FAMAF

Funciones Complejas

Período | 2021-II

Práctico 1

Números Complejos

Ej. 1 Escribir los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ y dibujarlos en el plano.

1. $(-1+i)(3-2i)$
2. $\frac{3+i}{3-4i} - \frac{2-i}{8i}$
3. $\frac{1}{(1-i)(2-i)}$
4. $i^{13} - i^9 + 1$
5. $(1-i)^4$
6. $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{i}}$
7. $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right)$
8. $\left(\frac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$
9. $3i^{11} + 6i^3 + \frac{8}{i^{20}} + i^{-1}$.

Ej. 2 Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Probar que:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
4. $|\overline{z}| = |z|$
5. $z\overline{z} = |z|^2$
6. $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$, $\forall z \neq 0$
7. $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
8. $|z| \geq |\mathfrak{Re}(z)|$ y $|z| \geq |\mathfrak{Im}(z)|$
9. $z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$.
10. $z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$.
11. Si z es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $\overline{z}$ también lo es.

Ej. 3 (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se da si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Ej. 4 Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|$$

Ej. 5 Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si $z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.
2. Si $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.

Ej. 6 Sea z un complejo no nulo. Recordar que se define el *argumento principal* de z, denotado por $\mathrm{Arg}(z)$, como el único ángulo θ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Recordar también que, dado $n \in \mathbb{N}$, se define la *raíz n-ésima principal* de z, denotada por $\sqrt[n]{z}$, como el número complejo $\sqrt[n]{|z|}(\cos(\mathrm{Arg}(z)/n) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)/n))$. Dar ejemplos de que no necesariamente es verdad que $\sqrt[n]{zw}$ es igual a $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$.

Ej. 7 Determinar el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

1. $65 + 72i$
2. $\sqrt{3} - i$
3. $-1 + i$
4. $-1 - \sqrt{3}i$
5. $\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi)$
6. $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$,
7. $z = \dfrac{i}{-2-2i}$,
8. $z = (\sqrt{3} - i)^6$.
9. $(1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta))^{-1}$, $0 \leq \theta < \pi$.
10. $\sin(\theta) - i\sin(\theta)$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$.

El valor de sin y cos de algunos ángulos puede expresarse en términos de la operación raíz cuadrada y las operaciones elementales. Tales ángulos están relacionados con *ángulos centrales* de polígonos regulares que pueden construirse con *regla y compas* (ver Teorema de Gauss-Wantzel). Se puede consultar algunos de estos valores en Wikipedia: Trigonometric constants expressed in real radicals.

Ej. 8 Sean $w_0 \in \mathbb{C}$ y R un real positivo. Dibujar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = z\}$

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = -z\}$

(iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z = 1\}$

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3\operatorname{Re}(z) - 1 = 2\operatorname{Im}(z)\}$

(v) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-i|\}$

(vi) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z-3|}{|z+3|} = 2\}$

(vii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\overline{z} - i| = 2\}$

(viii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w_0}) + |w_0|^2 = R^2\}$

(ix) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| + |z-3| = 10\}$

(x) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \overline{z}^2 = 2\}$

(xi) $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

(xii) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z - 1 + i| \leq 3\}$

(xiii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Arg}(z-i)| < \pi/6\}$

(xiv) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Arg}(iz+1)| = \pi/3\}$

Ej. 9 Probar, usando completación del cuadrado, que las soluciones de la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b, c son números complejos y $a \neq 0$ son dadas por la *fórmula cuadrática*: $z = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

Ej. 10 Resolver las siguientes ecuaciones escribiendo cada una de las soluciones en la forma polar $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, y en forma cartesiana $a + bi$, con a, $b \in \mathbb{R}$, sin que a y b estén escritos en términos de sin y cos.

1. $z^2 = 1 - i$
2. $2z^2 + 2z + 13 = 0$
3. $2z^2 - (2+5i)z - 2 + i = 0$
4. $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$
5. $z^2 = 4 - 3i$
6. $z^3 = 8i$
7. $z^3 = -i + 1$.
8. $z^4 - 6 - 6i = 0$
9. $z^4 + 3z^2 + 9 = 0$
10. $z^4 + iz^2 + 2 = 0$
11. $z^4 + z^2 + 1 = 0$
12. $z^{12} + z^6 + 1 = 0$.

[Hint: Notar $\sin(\frac{1}{12}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi)$, $\sin(\frac{1}{8}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})$]

Ej. 11 Dar todas las soluciones de la ecuación $z^4 + (-4+2i)z^2 - 1 = 0$ en forma cartesiana

Ej. 12 Sea c un número real en el intervalo $[-1, 1]$. Mostrar que las soluciones de la ecuación $z^2 - 2cz + 1 = 0$ tienen módulo 1.

Ej. 13 Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

1. $iz + 2\overline{z} = 1 + 2i$
2. $z = \overline{z}^3$
3. $iz^2 + \overline{z}z^{-1} = 0$
4. $\overline{z}^4 + |z|z^2(1-i) = 0$
5. $\sqrt{z^2} = -z$
6. $\sqrt{z/\overline{z}} = z/|z|$.

Ej. 14 1. Sea θ un ángulo y $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función que a un punto $p = (x, y)$ lo rota θ al rededor del origen. Mostrar que R es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ y la matriz de R con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. ¿Qué significado tiene multiplicar complejos? Sea $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Mostrar que multiplicar un número complejo w por z es rotar a w en el plano complejo un ángulo θ al rededor del origen.

Ej. 15 (Opcional) Sean $W = (w_1, \ldots, w_n)$ y $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ dos n-tuplas en $\mathbb{C}^n$ y considere el *producto interno Hermitiano* usual de $\mathbb{C}^n$:

$$\langle Z, W\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

La desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz dice que

$$|\langle Z, W\rangle|^2 \leq \langle Z, Z\rangle \cdot \langle W, W\rangle = ||Z||^2 \cdot ||W||^2$$

y la igualdad se da si y solamente si W y Z son linealmente dependientes sobre $\mathbb{C}$ (esencialmente el teorema de Pitágoras). ¿Qué tan lejos está $|\langle Z, W\rangle|^2$ de $||Z||^2 \cdot ||W||^2$? Probar la *identidad de Lagrange*

$$|\langle Z, W\rangle|^2 + ||Z \wedge W||^2 = ||Z||^2 \cdot ||W||^2$$

donde el número $||Z \wedge W||^2$ es

$$\sum_{1 \leq k < j \leq n} |z_k w_j - z_j w_k|^2.$$

[Hint: Una forma es estudiar la identidad de Binet-Cauchy.]

Ej. 16 Clasificar cada uno de los siguientes conjuntos como abiertos, cerrados o ninguno, hallar la clausura de estos y dibujarlas.

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{Re}(z)| + |\mathfrak{Im}(z)| \leq 1\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid -\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{Re}(z)| < |z|\}$
5. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(\frac{1}{z}) \leq \frac{1}{2}\}$
6. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4| \geq |z|\}$
7. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z^2) > 0\}$
8. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z) \in \mathbb{Q}\}$

Ej. 17 Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ o } |z - 2| < 1\}$ y $B = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z) \in \mathbb{Q}\}$. Mostrar que A no es conexo y que B es conexo.

Ej. 18 Sean $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{Q}$. Determinar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

1. $\{1, -1, i, -i\}$
2. $\{\frac{i^n}{n} \mid n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$.
3. $\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1 + i) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\{i^{n!} + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. $\{\sqrt[n]{z} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
6. $\{(\cos(2r\pi) + i\sin(2r\pi))^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ej. 19 Sean w_1 y w_2 dos números complejos distintos y $r \in \mathbb{R}_+$. Usar GeoGebra para estudiar el lugar geométrico

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z - w_1|}{|z - w_2|} = r \right\}$$

y si corresponde a una figura geométrica conocida, demostrar la igualdad entre estos.

Ej. 20 Dado $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathbb{C}$, usar GeoGebra para dibujar las n raíces n-ésimas de w

Ej. 21 Sea w un número complejo de módulo 1 y $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde

$$\begin{cases} a_1 = w, \\ a_{n+1} = (a_n + a_n^{-1})/2, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}.$$

Por medio de GeoGebra, conjeturar la forma de los puntos de acumulación del conjunto A y posteriormente dar una demostración de lo observado.

Ej. 22 El conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$ se define como el subconjunto de los números complejos c tal que la sucesión $\{z_n\}$ es acotada donde

$$\begin{cases} z_1 = c, \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. $\mathcal{M}$ es acotado: Probar que si $|c| > 2$ entonces $|z_n| \geq 2^n |c|$.
2. Criterio de escape: Sea $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| \leq 2$ y $|z_k| > 2$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces c no pertenece a $\mathcal{M}$.
   [Hint: Una forma podría ser mostrando que $|z_m| > 2$ y $2|z_m| - |c| < |z_{m+1}|$ para todo $m \geq k$. Notar que lo último implica que la sucesión $|z_m|$ es creciente a partir de k].
3. Usar GeoGebra para visualizar una aproximación al conjunto de Mandelbrot.