el toro. *Modificar/moldear* el toro sin un punto para obtener un tal ejemplo.]

Ej. 28 (Opcional) Sea S una superficie parametrizada por una carta φ con coeficientes de la primera forma fundamental dados por $E = 2 + v^2$, $F = 1$ y $G = 1$. Mostrar que la curvatura gaussiana de S es igual a $-1/(1 + v^2)^2$.

Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. Una superficie S se dice *reglada* si para todo $p \in S$ existe una carta coordenada $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ de S con $p \in \phi(U)$ de la forma

$$\phi : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(s,t) = \alpha(s) + tV(s), \tag{1}$$

donde $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ y $V : (c,d) \to \mathbb{R}^3$ son curvas suaves, llamadas la curva base y la curva directriz de ϕ, respectivamente.

- Mostrar que el helicoide es una superficie reglada.
- Mostrar que la silla de montar M dada por la ecuación $z = xy$, está doblemente reglada, es decir hay dos sistemas coordenados como en (1) distintos, con distintos rayos (las imágenes de las rectas $t \mapsto \alpha(s) + tV(s)$).

2. Encontrar curvas guías del helicoide y de la silla de montar.

3. Mostrar que una superficie cubierta por una sola carta es orientable. En particular el helicoide y los gráficos de funciones (definidas en abiertos del plano, con valores reales) son orientables.

4. Sea M la superficie definida como el conjunto de nivel de un valor regular de una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Probar que M es orientable. En particular, la cinta de Moebius no es el conjunto de nivel de un valor regular de ninguna función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$.

5. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función, y sea S la superficie definida por su gráfico.
Mostrar que $n : S \to \mathbb{R}^3$,

$$n(\varphi(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}}\left(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\right),$$

define un campo normal unitario en S, donde $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.
Para cada una de las siguientes funciones, definidas en su dominio, sea S la superficie definida por su gráfico. Hallar en cada caso las direcciones principales, las curvaturas principales y las direcciones asintóticas (si existen) en el punto $p = (0,0,0)$. Decir qué tipo de punto es p.

- $f(x,y) = axy$
- $f(x,y) = (x+y)^2$
- $f(x,y) = x^4 + y^4$
- $f(x,y) = x^4 - y^4$

Calcular en cada caso la curvatura gaussiana y la curvatura media en el punto $(0,0,0)$.

6. Mostrar que las curvaturas principales de la superficie de revolución M con curva generatriz $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ está dada por

$$k_1 = -k_\gamma \qquad k_2 = -\frac{h'(t)}{r(t)||\gamma'(t)||},$$

donde k_γ es la *curvatura signada* de γ (como se define a partir del Ejercicio 18 del Práctico 2). Mostrar que los meridianos y paralelos son líneas de curvatura.
[Hint: Probarlo cuando γ es de rapidez unitaria y deducir el caso general]

7. Sea M la superficie de revolución con curva generatriz $\gamma(t) = \left(e^{-t^2}, t\right)$. Determinar los puntos de M con curvatura gaussiana positiva.

8. Mostrar que el catenoide es una superficie mínima, es decir tiene curvatura media constante nula.

9. Considerar la superficie S de $\mathbb{R}^3$ con una carta global $\varphi : (-1,1) \times (-1,1) \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi(u,v) \;=\; \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right).$$

Mostrar que:

- Los coeficientes de la primera forma fundamental de φ son $E(u,v) = G(u,v) = (1+u^2+v^2)^2$ y $F(u,v) = 0$.
- Una orientación de S obtenida por φ es $n : S \to S^2$, definida por

$$n(p) \;=\; \frac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2), \text{ si } p = \varphi(u,v).$$

- Las curvas coordenadas, definidas por $\gamma_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)$ y $\beta_{v_0}(u) = \varphi(u, v_0)$, son líneas de curvatura y las curvaturas principales en $p = \varphi(u,v)$ son dadas por $k_1(p) = -k_2(p) = 2/(1+u^2+v^2)^2$.
- La curva $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es una línea asintótica de S si y solo si $u(t) \pm v(t)$ es constante.
- La superficie S es una superficie mínima (llamada *superficie de Enneper*)

10. Sea S la superficie de revolución generada por la curva de rapidez unitaria $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, donde

$$r(t) = C\cos t, \qquad h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 u}\, du,$$

con $0 < C \leq 1$. Probar que S tiene curvatura gaussiana constante 1. Dibujarla para distintos valores de C.

11. Se llama *tractoide* (o la *anti-esfera*) a la superficie de revolución cuya curva perfil es la tractriz (Ejercicio 12 del práctico 1). Mostrar que tiene curvatura gaussiana constante igual a -1.

12. Mostrar que el valor promedio de la curvatura normal en dos direcciones ortogonales cualesquiera en p es $H(p)$.

13. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales son bisectrices de las direcciones asintóticas.

14. Sea p un punto de una superficie S con curvatura gaussiana positiva y sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva suave de rapidez unitaria con $\alpha(0) = p$ y curvatura κ. Mostrar que
$$\kappa(0) \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$
donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de S en p.

15. Sean X e Y direcciones principales de T_pS con autovalores k_1 y k_2 respectivamente, y sea $v(\theta) = \cos(\theta)X + \operatorname{sen}(\theta)Y$. Mostrar que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa_{n,p}(v(\theta))\mathrm{d}\theta \quad = \quad H(p),$$
donde $H(p)$ es la curvatura media de S en p.

16. Sea A el operador de forma de una superficie M en el punto p y sea $\{u, v\}$ una base ortonormal de T_pM. ¿Qué información geométrica da $\langle Au, v\rangle = 0$?

17. Sean M una superficie con una orientación $n : M \to S^2$ y $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ una curva de rapidez unitaria y curvatura nunca nula. Mostrar que α es una *línea asintótica de* M; esto es $\langle A_{\alpha(t)}(\alpha^{'}(t)), \alpha^{'}(t)\rangle = 0$, si y solo si el vector binormal $B_\alpha(t)$ es paralelo a $n(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.

18. Sea M una superficie orientada tal que M contiene una línea recta $\alpha : \mathbb{R} \to M$, $\alpha(t) = p + tu$ con $||u|| = 1$. Entonces α es una línea asintótica.

19. Mostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de la curva son parabólicos o planares.

20. Sea α una curva espacial de rapidez unitaria y curvatura positiva. Mostrar que la superficie tangente a α tiene curvatura gaussiana cero.

21. Sea S la *silla de mono*, es decir, el gráfico de la función definida por $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
    - Mostrar que por el origen pasan tres líneas asintóticas diferentes.
      [Hint: Buscar líneas rectas en S que pasen por el origen. Notar que $x^3 - 3xy^2$ factoriza como $x\left(x + \sqrt{3}y\right)\left(x - \sqrt{3}y\right)$].
    - Probar que las rotaciones en 120^o y 240^o alrededor del eje z son isometrías de S.
    - Mostrar que $\alpha(t) = \left(t, 0, t^3\right)$ es una línea de curvatura de S por el origen y encontrar dos más usando (b)
    - Probar que el origen es un punto planar de S.

22. Mostrar que toda superficie compacta (cerrada y acotada) tiene un punto elíptico.
    [Hint: Considerar el punto mas lejano de la superficie al origen y relacionar con el Ejercicio 11 del Práctico 2.]

23. ¿Es verdad que si para un punto p de una superficie conexa existe un entorno que contiene puntos de S a ambos lados del plano tangente afín $p + T_pS$, entonces p es hiperbólico?

24. Sea p un punto de una superficie regular M. Mostrar que si T_pM tiene dos direcciones asintóticas ortogonales, entonces la curvatura media de M en p es nula.

25. Verificar que las curvas coordenadas de la parametrización $\phi(u, v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ del helicoide son líneas asintóticas y deducir que el helicoide es una superficie mínima. Hallar el ángulo que forman las líneas asintóticas con las líneas de curvatura del helicoide sin encontrar explícitamente estas últimas.

26. Hallar una superficie S y un difeomorfismo $F : S \to S$ que preserve curvatura gaussiana (es decir $K(F(p)) = K(p)$ para todo $p \in S$), pero que no sea una isometría.

27. Dibujar una superficie difeomorfa a un toro menos un punto con curvatura gaussiana negativa.
    [Hint: Usar el Ejercicio 6 para estudiar el signo de la curvatura gaussiana en el toro. *Modificar/moldear* el toro sin un punto para obtener un tal ejemplo.]

28. (Opcional) Sea S una superficie parametrizada por una carta φ con coeficientes de la primera forma fundamental dados por $E = 2 + v^2$, $F = 1$ y $G = 1$. Mostrar que la curvatura gaussiana de S es igual a $-1/(1 + v^2)^2$.