**1.** Sean $a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.

(b) Si $a \mid 1$ entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

(c) Si $a, b \neq 0$, $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.

(d) Si $a \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $a \mid b \cdot c$.

(e) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (bx + cy)$ para $x, y \in \mathbb{Z}$ arbitrarios.

(f) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid c$.

(g) Si $a \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $a^n \mid b^n$ para todo natural $n$ (más adelante veremos que si $a^n \mid b^n$ para *algún* natural $n$, entonces $a \mid b$).

**2.** Dados $b, c$ enteros, probar las siguientes propiedades:

(a) 0 es par y 1 es impar.

(b) Si $b \neq 0$ es par y $b \mid c$, entonces $c$ es par. (Por lo tanto, si $b$ es par, también lo es $-b$).

(c) Si $b$ y $c$ son pares, entonces $b + c$ también lo es.

(d) Si $b \neq 0$ es par y $b \mid 2$, entonces $b = 2$ ó $b = -2$.

(e) La suma de un número par y uno impar es impar.

(f) $b + c$ es par si y sólo si $b$ y $c$ son ambos pares o ambos impares.

(g) Probar que el producto de un número entero por su consecutivo es un número par.

(h) Dado un número entero $n$, probar que: $n$ es par si y sólo si $n^2$ es par.

**3.** Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que las siguientes afirmaciones son falsas dando un contraejemplo.

(a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

(b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

(c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.

(d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.

**4.** Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$:

(a) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c$ y $b \mid c$

(b) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$

(c) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a$ ó $2 \mid b$

(d) $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a$ ó $9 \mid b$

(e) $a \mid b \Rightarrow a \leq b$

(f) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

(g) $a \mid b$ y $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

(h) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

**5.** (a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

(b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

**6.** Hallar el cociente y el resto de la división de:

(a) 127 por 99. (b) -135 por 23. (c) 135 por -23. (d) -135 por -23.

**7.** Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de $m^2$ y $m^3$ en la división por 3 y por 11.

**8.** Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:

(a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

(b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

**9.** Determinar los enteros positivos $n$ tales que

(a) $n+7$ es divisible por $3n-1$.

(b) $n^2+5$ es divisible por $2n+1$

(c) $(n-2)(n^2-n-2)$ es divisible por $2n-1$.

(d) $n^2-7n+10$ es divisible por $n-3$

**10.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) Probar que si $a \neq b$, entonces $a-b \mid a^n-b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que si $n$ es un número natural impar y $a \neq -b$, entonces $a+b \mid a^n+b^n$.

(c) Probar que si $n$ es un número natural par y $a \neq -b$, entonces $a+b \mid a^n-b^n$.

**11.** Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) El producto de $n$ enteros consecutivos es divisible por $n!$

(b) $\displaystyle\binom{2n}{n}$ es divisible por 2.

(c) $\displaystyle 2^n \prod_{i=1}^{n}(2i-1)$ es divisible por $n!$

(d) $\displaystyle\binom{2n}{n}$ es divisible por $n+1$ (Sugerencia: probar que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$ y observar que $\binom{2n}{n} = (2n+2)\binom{2n}{n} - (2n+1)\binom{2n}{n}$).

## Ejercicios complementarios

**12.** Sean $n, m$ y $a$ números naturales, $a \neq 1$. Probar que si $r$ es el resto de la división de $n$ por $m$, entonces el resto de la división de $a^n-1$ por $a^m-1$ es $a^r-1$.

**13.** Sea $X$ un conjunto arbitrario de 20 números naturales. Probar que hay al menos dos elementos de $X$ cuya diferencia es divisible por 19.

**14.** Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ números enteros. Probar que existen índices $i, j$ con $1 \leq i \leq j \leq n$ tales que $\sum_{k=i}^{j} a_k$ es divisible por $n$. (Sugerencia: considere los restos en la división por $n$ de los $n$ números $a_1$, $a_1+a_2$, $a_1+a_2+a_3, \cdots, a_1+a_2+\cdots+a_n$.)