1. Demostrar las siguientes afirmaciones a partir de las propiedades básicas, donde a, b, c y d son números reales:

(a) $0 + 0 = 0$ y $1 \cdot 1 = 1$.

(b) $a = b \iff a - b = 0$.

(c) $1 = 1^{-1}$ y $-1 = (-1)^{-1}$.

(d) Si $a \neq 0 \Longrightarrow a^{-1} \neq 0$.

2. Ídem Ejercicio 1. Recordar que si $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ denota al número real ab^{-1}.

(a) Si $b \neq 0 \Longrightarrow \frac{0}{b} = 0$.
(b) $\frac{b}{1} = b$.
(c) Si $b \neq 0 \neq d$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$.
(d) Si $b \neq 0 \neq d \Longrightarrow (\frac{b}{d})^{-1} = \frac{d}{b}$.
(e) Si $b \neq 0 \neq d \Longrightarrow \frac{a}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{b}$.

3. Ídem Ejercicio 1.

(a) Si $0 < a$ y $0 < b$, entonces $a < b \iff b^{-1} < a^{-1}$.
(b) $a + a = 0 \Longrightarrow a = 0$.
(c) $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$.

4. Sean a y b números reales. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $a \neq b \Longrightarrow a^2 + b^2 > 0$.
(b) Si $0 < a$ y $0 < b$, entonces $a < b \iff a^2 < b^2$.
(c) No existe un número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $x^2 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(b) $x^2 = x$, para algún $x \in \mathbb{R}$.
(c) Si a y b son reales, $a < b \iff a^2 < b^2$.
(d) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
(e) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
(f) $\forall a, b > 0$ tales que $a + b = 1$, $(\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1) = 1$.

6. Analizar la validez de la siguiente demostración.

Teorema: *Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = 0$.*
Demostración:
$a^2 = a^2 \Longrightarrow a^2 - a^2 = a^2 - a^2 \Longrightarrow (a - a)(a + a) = a(a - a) \Longrightarrow a + a = a \Longrightarrow a = 0.$

7. (a) Sean $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que $\frac{a}{b} \geq 4 - \frac{4b}{a}$
(b) Probar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.
(c) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$.
(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que $x < 1 < y$. Probar que $xy + 1 < x + y$.

8. (a) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, probar que $x < \alpha x + (1 - \alpha)y < y$ si y sólo si $0 < \alpha < 1$.
(b) Probar además que si $x < z < y$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, tal que $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$.

9. Decidir si la desigualdad $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ es válida en cada uno de los siguientes casos:

(a) $a, b \geq 0$, (b) $a, b < 0$, (c) $a < 0 < b$.

Ejercicios complementarios

10. Demostrar las siguientes afirmaciones a partir de las propiedades básicas, donde a, b, c y d son números reales:

(a) Si $a \neq 0 \Longrightarrow -a \neq 0$.
(b) $a \cdot 0 = 0$.
(c) Si $a \neq 0 \Longrightarrow a = (a^{-1})^{-1}$.
(d) Si $a \neq 0 \Longrightarrow a^{-1} \neq 0$ y $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.
(e) Si $b \neq 0 \Longrightarrow -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ y $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.
(f) Si $b \neq 0 \neq d \Longrightarrow \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.
(g) Si $b, c, d \neq 0 \Longrightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.
(h) Si $b \neq 0 \neq d$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.

11. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $0 \neq a \in \mathbb{R} \Longrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$. Probar que vale la igualdad si y sólo si $a = 1$ o $a = -1$.
(b) No existe ningún $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq z$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(c) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ y $ab = 1$ entonces $a + b \geq 2$. Probar que vale la igualdad si y sólo si $a = b = 1$.

12. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $x^2 = x$ para exactamente un $x \in \mathbb{R}$.
(b) $(a + b)^2 \geq a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
(c) Existe $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
(d) $a, b \in \mathbb{R}$, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 \Longleftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$.
(e) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}$.

13. Analizar la validez de la siguiente demostración.

<u>Teorema:</u> *Todo número real es positivo.*
<u>Demostración:</u> $0 < 1 \Longrightarrow 0 \cdot a < 1 \cdot a \Longrightarrow 0 < a$.

14. (a) Sean $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que $\frac{a^3}{b^3} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + 1 \geq 0$.
(b) Probar que si $a \neq 0 \neq b$ y $a + b = 1$, entonces $(\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1) = 1$.
(c) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ positivos. Probar que si $a+b+c = 1$, entonces $(\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1)(\frac{1}{c} - 1) \geq 8$.
(d) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ positivos tales que $xyz = 1$. Probar que $x + z + y \geq 3$.
[Ayuda: notar que $x = y = z = 1$, o uno de ellos es mayor que 1 y otro menor que 1. Usar entonces el Ejercicio 7 (d).]

15. Un subconjunto A de los números reales se dice *convexo* si para todo par de elementos $x, y \in A$, $x < y$, y todo $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$ se tiene $z \in A$.
Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son convexos:

(a)$\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 4\}$, (b)$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 12\}$, (c)$\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 12\}$, (d)$\{x \in \mathbb{R} : x^3 < x\}$.