1. Determinar todos los números primos positivos menores que 100.

2. Probar que si p es un número natural tal que p, $p+2$ y $p+4$ son primos impares, entonces $p = 3$. Es decir, $3, 5, 7$ es la única terna de números positivos impares consecutivos que son primos.

3. Sea p un primo positivo. Probar que $(p, (p-1)!) = 1$.

4. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, existe un número primo p tal que $n < p < n!$
Ayuda: pensar en cuáles primos dividen a $n! - 1$.

5. Hallar el menor múltiplo de 168 que es un cuadrado.

6. Sean a y b números naturales y coprimos. Probar que $a \cdot b$ es un cuadrado si y solo si a y b son cuadrados.

7. Si $(a, b) = p$ con p un número primo, hallar los posibles valores para

(a) (a^2, b) (b) (a^3, b) (c) (a^2, b^3)

8. Demostrar que no existen enteros no nulos m y n tales que $m^2 = 6n^2$. Deducir que $\sqrt{6}$ es irracional.

9. Demostrar que no existen enteros no nulos m y n tales que $m^3 = 47n^3$.

10. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Probar que:

(a) Si $a^n \mid b^n$ entonces $a \mid b$.

(b) Si $a > 0$ es tal que $\sqrt[n]{a}$ es un número racional, entonces $\sqrt[n]{a}$ es un número entero.

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un número primo, entonces $\sqrt[n]{p}$ no es un número racional.

12. (a) Calcular la cantidad de divisores positivos que tiene el número $19^3 47^{11} 79^6$.

(b) Deducir una fórmula para calcular la cantidad de divisores positivos del número $N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son primos distintos y $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$.

(c) Hallar el menor número natural que tiene exactamente 10 divisores positivos.

13. Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

(a) 12 y 15.
(b) 11 y 13.
(c) 140 y 150.
(d) $3^2 \cdot 5^2$ y $2^2 \cdot 11$.
(e) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 5 \cdot 7$.

14. Completar y demostrar:

(a) Si $a \in \mathbb{Z}$ no nulo, entonces $[a, a] = \ldots$

(b) Si a, $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $[a, b] = b$ si y sólo si ...

(c) Si a, $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $(a, b) = [a, b]$ si y sólo si ...

15. Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ son no nulos, entonces $(a + b, [a, b]) = (a, b)$.

16. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $28|n$ y $45|n$, entonces $n > 1000$.

(b) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $n^2 = 24m^3$.

(c) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $2n^2 = 3m^2$.

(d) 439 es un número primo.

(e) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $(n^2 - 1, n^3) = 1$.

(f) Si $n \in \mathbb{N}$ tiene una cantidad impar de divisores positivos entonces n es un cuadrado.

Ejercicios adicionales

17. Probar que 9973 es el mayor número primo de cuatro cifras.

18. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n - 1$ es un número primo. Probar que n es primo.

19. Probar que $p \mid \binom{p}{k}$ para todo primo positivo p y $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

20. Probar que el producto de dos enteros consecutivos no nulos no es un cuadrado.

21. (a) ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que divide a 100!?

(b) ¿En cuántos ceros termina el desarrollo decimal de 100!?

22. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\sqrt[n]{n}$ es un número irracional.