1. Demostrar las siguientes congruencias, aclarando las propiedades que usa en cada paso:

(a) $4! \equiv 4\,(5)$ (b) $36^5 \equiv -1\,(37)$ (c) $6^n + 8 \equiv 4\,(5)$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. (a) Calcular el resto de la división de 1599 por 39 sin realizar la división. (Ayuda: $1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1$).

(b) Lo mismo con el resto de 914 al dividirlo por 31.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que todo número de la forma $4^n - 1$ es divisible por 3.

4. (a) ¿Para cuáles valores de $n \in \mathbb{N}$ es $2^n + 1$ divisible por 3?

(b) ¿Para cuáles valores de $n \in \mathbb{N}$ es $10^n - 1$ divisible por 11?

5. Sean a, b, c números enteros, ninguno divisible por 3. Probar que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisible por 3.

6. (a) Probar que el resto de dividir n^2 por 4 es igual a 0 si n es par y 1 si n es impar.

(b) Probar que si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son números enteros, entonces las longitudes de los catetos no pueden ser ambas impares.

7. Probar que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el número $n^2 + 4n + 6$ no es múltiplo de 5.

8. (a) Probar las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11.

(b) Decir por cuáles de los números 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11 son divisibles los números 12342, 5176, 314573 y 899.

9. Hallar los restos posibles en la división de n^{15} por 3.

10. Hallar la cifra de las unidades y la de las decenas del número 7^{15}.

11. Hallar el resto en la división de x por 5 y por 7 para:

(a) $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$;

(b) $x = 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 71 \cdot 101$.

12. Hallar todos los x que satisfacen:

(a) $x^2 \equiv 1\ (4)$ (c) $x^2 \equiv 2\ (5)$ (e) $x^3 \equiv 1\ (7)$

(b) $x^2 \equiv x\ (12)$ (d) $x^2 \equiv 0\ (12)$ (f) $x^4 \equiv 1\ (5)$.

13. Sean m, n números enteros.

(a) Probar que $m^2 + n^2$ es múltiplo de 7 si y sólo si m y n son múltiplos de 7.

(b) Probar que $m^2 + 5n^2$ es múltiplo de 11 si y sólo si m y n son múltiplos de 11.

14. Sean a, b, $m \in \mathbb{Z}$, $d > 0$, tales que $d \mid a$, $d \mid b$ y $d \mid m$. Probar que x_0 es solución de la ecuación $a \cdot x \equiv b\,(m)$ si y sólo si x_0 es solución la ecuación

$$\frac{a}{d} \cdot x \equiv \frac{b}{d} \left(\frac{m}{d}\right).$$

15. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $2x \equiv -21 \ (8)$ (b) $2x \equiv -12 \ (7)$ (c) $3x \equiv 5 \ (4)$.

16. Resolver la ecuación $221\,x \equiv 85\ (340)$. Hallar todas las soluciones x tales que $0 \leq x < 340$.

17. Dado $t \in \mathbb{Z}$, decimos que t es *inversible módulo* m si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $th \equiv 1\,(m)$.

(a) ¿Es 5 inversible módulo 17?

(b) Probar que t es inversible módulo m si y sólo si $(t, m) = 1$.

(c) Determinar los inversibles módulo m, para $m = 11, 12, 16$.