Práctico 6
Matemática Discreta I – Año 2020/2
FAMAF

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+bi$. Graficar el resultado.

   a) $(-1+i)(3-2i)$
   b) $i^{131} - i^9 + 1$
   c) $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{i}}$
   d) $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   a) Si $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$.
   b) Si z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.
   c) Si z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.

3. Dibujar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

   a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = -z\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3\,\mathrm{Re}(z) - 1 = 2\,\mathrm{Im}(z)\}$
   c) $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z - 1 + i| \leq 3\}$
   e)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z = 1\}$
   f)* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = |z-1-i|\}$

4. Determinar el módulo, el argumento, el conjugado y el inverso de los siguientes números complejos:

   a) -1
   b) $-3i$
   c) $5+5i$
   d) $-1-i$
   e) $2+3i$
   f) $-\sqrt{3}+i$
   g) $(1+i)^{-1}$
   h) $-\cos(\frac{17\pi}{5}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{17\pi}{5})$
   i) $(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))^{-1}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

5. Sean $z = 1+i$, $w = 2i$ y $v = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$. Graficar los siguientes números complejos:

   a) $z+w$
   b) $\bar{z}$
   c) $z \cdot w$
   d) $(z-w)\cdot v$
   e) w^{-1}

6. Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|z^n| = |z|^n$ y $\bar{z}^n = \overline{z^n}$.

7. Sea $b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:
   a) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?

b) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.

c) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

8. Calcular las raíces n-ésimas de la unidad para $n = 4$ y 6, y expresarlas de la forma $a + ib$. Graficar.

9. Resolver las siguientes ecuaciones, y escribir cada una de las soluciones en la forma polar $r\,(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, y en la forma cartesiana $a + bi$, con a, $b \in \mathbb{R}$.

a) $z^3 = -3i$

b) $z^4 = 5 + 5i$

c) $2z^2 + 2z + 13 = 0$

d) $z^4 + iz^2 = -4$