Geometría Diferencial

Período | 2020-II

Práctico 8

FAMAF

Ej. 1 Sea S una superficie de revolución con curva generatriz de rapidez unitaria, parametrizada por $\varphi(s,t) = (r(t)\cos s, r(t)\operatorname{sen} s, h(t))$.

- Probar que los meridianos son geodésicas.
- Probar que un paralelo $s \mapsto \phi(s, t_0)$ es geodésica si y sólo si $r'(t_0) = 0$.

Ej. 2 Los paralelos el toro $T(R,r)$ por los puntos $(R+r, 0)$, $(R-r, 0)$, (R, r) son llamados paralelo máximo, paralelo mínimo y paralelo superior, respectivamente. Verificar cuál de estos paralelos es la trayetoria de una geodésica del toro.

Ej. 3 Hallar todas las geodésicas del cilindro.

Ej. 4 Sean S una superficie regular y P un plano que corta a S de forma ortogonal a lo largo de una curva α de rapidez constante; i.e. P es un plano ortogonal al plano $\alpha(t) + T_{\alpha(t)}S$, para todo t en el dominio de α. Mostrar que α es una geodésica de S.

Ej. 5 Sea M una superficie regular y sea P un plano que intersecta a M en la trayectoria de una curva α de rapidez unitaria.

- Probar que si la reflexión respecto de P lleva M en M (en particular es una isometría de M), entonces α es una geodésica de M.
- Encontrar las trayectorias de dos geodésicas de la superficie definida por el gráfico de la función $f(u,v) = uv$ (silla de montar).
- Encontrar las trayectorias de tres geodésicas de la superficie definida implícitamente por $9x^2+y^2-z^2 = 1$.

Ej. 6 (Opcional) Sea $\alpha : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to S$ una curva regular en una superficie orientada S, y sea $\beta : [0,L] \subseteq \mathbb{R} \to S$ la parametrización por longitud de arco de α. Mostrar que la curvatura geodésica de β se puede expresar en términos de α, más precisamente, si s es la longitud de α desde a hasta t, entonces

$$\begin{aligned} k_{g,\beta}(s) &= \frac{1}{||\alpha'(t)||^3}\langle \alpha''(t), n(\alpha(t)) \times \alpha'(t)\rangle \\ &= \frac{1}{||\alpha'(t)||^3}\det(\alpha'(t), \alpha''(t), n \circ \alpha(t)). \end{aligned}$$

Ej. 7 Mostrar que un campo paralelo a lo largo de una geodésica γ forma un ángulo constante con γ'.

Ej. 8 Sea α una curva rapidez unitaria y curvatura geodésica constante c sobre la esfera unidad S^2. Demostrar que α es una curva planar cuya trayectoria está contenida en un circulo de longitud $2\pi(1+c^2)^{-\frac{1}{2}}$. [Hint: Mostrar que $P = c\alpha(t) + \alpha(t) \times \alpha'(t)$ es un vector constante y es candidato a vector normal del plano que contiene a α]

Ej. 9 Dado que se sabe que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos, mostrar la existencia de triángulos geodésicos cuyos ángulos interiores suman más que π.

Ej. 10 Sea S la esfera de centro cero y radio 1 y sea α una parametrización por longitud de arco del paralelo de altura 1/2. Sea W un campo paralelo a lo largo de α con $W(0) = \alpha'(0)$. Indicar cuántas vueltas da W respecto del marco móvil a lo largo de α cuando esta curva da una vuelta completa (ver la segunda animación en https://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum). ¿Cuánto gira realmente W a lo largo de α?

Geodésicas

Ej. 11 Sea M el helicoide, parametrizado por $\phi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v)$.

- Calcular la curvatura geodésica de la hélice

$$\alpha(t) = (\cos(at), \operatorname{sen}(at), at) \qquad (a = 1/\sqrt{2}).$$

- Indicar si α minimiza la distancia entre algunos puntos de su trayectoria.
- Encontrar el campo paralelo W a lo largo de α con $W(0) = \alpha'(0)$. ¿Cuánto vale en $t = \sqrt{2}\pi$?

Ej. 12 Sea α una curva regular sobre una superfice S con orientación n.

- Si α es tanto línea de curvatura y geodésica de S, mostrar que α debe ser una curva plana. [Hint: Un candidato para un vector perpendicular al plano que contiene a α es $\alpha^{'}(t) \times n(\alpha(t))$; mostrar que es constante.]
- Si α es tanto una geodésica y curva plana con curvatura nunca nula, mostrar que α es una línea de curvatura. [Hint: Como se necesita derivar $n(\alpha(t))$, expresar este último en términos de $\alpha^{'}(t)$ y un vector normal al plano que contiene a α.]
- Mostrar que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie está contenida en una esfera o en un plano.

Ej. 13 Mostrar que una isometría local entre superficies no preserva necesariamente el módulo de la curvatura media. Comparar con la afirmación análoga para la curvatura gaussiana.

Ej. 14 Considerar la esfera de radio uno, el cilindro y la silla de montar. Justificar por qué estas superficies no son localmente isométricas entre sí.

Ej. 15 Probar que no existe una carta ϕ de la esfera S de centro cero y radio r tal que para todo (u,v) en el dominio de ϕ la base $\{\phi_u(u,v), \phi_v(u,v)\}$ de $T_{\phi(u,v)}S$ sea ortonormal.

Ej. 16 Para cada $r > 0$, sea C_r el cilindro $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}$. Probar C_r no es isométrico al plano $z = 0$ ni al cilindro C_ρ si $\rho \neq r$.
[Hint: Considerar las geodésicas periódicas.]

Ej. 17 (Opcional) Sea $U = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ y suponer que hay una superficie $H \subseteq \mathbb{R}^3$ y una carta de H, $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to H$, con coeficientes de la primera forma fundamental de φ dados por $E(u,v) = G(u,v) = 1/v^2$ y $F(u,v) = 0$. Sean x_0 y $r > 0$ constantes y considerar las curvas $\alpha, \beta : (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R} \to H$ dadas por

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \varphi(x_0 + r\tanh(t), r\,\mathrm{sech}(t)) \\ \beta(t) &= \varphi(x_0, \exp(t)). \end{aligned}$$

Mostrar que α y β son geodésicas de H.

Ej. 18 (Opcional) Mostrar que no hay *geodésicas periódicas* sobre la superficie de revolución S con curva perfil dada por $\gamma : (0,\infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (1/t^2, t)$.
[Hint: Pensar en lo más alto y lo más bajo que puede llegar una geodésica periódica de S y usar el Teorema de Clairaut.]

Ej. 19 Sea S el hiperboloide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, sea $p \in S$ con tercera coordenada mayor que dos, y sea $v \in T_pS$ un vector unitario que forma un ángulo de $\pi/3$ con el paralelo que pasa por p. Probar que la geodésica con velocidad inicial v nunca tiene tercera coordenada negativa.
[Hint: Usar el Teorema de Clairaut.]

Ej. 20 (Opcional) Sea $p(x)$ un polinomio de orden 6 tal que para todo x en $\mathbb{R}$, $p(x) > 0$. Considerar la superficie de revolución S parametrizada por $\mathbf{x}(u, v) = (p(u) \cos v, p(u) \sin v, u)$.

- Probar que S tiene a lo sumo cinco paralelos que son geodésicas.
- Calcular la curvatura gaussiana y la curvatura media, y determinar cuáles paralelos son geodésicas para la superficie generada por $p(x) = (x^2 - 2x + 2)^2$.

Ej. 21 (Opcional)

- Probar que si $F : S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría y α es una geodésica en S_1, entonces $F \circ \alpha$ es una geodésica en S_2.
- Sea S una superficie regular tal que para todo $x, y \in S$ existe una geodésica α de S tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Sea $F : S \longrightarrow S$ una isometía tal que $F(p) = p$ y $dF_p = \mathrm{Id}$ para algún $p \in S$. Probar que $F(q) = q$ para todo $q \in S$.

Ej. 22 (Opcional) Sea p un punto en una superficie S. Se puede probar que si $r > 0$ es suficientemente pequeño, entonces la circunferencia intrínseca de radio r centrada en p, dada por

$$C_p(r) = \{\gamma(r) \mid \gamma \text{ es una geodésica de rapidez unitaria en } S \text{ con } \gamma(0) = p\},$$

es la imagen de una curva en S. Verificar en el caso particular en que S es la esfera de radio R que la aproximación de Taylor de tercer grado de la función $r \mapsto \operatorname{long}(C_p(r))$ es

$$2\pi r - \frac{2\pi}{3!} K(p) r^3,$$

donde K es la curvatura gaussiana. (Esto vale en general y proporciona una interpretación intrínseca de la curvatura gaussiana.)

Versión para imprimir (aunque se recomienda escribirlos directamente en su cuaderno de prácticos)

1. Sea S una superficie de revolución con curva generatriz de rapidez unitaria, parametrizada por $\varphi(s,t) = (r(t)\cos s, r(t)\operatorname{sen} s, h(t))$.
   - Probar que los meridianos son geodésicas.
   - Probar que un paralelo $s \mapsto \phi(s,t_0)$ es geodésica si y sólo si $r'(t_0) = 0$.

2. Los paralelos el toro $T(R,r)$ por los puntos $(R+r,0)$, $(R-r,0)$, (R,r) son llamados paralelo máximo, paralelo mínimo y paralelo superior, respectivamente. Verificar cuál de estos paralelos es la trayetoria de una geodésica del toro.

3. Hallar todas las geodésicas del cilindro.

4. Sean S una superficie regular y P un plano que corta a S de forma ortogonal a lo largo de una curva α de rapidez constante; i.e. P es un plano ortogonal al plano $\alpha(t) + T_{\alpha(t)}S$, para todo t en el dominio de α. Mostrar que α es una geodésica de S.

5. Sea M una superficie regular y sea P un plano que intersecta a M en la trayectoria de una curva α de rapidez unitaria.
   - Probar que si la reflexión respecto de P lleva M en M (en particular es una isometría de M), entonces α es una geodésica de M.
   - Encontrar las trayectorias de dos geodésicas de la superficie definida por el gráfico de la función $f(u,v) = uv$ (silla de montar).
   - Encontrar las trayectorias de tres geodésicas de la superficie definida implícitamente por $9x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

6. (Opcional) Sea $\alpha : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to S$ una curva regular en una superficie orientada S, y sea $\beta : [0,L] \subseteq \mathbb{R} \to S$ la parametrización por longitud de arco de α. Mostrar que la curvatura geodésica de β se puede expresar en términos de α, más precisamente, si s es la longitud de α desde a hasta t, entonces

$$\begin{aligned} k_{g,\beta}(s) &= \frac{1}{||\alpha'(t)||^3}\langle \alpha''(t), n(\alpha(t)) \times \alpha'(t)\rangle \\ &= \frac{1}{||\alpha'(t)||^3}\det(\alpha'(t), \alpha''(t), n \circ \alpha(t)). \end{aligned}$$

7. Mostrar que un campo paralelo a lo largo de una geodésica γ forma un ángulo constante con γ'.

8. Sea α una curva rapidez unitaria y curvatura geodésica constante c sobre la esfera unidad S^2. Demostrar que α es una curva planar cuya trayectoria está contenida en un circulo de longitud $2\pi(1+c^2)^{-\frac{1}{2}}$.
   [Hint: Mostrar que $P = c\alpha(t) + \alpha(t) \times \alpha'(t)$ es un vector constante y es candidato a vector normal del plano que contiene a α]

9. Dado que se sabe que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos, mostrar la existencia de triángulos geodésicos cuyos ángulos interiores suman más que π.

10. Sea S la esfera de centro cero y radio 1 y sea α una parametrización por longitud de arco del paralelo de altura $1/2$. Sea W un campo paralelo a lo largo de α con $W(0) = \alpha'(0)$. Indicar cuántas vueltas da W respecto del marco móvil a lo largo de α cuando esta curva da una vuelta completa (ver la segunda animación en https://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum). ¿Cuánto gira realmente W a lo largo de α?

11. Sea M el helicoide, parametrizado por $\phi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v)$.
    - Calcular la curvatura geodésica de la hélice
    $$\alpha(t) = (\cos(at), \operatorname{sen}(at), at) \qquad (a = 1/\sqrt{2}).$$
    - Indicar si α minimiza la distancia entre algunos puntos de su trayectoria.
    - Encontrar el campo paralelo W a lo largo de α con $W(0) = \alpha'(0)$. ¿Cuánto vale en $t = \sqrt{2}\pi$?

12. Sea α una curva regular sobre una superfice S con orientación n.
    - Si α es tanto línea de curvatura y geodésica de S, mostrar que α debe ser una curva plana.
    [Hint: Un candidato para un vector perpendicular al plano que contiene a α es $\alpha'(t) \times n(\alpha(t))$; mostrar que es constante.]
    - Si α es tanto una geodésica y curva plana con curvatura nunca nula, mostrar que α es una línea de curvatura.
    [Hint: Como se necesita derivar $n(\alpha(t))$, expresar este último en términos de $\alpha'(t)$ y un vector normal al plano que contiene a α.]
    - Mostrar que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie está contenida en una esfera o en un plano.

13. Mostrar que una isometría local entre superficies no preserva necesariamente el módulo de la curvatura media. Comparar con la afirmación análoga para la curvatura gaussiana.

14. Considerar la esfera de radio uno, el cilindro y la silla de montar. Justificar por qué estas superficies no son localmente isométricas entre sí.

15. Probar que no existe una carta ϕ de la esfera S de centro cero y radio r tal que para todo (u,v) en el dominio de ϕ la base $\{\phi_u(u,v), \phi_v(u,v)\}$ de $T_{\phi(u,v)}S$ sea ortonormal.

16. Para cada $r > 0$, sea C_r el cilindro $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=r^2\right\}$. Probar C_r no es isométrico al plano $z=0$ ni al cilindro C_ρ si $\rho \neq r$.
[Hint: Considerar las geodésicas periódicas.]

17. (Opcional) Sea $U = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ y suponer que hay una superficie $H \subseteq \mathbb{R}^3$ y una carta de H, $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to H$, con coeficientes de la primera forma fundamental de φ dados por $E(u,v) = G(u,v) = 1/v^2$ y $F(u,v) = 0$. Sean x_0 y $r > 0$ constantes y considerar las curvas $\alpha, \beta : (-\infty,\infty) \subset \mathbb{R} \to H$ dadas por

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \varphi(x_0 + r\tanh(t), r\,\mathrm{sech}(t))\\ \beta(t) &= \varphi(x_0, \exp(t)).\end{aligned}$$

Mostrar que α y β son geodésicas de H.

18. (Opcional) Mostrar que no hay *geodésicas periódicas* sobre la superficie de revolución S con curva perfil dada por $\gamma : (0,\infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (1/t^2, t)$.
[Hint: Pensar en lo más alto y lo más bajo que puede llegar una geodésica periódica de S y usar el Teorema de Clairaut.]

19. Sea S el hiperboloide de revolución $x^2+y^2-z^2=1$, sea $p \in S$ con tercera coordenada mayor que dos, y sea $v \in T_pS$ un vector unitario que forma un ángulo de $\pi/3$ con el paralelo que pasa por p. Probar que la geodésica con velocidad inicial v nunca tiene tercera coordenada negativa.
[Hint: Usar el Teorema de Clairaut.]

20. (Opcional) Sea $p(x)$ un polinomio de orden 6 tal que para todo x en $\mathbb{R}$, $p(x) > 0$. Considerar la superficie de revolución S parametrizada por $\mathbf{x}(u,v) = (p(u)\cos v, p(u)\sin v, u)$.

- Probar que S tiene a lo sumo cinco paralelos que son geodésicas.
- Calcular la curvatura gaussiana y la curvatura media, y determinar cuáles paralelos son geodésicas para la superficie generada por $p(x) = (x^2-2x+2)^2$.

21. (Opcional)

- Probar que si $F : S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría y α es una geodésica en S_1, entonces $F \circ \alpha$ es una geodésica en S_2.
- Sea S una superficie regular tal que para todo $x, y \in S$ existe una geodésica α de S tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Sea $F : S \longrightarrow S$ una isometía tal que $F(p) = p$ y $dF_p = \mathrm{Id}$ para algún $p \in S$. Probar que $F(q) = q$ para todo $q \in S$.

22. (Opcional) Sea p un punto en una superficie S. Se puede probar que si $r > 0$ es suficientemente pequeño, entonces la circunferencia intrínseca de radio r centrada en p, dada por

$$C_p(r) = \{\gamma(r) \mid \gamma \text{ es una geodésica de rapidez unitaria en } S \text{ con } \gamma(0) = p\},$$

es la imagen de una curva en S. Verificar en el caso particular en que S es la esfera de radio R que la aproximación de Taylor de tercer grado de la función $r \mapsto \mathrm{long}(C_p(r))$ es

$$2\pi r - \frac{2\pi}{3!} K(p)\, r^3,$$

donde K es la curvatura gaussiana. (Esto vale en general y proporciona una interpretación intrínseca de la curvatura gaussiana.)