Práctico 6
Matemática Discreta I – Año 2020/2
FAMAF

1. ¿Cuántas aristas tiene el grafo completo K_n? ¿Para cuáles valores de n se puede encontrar un dibujo de K_n con la propiedad que las líneas representan las aristas sin cruzarse?

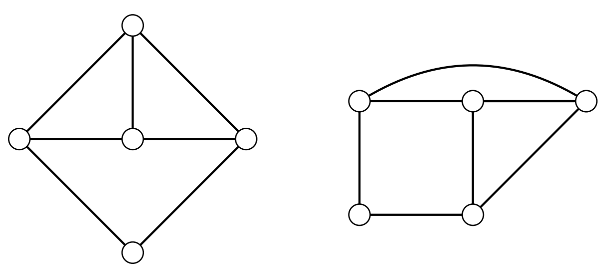
2. Encuentre un isomorfismo entre los grafos por las siguientes listas. (Ambas listas especifican versiones de un famoso grafo conocida como *grafo de Petersen.*)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

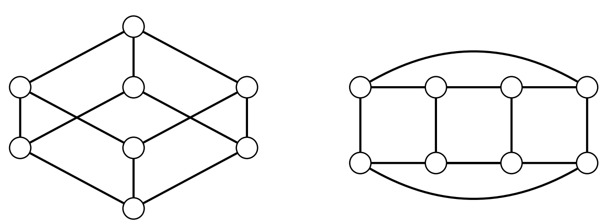
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	0	1	0	2	6
5	0	1	2	3	4	4	3	5	7
7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

3. Demuestre que los siguientes pares de grafos son isomorfos (encuentre un isomorfismo):

(a)



(b)



4. *a*) Encuentre todos los grafos de 5 vértices y 2 aristas no isomorfos entre sí.
   b) ¿Cuál es el máximo número de aristas que puede tener un grafo de 5 vértices?

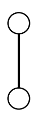
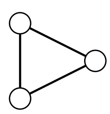
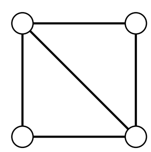
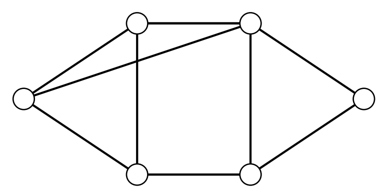
5. ¿Cuántas aristas tiene un grafo que tiene cuatro vértices de valencia 3, dos vértices de valencia 5, dos de valencia 6 y uno de valencia 8?

6. Para cada una de las siguientes secuencias, encuentre un grafo que tenga exactamente las valencias indicadas o demuestre que tal grafo no existe:

   a) 3, 3, 1, 1
   b) 3, 2, 2, 1
   c) 3, 3, 2, 2, 1, 1
   d) 4, 1, 1, 1, 1
   e) 7, 3, 3, 3, 2, 2
   f) 4, 1, 1, 1

7. Sea $G = (V, E)$ un grafo, llamamos *grafo complemento* a $G' = (V, E')$, donde E' son todos los subconjuntos de dos elementos de V que no están en E. Es decir, el grafo complemento tiene los mismos vértices que el grafo original y todas las aristas que le faltan a G para ser grafo completo.

   a) Halle el complemento de los siguientes grafos:

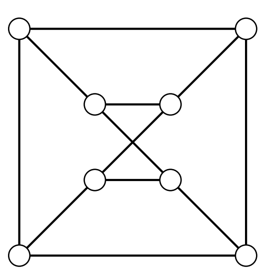
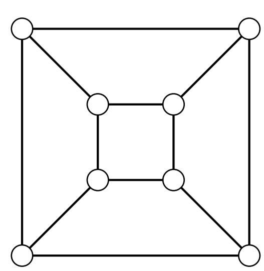
   (a)  (b)  (b)  (b) 

   b) Si $V = \{v_1 \dots v_n\}$ y $\delta(v_i) = d_i \;\; \forall \; i = 1, \dots, n$, calcule las valencias del grafo complemento.

8. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos y sea $\alpha : V \mapsto V'$ una función tal que $\delta(v) = \delta(\alpha(v)) \;\; \forall \; v \in V$.

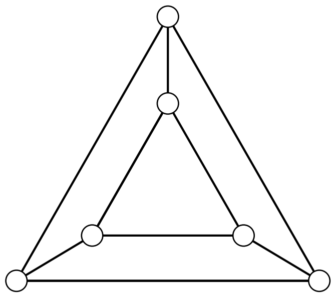
   a) ¿Puede afirmar que α es un isomorfismo?
   b) ¿Puede afirmarlo si $|V| = 3$ ó 4?

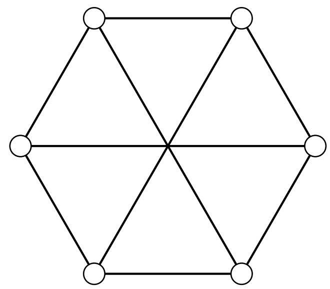
9. Encuentre una función del grafo A al B que preserve valencias. ¿Es un isomorfismo?

   A :  B : 

10. Pruebe que si G es un grafo con más de un vértice, entonces existen dos vértices con la misma valencia.

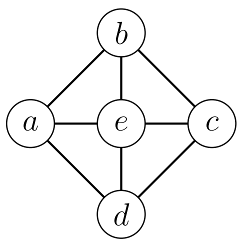
11. Pruebe que los siguientes grafos no son isomorfos:



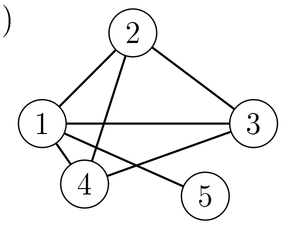


12. Dados los siguientes grafos:

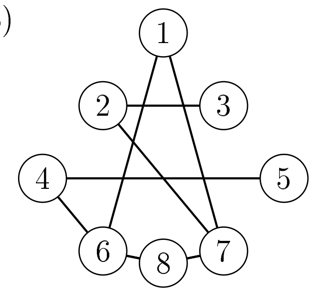
(1)



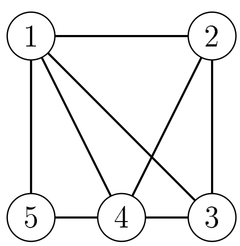
(2)



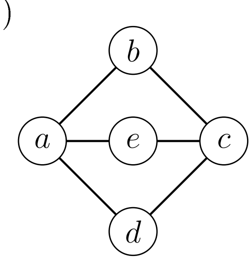
(3)



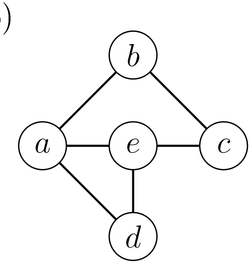
(4)



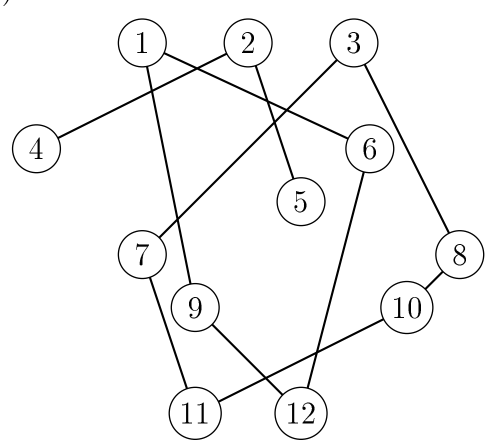
(5)



(6)



(7)



a) Determinar en cada caso si existen subgrafos completos de más de 2 vértices.

b) Para el grafo (1), dar todos los caminos que unen a con b.

c) Dar caminatas eulerianas en los grafos (4), (5) y (6).

d) Para (2) y (3), decir si existen ciclos hamiltonianos.

e) Determinar cuales de los siguientes pares de grafos son isomorfos:

(i) (4) y (2),

(ii) (5) y (6),

(iii) (5) y (1).

f) Hallar las componentes conexas del grafo (7).

13. Dado el siguiente grafo

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7.

Determinar si existe una caminata euleriana y, en caso de ser así, explicitar alguna.

14. Un ratón intenta comer un $3 \times 3 \times 3$ cubo de queso. Comienza en una esquina y come un subcubo de $1 \times 1 \times 1$, para luego pasar a un subcubo adyacente. ¿Podrá el ratón terminar de comer el queso en el centro?

15. Dar todos los árboles de 5 vértices no isomorfos.

16. *a*) Probar que si G es un grafo en el que cada vértice tiene grado mayor que 1, entonces G tiene un ciclo.

b) El ítem anterior afirma que si T es un árbol, entonces existe al menos un vértice de grado 1 (llamado una *hoja* del árbol). Más aún, probar que si $T = (V, E)$ es un árbol y $|V| \geq 2$, entonces existen al menos dos hojas.

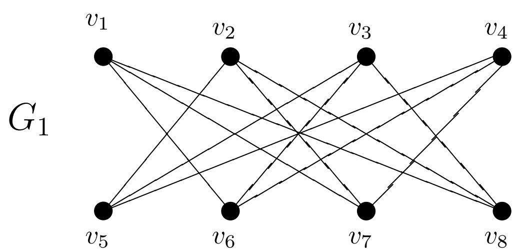
17. Probar que si $T = (V, E)$ es un bosque con c componentes conexas, entonces $|E| = |V| - c$.

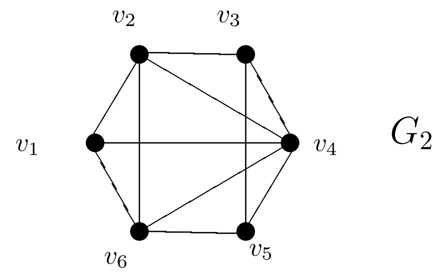
18. *a*) Aplique el algoritmo greedy al grafo G_1 usando los siguientes órdenes en los vértices:

1) v_1, v_5, v_2, v_6, v_3, v_7, v_4, v_8,

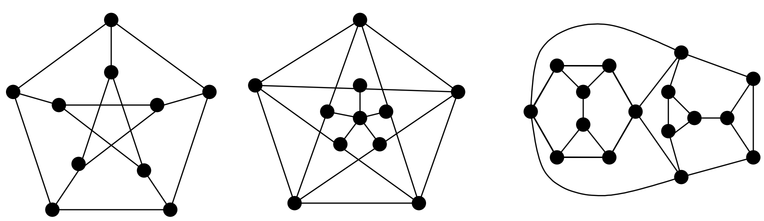
2) v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8.

b) Para el grafo G_2 encontrar un orden de los vértices tal que el algoritmo greedy da una coloración con 4 colores.





19. Encuentre los números cromáticos de los siguientes grafos:
    a) K_n, (grafo completo de n vértices).
    b) C_n, (ciclo de n vértices).
    c) Los siguientes tres grafos:



20. Recordar que si G es un grafo bipartito con una cantidad impar de vértices, entonces G no tiene ciclos hamiltonianos. ¿Tiene el grafo del Ejercicio 13 un ciclo hamiltoniano?