1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$. Graficar el resultado.

(a) $(-1+i)(3-2i)$

(b) $i^{131} - i^9 + 1$

(c) $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{i}}$

(d) $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Si $z_1,\, z_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.

(b) Si $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.

3. Dibujar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = z\}$

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = -z\}$

(iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z = 1\}$

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3\operatorname{Re}(z) - 1 = 2\operatorname{Im}(z)\}$

(v) $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

(vi) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z - 1 + i| \leq 3\}$

4. Determinar el módulo, el argumento, el conjugado y el inverso de los siguientes números complejos:

(a) -1

(b) $5 + 5i$

(c) $i - \sqrt{2}\, i$

(d) i^{17}

(e) $\left(\frac{2-i}{i-2}\right)^{18}$

(f) $\frac{2}{1-\sqrt{3}\, i}$

(g) $1 + i$

(h) $-1 - i$

(i) $2 + 3i$

(j) $-\sqrt{3} + i$

(k) $(1+i)^{-1}$

(l) $1 - \sqrt{3}$

(m) $-\cos(\frac{17\pi}{5}) + i\operatorname{sen}(\frac{17\pi}{5})$

(n) $(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^{-1}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

5. Interpretar geométricamente en el plano complejo la conjugación y la multiplicación por i.

6. Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\overline{z}^n = \overline{z^n}$ y $|z^n| = |z|^n$.

7. Calcular las raíces n-ésimas de la unidad para $n = 4$, 5 y 6, y expresarlas de la forma $a + ib$. Para $n = 5$ usar que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Graficar.

8. Resolver las siguientes ecuaciones, y escribir cada una de las soluciones en la forma polar $r\,(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, y en la forma cartesiana $a + bi$, con $a,\, b \in \mathbb{R}$.

(a) $z^3 = -i$

(b) $z^4 = 6 + 6i$

(c) $2z^2 + 2z + 13 = 0$

(d) $z^2 = 1 - i$

(e) $z^4 + 3z^2 = -9$

(f) $z^4 + iz^2 + 4 = 0$

Ejercicios complementarios

En los siguientes ejercicios se estudia en más detalle el conjunto de raíces n-ésimas de la unidad, para algún $n \in \mathbb{N}$. Se usará la notación:

$$G_n := \{\text{raíces } n\text{-ésimas de la unidad}\} = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\pi k i}{n}} \,:\, 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que:

(a) Si $z, w \in G_n$ entonces $zw \in G_n$.

(b) $1 \in G_n$.

(c) Si $z \in G_n$ entonces $z^{-1} \in G_n$.

Este ejercicio dice que G_n, con la multiplicación de los números complejos, es un grupo. Más aún, es abeliano, pues el producto en $\mathbb{C}$ en conmutativo.

10. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $z \in G_n$. Entonces:

(a) $|z| = 1$,

(b) $z^{-1} = \overline{z}$,

(c) $-1 \in G_n \Leftrightarrow n$ es par,

(d) Si $m \in \mathbb{Z}$ es divisible por n entonces $z^m = 1$,

(e) Si $r, s \in \mathbb{Z}$ satisfacen $r \equiv s\,(n)$ entonces $z^r = z^s$. En particular, $z^{-1} = \overline{z} = z^{n-1}$.

11. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que:

(a) $n \mid m \Rightarrow G_n \subset G_m$,

(b) $G_n \cap G_m = G_{(n,m)}$,

(c) $G_n \subset G_m \Leftrightarrow n \mid m$.

12. Para cada $n \in \mathbb{N}$, probar que existe $z \in G_n$ tal que

$$G_n = \{z^0, z^1, z^2, \dots, z^{n-1}\} = \{z^k \mid 0 \le k \le n-1\}.$$

Definición: Una raíz n-ésima de la unidad $w \in G_n$ se dice *primitiva* si

$$G_n = \{w^k \mid 0 \le k \le n-1\}.$$

13. (a) Si $w \in G_n$ es primitiva y $0 \le j, k \le n-1$ probar que: $w^j = w^k \Leftrightarrow j = k$.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathbb{C}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad,

(ii) para $m \in \mathbb{Z}$, vale que: $w^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$.

14. (a) Sean $w \in G_n$ una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $k \in \mathbb{N}$. Probar que w^k es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n, k) = 1$.

(b) Sea $w_k = \mathrm{e}^{\frac{2\pi k i}{n}}$ con $0 \le k \le n-1$. Probar que w_k es primitiva si y sólo si $(n, k) = 1$.

(c) Probar que si $p \in \mathbb{N}$ es primo entonces toda raíz p-ésima de la unidad (distinta de la unidad) es primitiva.

15. De las raíces n-ésimas de la unidad calculadas en el ejercicio 7 (para $n = 4$, 5 y 6), determinar cuáles son las primitivas.

16. Dado un número primo $p \in \mathbb{N}$, probar que:

(a) La suma de las raíces p-ésimas primitivas de la unidad es -1.

(b) La suma de las raíces p^2-ésimas primitivas de la unidad es 0.

(c) Si q es un número primo distinto de p, entonces la suma de las raíces pq-ésimas primitivas de la unidad es 1.