

PRÁCTICO 5

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DESARROLLO s -ÁDICO

Álgebra I
2021, FaMAF - UNC

1. Para cada uno de los siguientes pares de números calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados. Indicar en qué casos los números son coprimos entre sí.

(a) 8 y 23 (b) -11 y -15 (c) 606 y -108 . (d) -725 y 441.

2. Probar que si a, b son enteros coprimos entonces $(a + b, a - b) = 1$ ó 2 .

3. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Determinar los posibles valores de:

(a) $(a, a + 1)$, (b) $(a - 1, a + 1)$, (c) $(4a, 2a + 3)$.

4. Probar que si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a + b, 4) = 4$.

5. Sea $d = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \mid a$ y $n \mid b$. Probar que $\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = \frac{d}{n}$.

6. Sean a, b y c enteros tales que $(a, b) = 1$. Probar que:

- (a) Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
- (b) Si $a \mid b \cdot c$, entonces $a \mid c$.
- (c) Si $c \mid a$, entonces $(b, c) = 1$.
- (d) $(a \cdot c, b) = (c, b)$.
- (e) $(a \cdot b, c) = (a, c) \cdot (b, c)$.
- (f) Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $(a^n, b^m) = 1$.
- (g) $(a + b, ab) = 1$.

7. Sea n un entero no negativo. Probar que:

(a) $(7^n + 2^n, 7^n - 2^n) = 1$. (b) $(2^n + 5^{n+1}, 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9 .

8. Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $\frac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.

9. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

10. Expresar 1810 y 1816 en las bases 2 y 11.

11. Expresar en base 10 los siguientes enteros: $(1111)_2$ y $(1111)_{12}$.

12. Calcular las siguientes sumas expresándolas en la misma base.

(a) $(2234)_5 + (2310)_5$ (b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.

Ejercicios adicionales

13. Sea $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Probar que si el desarrollo en base 10 de a termina en k ceros entonces el desarrollo en base 5 de a termina en por lo menos k ceros.
14. ¿Cuáles son los números naturales más chico y más grande que se pueden escribir con exactamente n “dígitos” en base $d > 1$?
15. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = 5$.
- (a) Calcular los posibles valores de $(ab, 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.
 - (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $(a^{n-1}b, a^n + b^n)$.
16. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Calcular los posibles valores de:
- (a) $(2a^2 + 6a - 4, 2a^2 + 4a - 3)$.
 - (b) $(2a^2 + 3a - 1, 5a + 6)$.
 - (c) $(a^2 + 2, a^3 + 1)$.