Análisis Funcional I – 2020
Práctico 6

(1) Sea $A(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$.
  (a) Probar que $A^*(x) = (x_2, x_3, \cdots)$.
  (b) Comprobar que $A^*A = I \neq AA^*$.

(2) Hacer todos los ejercicios de la página 175 del libro Linear Functional Analyisis de Rynne and Youngson.

(3) Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert.
Probar que $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es autoadjunto si y solo si $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
Notar que la recíproca no vale si $\mathcal{H}$ es un $\mathbb{R}$-espacio de Hilbert: considerar $H = \mathbb{R}^2$ y $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal y tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.
Probar que T es continuo.

(5) Probar que si $T = T^*$, entonces $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.

(6) Hacer los ejercicios 6.8, 6.9, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.15 de la página 183 del libro Linear Functional Analyisis de Rynne and Youngson.

(7) Hacer los ejercicios 6.16, 6.17, 6.18, 6.21, 6.22 y 6.23 de las páginas 191 y 192 del libro Linear Functional Analyisis de Rynne and Youngson.

(8) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales sobre S_1 y S_2 respectivamente (donde S_1 y S_2 son subespacios vectoriales cerrados). Probar
  (a) $P_1P_2 = 0 \iff P_2P_1 = 0 \iff \langle S_1, S_2\rangle = 0$.
  (b) $P_1P_2 = 0 \implies S_1 \oplus S_2$ es un subespacio cerrado y $P_1 + P_2$ es proyección ortogonal sobre él.
  (c) $P_1P_2 = P_2P_1 \implies P_1P_2$ es proyección ortogonal sobre $S_1 \cap S_2$.
  (d) Dar un ejemplo en que $P_1P_2 \neq P_2P_1$.

(9) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales sobre S_1 y S_2 respectivamente (donde S_1 y S_2 son subespacios vectoriales cerrados). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $P_1P_2 = P_1$.

(b) $P_2P_1 = P_1$.

(c) $||P_1x|| \leq ||P_2x||$.

(d) $S_1 \subset S_2$

(e) $\langle P_1x, x\rangle \leq \langle P_2x, x\rangle \ \forall x \in \mathcal{H}$.

(10) Hacer los ejercicios 6.24 y 6.25 de las páginas 203 y el ejercicio 6.31 de la página 204 del libro Linear Functional Analyisis de Rynne and Youngson.

(11) Sea $A(f) = x^2 f(x)$ definido de $L^2[0,1]$ en $L^2[0,1]$.

(a) Probar que A lineal, continuo y autoadjunto.

(b) Probar que A es inyectivo y no sobre.

(c) Probar que el conjunto $\{\lambda : (A - \lambda I) \text{ no es inversible}\} = [0,1]$

(12) Dar un ejemplo que un operador en $\mathcal{B}(\ell^2)$ que no sea compacto y un ejemplo de un operador compacto que no sea de rango finito.

(13) Sea

$$(Tf)(s) = \frac{1}{s}\int_0^s f(t)dt \qquad (0 < s < 1)$$

definido para $f \in L^2(0,1)$.

(a) Probar que $T \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$.

(b) Probar que $\phi_n(t) = t^n$ son autovectores con autovalores $\frac{1}{n+1}$.

(c) Probar que T no es compacto ni simétrico.

(14) Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida y $K(x,y) \in L^2(X \times X, \Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$. Sea

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)dy.$$

(a) Si $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, entonces T es autoadjunto.

(b) Si T es autodajunto y $\{\lambda_n\}_n$ son los autovalores de T repetidos según su multiplicidad probar que $\sum\limits_n |\lambda_n|^2 < \infty$.

(15) Sea

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & \text{si } 0 \leq t \leq s, \\ (1-t)s, & \text{si } s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y sea $T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt$, para $s \in [0,1]$.

(a) Probar que $T \in \mathcal{B}(L^2[0,1])$.

(b) Probar que los autovalores de T son $(n\pi)^2$, que los autovectores correspondientes son $\operatorname{sen}(n\pi x)$ y que los autoespacios tienen dimensión 1. (Ayuda: Si $\lambda \neq 0$, la ecuación $Tf = \lambda f$ implica que f es infinitamente diferenciable, que f satisface la ecuación $\lambda f'' + f = 0$ y que $f(0) = f(1) = 0$. El caso $\lambda = 0$ puede ser tratado en forma independiente.)

(16) Hacer los ejercicios 7.2, 7.4, 7.6, 7.7, 7.8, 7.11, 7.25, 7.27, 7.28 y 7.30 del capítulo 7 del libro Linear Functional Analyisis de Rynne and Youngson.