Geometría Diferencial - 2020

Preguntas de la teoría para el examen

Observaciones: Una pregunta del examen puede ser sólo una parte de una de las preguntas siguientes. Si en esta lista una pregunta tiene sugerencia, también la tendrá si aparece en un examen.

1. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva suave. Definir la longitud de α. Suponiendo además que α es regular (es decir, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$) y tiene longitud L, definir la reparametrización por longitud de arco $\beta : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ de α y mostrar que efectivamente β tiene rapidez unitaria.

2. Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ una curva de rapidez unitaria. Definir la función curvatura de α. Para el caso $n = 3$ y $\alpha''(t) \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$, definir la torsión de α y el triedro de Frenet de α; escribir además las relaciones de Frenet (es decir, escribir la relación entre los elementos del triedro y sus derivadas) y demostrar su validez.

3. Demostrar que una curva de rapidez unitaria en $\mathbb{R}^3$ y curvatura nunca nula tiene torsión nula si y sólo si su tayectoria está contenida en un plano.

4. Definir hélice y probar que si $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ es una hélice con curvatura $\kappa : (a,b) \to \mathbb{R}$ y torsión $\tau : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces τ/κ es constante.

5. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular (no necesariamente de rapidez unitaria). Definir la función curvatura $\kappa_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y probar que
$$\kappa_\alpha = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

6. Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva suave de rapidez unitaria.

   a) Escribir dos definiciones equivalentes de la función curvatura signada $k : (a,b) \to \mathbb{R}$ de α y probar la equivalencia.

   b) Mostrqr que si $\alpha'(t) = (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$ para cierta función $\theta : (a,b) \to \mathbb{R}$ de clase C^2, entonces $k = \theta'$.

7. Enunciar con precisión el teorema fundamental de las curvas planas, y demostrarlo.

8. Mostrar que la longitud de cualquier curva suave $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $\alpha(a) = 0$ y $\alpha(b) = q$ es mayor o igual que $\|q - p\|$.

9. Sea C una transformación lineal. Mostrar que son equivalentes: a) C es ortogonal. b) C preserva productos internos. c) C preserva normas.

10. Mostrar que si C es una matriz ortogonal 3×3, entonces para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ vale que
$$Cx \times Cy = \det(C)\; C(x \times y).$$
11. Escribir la definición de transformación euclidiana de $\mathbb{R}^n$ y de transformación rígida de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es euclidiana si y sólo si preserva distancias, es decir, $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
12. Mostrar que las transformaciones euclidianas de la recta real son traslaciones o reflexiones.
13. Escribir la definición de que una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ sea un tirabuzón. Enunciar con precisión el teorema de Chasles y demostrarlo.
14. Enunciar con precisión el teorema fundamental de las curvas espaciales.
15. Definir con precisión el concepto de superficie regular.
16. Mostrar que una función suave $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ definida en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ preserva la regularidad de curvas si y sólo si $d\phi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.
17. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función suave definida en un conjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que el gráfico de f es una superficie regular.
18. Sea S la esfera de centro cero y radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Definir los sistema coordenados canónicos de casquetes φ_i^ε, con $i = 1, 2, 3$ y $\varepsilon = 1, -1$, y usarlos para mostrar que S es una superficie regular.
19. Definir el helicoide y mostrar que es una superficie regular.
20. Sean $\alpha : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$\alpha(s) = (\operatorname{sen} s)(\cos s, 1).$$
Sean $U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(s, t) = (\alpha(s), t)$. Mostrar que ϕ es suave, inyectiva, con $d\phi_q$ inyectiva para todo $q \in U$, pero no existe una función continua $\Phi : V \to \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(\phi(s, t)) = (s, t)$ para todo $(s, t) \in U$, donde V es un abierto de $\mathbb{R}^3$.
21. Enunciar con precisión el teorema de la superficie implícita y demostrarlo.
22. Sean S una superficie regular. Escribir la definición de que S sea conexa. Mostrar que el hiperboloide de dos hojas no es conexo.
23. Enunciar con precisión el lema del diagrama triangular y demostrarlo.
24. Enunciar con precisión la proposición que afirma que los cambios de coordenadas son suaves, y demostrarla.

25. a) Sea S una superficie regular y sea $f : S \to \mathbb{R}^m$ una función. Escribir la definición de que f sea suave en $p \in S$ y mostrar que la noción es independiente del sistema coordenado que se considere alrededor de p.

    b) Escribir la definición de que f sea suave. Mostrar en particular que si $\varphi : U \to S$ es un sistema coordenado, entonces $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ es suave.

26. Escribir la definición de que una función $f : S_1 \to S_2$ sea un difeomorfismo.

27. Mostrar que la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, |x| < \pi/2\}$ es difeomorfa al plano $z = 0$.

28. Mostrar que el cilidro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es difeomorfo a la esfera de centro cero y radio 1 menos los polos.

29. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

    $$\phi(s, t) = (\cos s, \operatorname{sen} s, t)$$

    una parametrización del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Mostrar que $F : C \to C$ está bien definida por $F(\phi(s, t)) = \phi(s + t, t)$ y es un difeomorfismo.

30. Sea S una superficie regular y sea $p \in S$.

    a) Escribir la definición de T_pS.

    b) Probar que si $\varphi : U \to S$ es un sistema coordenado de S y $p = \varphi(q)$, entonces T_pS es la imagen de la transformación lineal $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Concluir que T_pS es un subespacio vectorial de dimensión dos y $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es una base de T_pS.

31. Definir el plano tangente afín a una superficie regular S en el punto $p \in S$.

32. a) Escribir una expresión para T_pS, donde S está dada por el teorema de la función implícita, y demostarlo.

    b) Mostrar que si S es la esfera de centro cero y radio 1 y $p \in S$, entonces $T_pS = p^\perp$.

33. Sea S una superficie regular, sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una función suave y sea $p \in S$.

    a) Escribir la definición de $df_p : T_pS \to \mathbb{R}^n$. Mostrar que la definición es buena y que df_p resulta lineal.

    b) Mostrar que si en particular $f = F|_S$, donde $F : A \to \mathbb{R}^n$ es una función suave definida en un conjunto abierto A de $\mathbb{R}^3$, entonces $df_p = dF_p|_{T_pS}$.

34. Enunciar con precisión el teorema de la función inversa para superficies y demostrarlo.

35. Definir la noción de área de una región de una superficie regular contenida en un abierto coordenado y probar que las definición es buena.

36. a) Sean M y N dos superficies regulares y sea $f : M \to N$ una función suave. Escribir la definición de que f sea una isometría local.

    b) Hallar una isometría local del plano en el cilindro y verificar que de hecho es una isometría local.

37. Probar que una función suave $f : M \to N$ entre dos superficies regulares es una isometría local si y sólo si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una isometría lineal para todo $p \in M$. Mostrar que en particular las isometrías locales son difeomorfismos locales. Escribir la definición de que f sea una isometría.

38. Sea M una superficie regular y sea $\varphi : U \to M$ un sistema coordenado. Definir los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental de φ. Usarlos para dar un criterio para que dos abiertos coordenados en superficies sean isométricos, y demostrar el criterio.

39. Mostrar que $f : M \to N$ es una isometría entre dos superficies, entonces f prserva áreas de regiones.

40. Definir el helicoide H y el catenoide C. Sea M la región de H contenida entre los planos $z = 0$ y $z = 2\pi$ y sea N el catenoide menos el meridiano de coordenada $u = 0$. Probar que M y N son isométricas.

41. Sea M una superficie regular. Escribir la definición de que M sea orientable. Mostrar que la esfera de centro cero y radio 1 es orientable. Escribir la definición de una orientación de una superficie orientable.

42. Probar que las superficies de revolución son orientables.

43. Definir la cinta de Moebius como la imagen de una función $\varphi : \mathbb{R}\times (-r, r) \to \mathbb{R}^3$ de la forma $\varphi (s, t) = \alpha (s) + tV (s)$ y probar que no es orientable.

44. a) Escribir la definición de superficie reglada.

    b) Definir el concepto de curva guía o curva de estrechez de una superficie regular reglada por la parametrización $\varphi (s, t) = \alpha (s) + tU (s)$, donde $\|U (s)\| = 1$, $U' (s) \neq 0$ para todo s. Indicar en qué sentido la curva guía es única y justificarlo.

45. Sea M una superficie regular y sea $p \in M$.

    a) Escribir la definición del operador de forma $A_p : T_pM \to T_pM$ y mostrar que efectivamente se puede poner T_pM como conjunto de llegada.

    b) Probar que A_p diagonaliza en una base ortonormal de T_pM (dar por sabido que una transformación lineal en un espacio con producto interno diagonaliza en una base ortonormal si y sólo si es autoadjunta).

46. Sea M una superficie regular y sea $p \in M$. Definir los conceptos de dirección principal, dirección asintótica, curvatura gaussiana y curvatura media en p.

47. Sea M el gráfico de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - 3y^2$ y sea $p = (0, 0, 0)$. Hallar T_pM, las direcciones principales y asintóticas, y las curvaturas gaussiana y media de M, todas en el punto p.

48. Sea M una superficie regular. Definir que un punto $p \in M$ sea elíptico, hiperbólico, parabólico, planar, o umbílico.

49. Sea C el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$. Encontrar las direcciones principales y asintóticas, y las curvaturas gaussiana y media en un punto arbitrario de C.

50. Definir las nociones de línea de curvatura y línea asintótica de una superficie regular.

51. Mostrar que el paralelo superior del toro de revolución $T(R, r)$ es una línea de curvatura y también una línea asintótica.

52. Sea M una superficie, sea $p \in M$ y sea A_p el operador de forma de M en p. Determinar las curvaturas gaussiana y media de M en p a partir de la matriz de A_p en una base de T_pM (no necesariamente de direcciones principales). Justificar.

53. Sea M una superficie regular con una orientación n, sea $p \in M$ y sea $\alpha : (a, b) \to M$ una curva de rapidez unitaria con $\alpha(0) = p$. Dar la definición de la curvatura normal de α en M en el punto p, escribir una expresión equivalente que involucre el operador de forma de M en p, y justificar la equivalencia. Usar eso para definir (bien) la curvatura normal $\kappa_{n,p}(v)$ de M en p en la dirección $v \in T_pM$.

54. Mostrar que ninguna curva α en M de rapidez unitaria con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ se curva (en valor absoluto) menos que $|\kappa_{n,p}(v)|$.

55. Mostrar que si una curva α de rapidez unitaria parametriza una recta contenida en una superficie M con orientación n, entoces α es una línea asintótica.

56. Enunciar con precisión y demostrar la fórmula de Euler, que da las curvaturas normales de una superficie M en un punto p en coordenadas polares de T_pM.

57. Sea M una superficie regular, sea n una orientación de M y sea $p \in M$. Sea $v \in T_pM$ con $\|v\| = 1$ y sea P el plano normal a M por p en la dirección v. Mostrar que existe una curva suave $\beta : (a, b) \to M$ con $\beta(0) = p$ y trayectoria contenida en $P \cap M$.

58. Sea M una superficie regular con una orientación n. Sea $p \in M$ y sea $v \in T_pM$ con $\|v\| = 1$. Mostrar que existe una curva suave $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $a(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ y curvatura κ con $|\kappa_{n,p}(v)| = \kappa(0)$. (Dar por sabida la proposición anterior.)

59. Probar que si todos lo puntos de una superficie regular conexa M son umbílicos, entonces M está contenida en un plano o en una esfera. Hacerlo en tres pasos:

    Primer paso: Probar que la función curvatura principal k es constante en cada abierto coordenado conexo de M.

    Segundo paso: Mostrar que cada abierto coordenado conexo está contenido en un plano (si $k = 0$) o en una efera (si $k > 0$).

    Tercer paso: Sólo para el caso $k = 0$, mostrar que M está contenida en un (único) plano.

60. Sea M una superficie regular con orientación n. Definir el concepto de geodésica en M y mostrar que las geodésicas tienen rapidez constante.

61. Sea S la esfera de centro cero y radio 1. Mostrar que los círculos máximos de S recorridos con rapidez unitaria son geodésicas de S.

62. Sea M una superficie regular con orientación n y sea $\alpha : (a, b) \to M$ una curva de rapidez unitaria.

    a) Definir el marco móvil a lo largo de α asociado a la orientación n.

    b) Definir la curvatura geodésica $\kappa_{g,\alpha}(t)$ de α en M en el instante $t \in (a, b)$.

    c) Mostrar que $(\kappa_\alpha)^2 = (\kappa_{g,\alpha})^2 + (\kappa_{n,\alpha})^2$ y que α es geodésica si y sólo si $\kappa_{g,\alpha}$ es nula.

63. Sea S la esfera de centro cero y radio 1 con orientación $n(p) = p$. Calcular la curvatura geodésica del paralelo a altura sen v_o recorrido con rapidez unitaria.

64. Sea α una curva de rapidez unitaria en una superficie regular M. Definir la noción de campo en M a lo largo de α y definir campo paralelo a lo largo de α. Mostrar que un campo paralelo en M a lo largo de una curva de rapidez unitaria tiene norma constante.

65. Sea S la esfera de centro cero y radio 1 con orientación $n(p) = p$, y sea α una reparametrización por longitud de arco del paralelo a altura sen v_o. Encontrar un campo paralelo W en M a lo largo de α con $W(0) = \alpha'(0)$.

66. Escribir la ecuación diferencial para las coordenadas de una geodésica en una superficie M. Más precisamente, si $\varphi : U \to M$ es un sistema coordenado de M y $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ es una curva suave con trayectoria contenida en $\varphi(U)$, plantear un sistema de ecuaciones diferenciales en u y v que se satisfaga si y sólo si γ es geodésica.

67. Sean M y N dos superficies regulares, sea $f : M \to N$ una isometría local y sea γ una geodésica en M. Probar que $f \circ \gamma$ es geodésica en N. Sugerencia: Si la trayectoria de γ está contenida en el abierto coodenado $\varphi(U)$ y $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$, entonces u, v satisfacen la ecuación diferencial

$$\left\langle \varphi_u, \varphi_{uu}(u')^2 + 2\varphi_{uv}u'v' + \varphi_{vv}(v')^2 + \varphi_u u'' + \varphi_v v'' \right\rangle = 0$$

y otra similar con φ_v en vez de φ_u (por abuso de notación se escribió φ_u en vez de $\varphi_u(u, v)$, etc.).

68. Enunciar con precisión el Teorema Egregium de Gauss.

69. a) Enunciar el teorema referido a la existencia y unicidad de geodésicas.

    b) Mostrar que toda geodésica de la esfera S de centro cero y radio 1 tiene como trayectoria un arco de círculo máximo. (Dar por sabido que los círculos máximos de S recorridos con rapidez unitaria son geodésicas de S.)

70. Sea M una superficie regular y sea P un plano que intersecta a M en la trayectoria de una curva α de rapidez unitaria. Mostrar que si la reflexión respecto de P lleva M en M, entonces α es una geodésica de M.

71. Sea M una superficie regular conexa y sean p, q dos puntos de M.

    a) Definir la distancia $d(p, q)$ en M entre p y q.

    b) Sea P el plano $z = 0$ y sea $M = P - \{(0, 0, 0)\}$. Hallar dos puntos p y q de M para los cuales el inf que define $d(p, q)$ no es un mínimo. Dar por sabido el ejercicio del práctico que caracteriza las curvas regulares suaves a trozos en el plano que realizan la distancia entre dos puntos.

72. Enunciar dos teoremas que involucran geodésicas y la noción de distancia en una superficie regular.

73. Enunciar con precisión el Teorema de Clairaut y demostrarlo. Sugerencia: Para una superficie cualquiera, si la trayectoria de una curva γ está contenida en el abierto coordenado $\varphi(U)$ y $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$, entonces u, v satisfacen la ecuación diferencial

$$\tfrac{1}{2}E_u (u')^2 + E_v u'v' + \left(F_v - \tfrac{1}{2}G_u\right)(v')^2 + Eu'' + Fv'' = 0,$$

    donde E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental de φ (por abuso de notación se escribió E_u en vez de $E_u(u, v)$, etc.).

74. Sea M una superficie y sean $p \in M$ y $r > 0$. Se define $C_r(p) = \{q \in M \mid d(q, p) = r\}$. Sea S la esfera de radio R centrada en el origen, sea $p = (0, 0, R)$ el polo norte y sea $0 < r < \pi R$. Mostrar que $C_r(p)$ es una circunferencia de longitud $2\pi R \operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right)$ y que el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $r \mapsto \operatorname{long}(C_r(p))$ alrededor del origen es

$$2\pi r - \frac{2\pi}{3!} K(p)\, r^3.$$

75. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Escribir la definición de una métrica riemanniana conforme en U y explicitar el ejemplo del plano hiperbólico.