

## PRÁCTICO 5

### MÁXIMO COMÚN DIVISOR DESARROLLO $s$ -ÁDICO

Álgebra I  
2021, FaMAF - UNC

1. Para cada uno de los siguientes pares de números calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados. Indicar en qué casos los números son coprimos entre sí.

(a) 8 y 23                      (b)  $-11$  y  $-15$                       (c) 606 y  $-108$ .                      (d)  $-725$  y 441.

2. Probar que si  $a, b$  son enteros coprimos entonces  $(a + b, a - b) = 1$  ó  $2$ .

3. Sea  $a \in \mathbb{Z}$ . Determinar los posibles valores de:

(a)  $(a, a + 1)$ ,                      (b)  $(a - 1, a + 1)$ ,                      (c)  $(4a, 2a + 3)$ .

4. Probar que si  $(a, 4) = 2$  y  $(b, 4) = 2$  entonces  $(a + b, 4) = 4$ .

5. Sea  $d = (a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , y sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \mid a$  y  $n \mid b$ . Probar que  $\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = \frac{d}{n}$ .

6. Sean  $a, b$  y  $c$  enteros tales que  $(a, b) = 1$ . Probar que:

- (a) Si  $a \mid c$  y  $b \mid c$ , entonces  $a \cdot b \mid c$ .
- (b) Si  $a \mid b \cdot c$ , entonces  $a \mid c$ .
- (c) Si  $c \mid a$ , entonces  $(b, c) = 1$ .
- (d)  $(a \cdot c, b) = (c, b)$ .
- (e)  $(a \cdot b, c) = (a, c) \cdot (b, c)$ .
- (f) Para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $(a^n, b^m) = 1$ .
- (g)  $(a + b, ab) = 1$ .

7. Sea  $n$  un entero no negativo. Probar que:

(a)  $(7^n + 2^n, 7^n - 2^n) = 1$ .                      (b)  $(2^n + 5^{n+1}, 2^{n+1} + 5^n) = 3$  ó  $9$ .

8. Probar que si  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces los números  $2n + 1$  y  $\frac{n(n+1)}{2}$  son coprimos.

9. Sea  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a > 1$  y sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Probar que  $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ .

10. Expresar 1810 y 1816 en las bases 2 y 11.

11. Expresar en base 10 los siguientes enteros:  $(1111)_2$  y  $(1111)_{12}$ .

12. Calcular las siguientes sumas expresándolas en la misma base.

(a)  $(2234)_5 + (2310)_5$                       (b)  $(10101101)_2 + (10011)_2$ .

## Ejercicios adicionales

13. Sea  $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Probar que si el desarrollo en base 10 de  $a$  termina en  $k$  ceros entonces el desarrollo en base 5 de  $a$  termina en por lo menos  $k$  ceros.
14. ¿Cuáles son los números naturales más chico y más grande que se pueden escribir con exactamente  $n$  “dígitos” en base  $d > 1$ ?
15. Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $(a, b) = 5$ .
- (a) Calcular los posibles valores de  $(ab, 5a - 10b)$  y dar un ejemplo para cada uno de ellos.
  - (b) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , calcular  $(a^{n-1}b, a^n + b^n)$ .
16. Sea  $a \in \mathbb{Z}$ . Calcular los posibles valores de:
- (a)  $(2a^2 + 6a - 4, 2a^2 + 4a - 3)$ .
  - (b)  $(2a^2 + 3a - 1, 5a + 6)$ .
  - (c)  $(a^2 + 2, a^3 + 1)$ .