FAMAF

Funciones Complejas
Período | 2021-II
Práctico 4

Ej. 1 Demostrar las siguientes igualdades:

1. $\exp(2-3\pi i) = -e^2$,
2. $\exp(\frac{2+i\pi}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1+i)$,
3. $\exp(z+\pi i) = -\exp z$.

Ej. 2 Hallar los valores de z que satisfacen:

1. $e^z = -2$,
2. $e^z = 1+\sqrt{3}i$,
3. $e^{2z-1} = 1$,
4. $|e^{(-2z)}| < 1$,
5. $\mathrm{Re}(e^z) = 0$,
6. $\mathrm{Im}(e^z) = 0$,

Ej. 3 Verificar que $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ y mostrar que $f(z) = \exp(\overline{z})$ no es analítica en ningún punto.

Ej. 4 Sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$ constantes. Graficar la imagen por exp de los siguientes conjuntos:

1. $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) = a\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathfrak{Re}(z) \leq b\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) = c\}$,
4. $\{z \in \mathbb{C} : c \leq \mathfrak{Im}(z) \leq d\}$,
5. $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathfrak{Re}(z) \leq b \text{ y } c \leq \mathfrak{Im}(z) \leq d\}$,
6. La recta $\mathfrak{Im}(z) = a\,\mathfrak{Re}(z)$, $(a \neq 0)$.

Ej. 5 Sea r un real positivo y sea $A = \{\omega \mid \omega = \exp(1/z),\ 0 < |z| < r\}$. Determinar el conjunto A.

Ej. 6 Sean a y b números reales, con $|a| \leq 1$ y $b > 0$. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

1. $\cos(z) = a$,
2. $\tan(z) = b$,
3. $\cos(z) = 2$,
4. $\cos(z) = 0$,
5. $\sin(z) = \frac{12}{5}i$,
6. $\sin(z) = i$,
7. $\sin(z) = \cos z$,
8. $\sin(\sin(z)) = 0$,
9. $\sin(z) + \cos(z) = i$,
10. $\sin(z) = \cosh(4)$,
11. $\cosh(z) = i$,
12. $\sinh(z) = \mathrm{Log}(-1)$,
13. $\cosh(z) = 1/2$,
14. $\cosh(z) = -2$,
15. $2\cosh(z) + \sinh(z) = i$.

Ej. 7 Sean z y w en $\mathbb{C}$ arbitrarios. Demostrar las siguientes identidades:

1. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$,
2. $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$
3. $\sin(\pi/2 - z) = \cos z$,
4. $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$,
5. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,
6. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.
7. $\sinh(-z) = -\sinh(z)$
8. $\sinh(iz) = i\sin(z)$
9. $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
10. $\cosh^2(z) + \sinh^2(z) = \cosh(2z)$
11. $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$.
12. $\coth(2z) = \frac{1}{2}(\tanh(z) + \coth(z))$

Funciones Elementales

Ej. 8 Considere la función $f(z) = \sin z$, y la región del plano complejo dada por

$$B = \{z = x + iy : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ y \geq 0\}.$$

1. Verificar que f manda la frontera de B inyectivamente sobre el eje real $\mathrm{Im}(z) = 0$.
2. Calcular y graficar las imágenes por f de una semirrecta vertical $x = c$, $y \geq 0$, interior a la banda $\{x + iy : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$.
3. Probar que f manda B inyectivamente en la clausura del semiplano superior.
4. ¿Cuál es la imagen por f de una región rectangular $-\pi \leq x \leq \pi$, $a \leq y \leq b$ ubicada en el semiplano superior?

Ej. 9 Mostrar que:

1. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $|\sinh(y)| \leq |\cos(z)|, |\sin(z)| \leq \cosh(y)$ donde $y = \mathfrak{Im}(z)$,
2. Para todo $z \in \mathbb{C}$, $|\sin(z)|^2 + |\cos(z)|^2 \geq 1$,
3. Si $\mathfrak{Im}(z) \geq 1$, $|\csc(z)| \leq 2e/(e^2 - 1)$.
4. Si $\mathfrak{Im}(z) \geq b > 0$, $|\tan(z)|^2 \leq 1 + 1/(\sinh(b))^2$.

¿Puede mejorar las cotas anteriores?

Ej. 10 La función *seno cardinal*, denotada por $\mathrm{sinc}(z)$, es la función definida sobre todo el plano complejo por:

$$\mathrm{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ 1, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

1. Demostrar que dicha función es analítica.
2. Mostrar que para todo z en la circunferencia con centro en cero y radio r satisface

$$|\mathrm{sinc}(r) - 1| \leq |\mathrm{sinc}(z) - 1| \leq |\mathrm{sinc}(ir) - 1|,$$
$$|\mathrm{sinc}(r)| \leq |\mathrm{sinc}(z)| \leq |\mathrm{sinc}(ir)|.$$

Ej. 11 Sea Log el logaritmo principal. Verificar que:

1. $\mathrm{Log}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$,
2. $\mathrm{Log}(1 - i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i$,
3. $\mathrm{Log}[(1 + i)^2] = 2\,\mathrm{Log}(1 + i)$,
4. $\mathrm{Log}[(-1 + i)^2] \neq 2\,\mathrm{Log}(-1 + i)$.

Ej. 12 Usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann polares para probar que Log es analítica en $\mathbb{C} - \ell$, donde ℓ es el semieje de los reales no positivos.

Ej. 13 Considerando valores principales de las potencias, verificar $\overline{\mathrm{Log}(z)} = \mathrm{Log}(\overline{z})$ y $\overline{z^\lambda} = \overline{z}^{\overline{\lambda}}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \ell$ donde ℓ es el semieje de los reales no positivos.

Ej. 14 Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$ y sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(z) = \mathrm{Log}(z^2 + 1)$. Mostrar que f es inyectiva, dar la imagen de f y encontrar la función inversa f^{-1}.

Ej. 15 Verificar que $\mathrm{Log}(1-z^2)$ es igual a $\mathrm{Log}(1-z)+\mathrm{Log}(1+z)$ cuando $|z| < 1$. ¿Qué puede decir sobre $\mathrm{Log}((1-z)/(1+z))$ cuando $|z| < 1$.

Ej. 16 Considerando valores principales de las potencias, dar un ejemplo de z y λ tal que $\mathrm{Log}(z^\lambda) \neq \lambda \mathrm{Log}(z)$. Asumiendo que λ es un número real positivo, determinar todos los números complejos z tales que $\mathrm{Log}(z^\lambda) = \lambda \mathrm{Log}(z)$.

Ej. 17 Probar que para todo par de complejos z_1 y z_2 no nulos se cumple la identidad

$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 + 2N\pi i,$$

con $N \in \{-1, 0, 1\}$. Probar que si z_1 y z_2 pertenecen al primer cuadrante entonces $N = 0$.

Ej. 18 Considerando valores principales de las potencias, mostrar que la ley de los exponentes $z^\lambda z^\mu = z^{\lambda+\mu}$ es valida para todo número complejo z diferente de cero y cualquier par de complejos λ y μ. Dar un ejemplo de números complejos z, λ y μ para los cuales no valga que $(z^\lambda)^\mu$ sea igual a $z^{\lambda\mu}$.

Ej. 19 Considerando valores principales de las potencias, resolver:

1. $1^{(1-i)}$.
2. $(1-i)^{4i}$
3. $(1+i)^i$,
4. $(1+i)^{1-i}$
5. $(-1)^{1/\pi}$,
6. $(-1)^i$,
7. $(-1)^{1/n}$, $n \in \mathbb{Z}$,
8. i^{-i},
9. $(-i)^i$
10. i^{i^i},
11. $i^{\sqrt{2i}}$,
12. $i^{\mathrm{Log}(i)}$,
13. $(-e)^{\pi i}$,
14. $(ie^{\pi/2})^i$,
15. 2^{i+1},
16. $\mathrm{Log}(i)(\sqrt{i})$,
17. $\mathrm{Log}(i)(-e^2)$,
18. $\mathrm{Log}(i)(1-i\sqrt{3})$,
19. $(\sqrt{3}+i)^{6-i}$,
20. $(-\frac{e}{2}(1+\sqrt{3}i))^{3\pi i}$.

Ej. 20 Analice las propiedades del mapeo $f(z) = \exp(i\,\mathrm{Log}(1-z))$

Ej. 21 Sean $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Re}(z)| < \pi/2$, o $\mathfrak{Re}(z) = -\pi/2$ y $\mathfrak{Im}(z) \geq 0$, o $\mathfrak{Re}(z) = \pi/2$ y $\mathfrak{Im}(z) \leq 0\}$ y $T = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \mathfrak{Re}(z) \leq \pi/2$ y $z \neq \pi/2\}$. Recordar que se definen respectivamente las funciones *arco seno principal* y *arco tangente principal* denotadas por $\mathrm{Arcsin} : \mathbb{C} \to S \subseteq \mathbb{C}$ y $\mathrm{Arctan} : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to T \subseteq \mathbb{C}$ como las funciones tales que $\mathrm{Arcsin} \circ \sin = \mathrm{Id}_S$ y $\mathrm{Arctan} \circ \tan = \mathrm{Id}_T$. Probar la buena definición de dichas funciones y mostrar que

$$\mathrm{Arcsin}(w) = i\,\mathrm{Log}\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right),$$
$$\mathrm{Arctan}(w) = -\tfrac{i}{2}\,\mathrm{Log}\left(\tfrac{1+iw}{1-iw}\right).$$

Ej. 22 Mostrar que $f(z) = \cos(\sqrt{z})$ define una función analítica sobre $\mathbb{C}$. ¿Qué puede decir de la función $f(z) = \sin(\sqrt{z})$?

Ej. 23 Resolver:

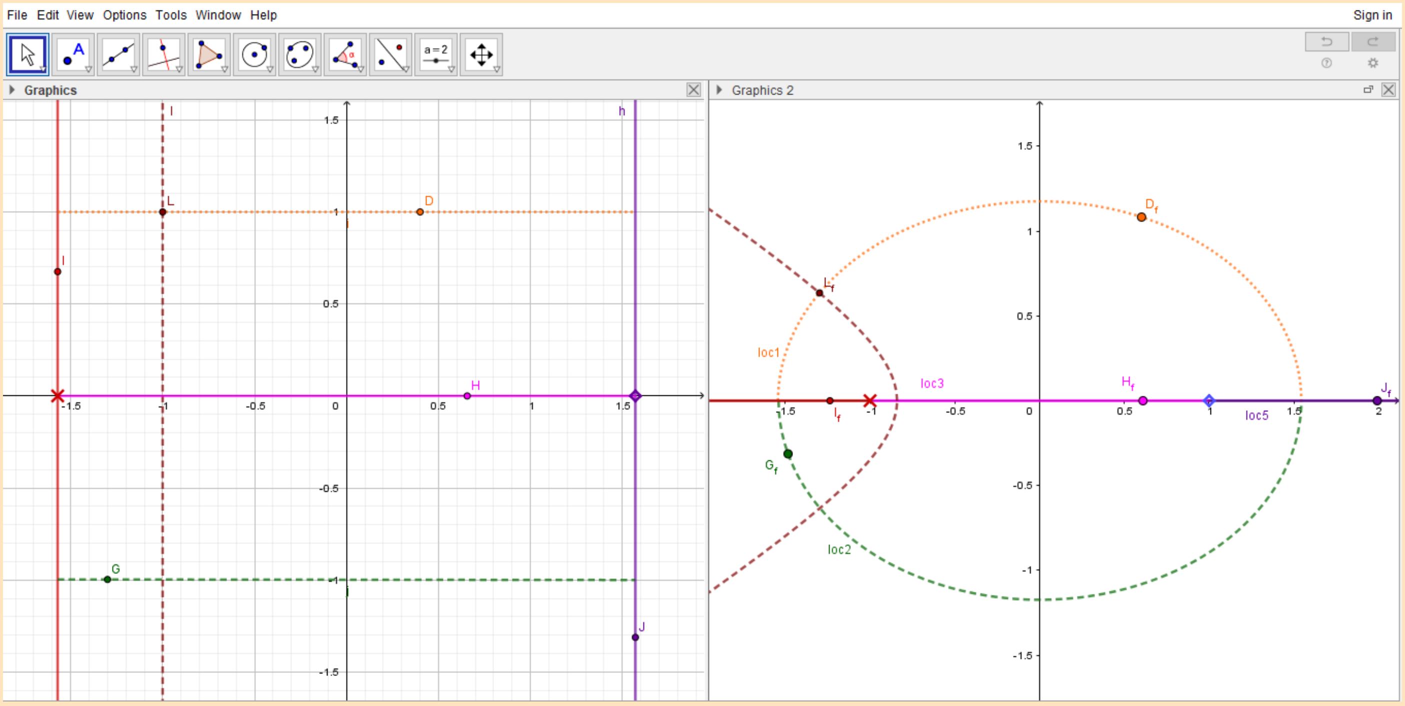
1. $\lim_{z\to 0} \exp(1/z^2)$,
2. $\lim_{z\to 0} \dfrac{1-\exp(iz)}{z}$
3. $\lim_{z\to 0} z\,\mathrm{Log}(z)$
4. $\lim_{z\to 1} \dfrac{\mathrm{Log}(z)}{z-1}$
5. $\lim_{z\to 1} \dfrac{\mathrm{Log}(z^2)}{z-1}$,
6. $\lim_{z\to 0} z^2 \sin(1/z)$,
7. $\lim_{z\to i} (z^4-1)\csc(z^2+1)$
8. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sinh(z)}{z}$,
9. $\lim_{z\to z} \dfrac{\cosh(z)-1}{z}$,
10. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sinh(z)}{\sin(z)}$,
11. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sin(6z)}{\sin(2z)}$,
12. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sin(z)}{z+\tan z}$,

Ej. 24 (Método Babilónico de la raíz cuadrada)

Sea ϖ un complejo no nulo. Se quiere dar una sucesión que se aproxime a $\sqrt{\varpi}$. Sea z_0 un complejo tal que z_0^2 es linealmente independiente con ϖ sobre $\mathbb{R}$ (pues en otro caso se puede obtener a $\sqrt{\varpi}$ de forma explícita). Definir la sucesión recursiva $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + \varpi/z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Recordar la identidad $\coth(2v) = \frac{1}{2}(\coth(v) + 1/\coth(v))$.
2. Mostrar que z_0 puede escribirse como $\sqrt{\varpi}\coth(u)$ para algún $u \in \mathbb{C}$ con $\mathfrak{Re}(u) \neq 0$.
3. Mostrar que una fórmula explícita de la anterior sucesión está dada por $z_n = \sqrt{\varpi}\coth(2^n u)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
4. Deducir de lo anterior que la sucesión $\{z_n\}$ es convergente y converge a signo$(\mathfrak{Re}(u))\sqrt{\varpi}$.
5. Dado ϖ, usar GeoGebra para visualizar la anterior sucesión y su convergencia.

Ej. 25 Usar GeoGebra para visualizar la imagen de rectas y circunferencias de las funciones elementales.



Funcion trigonométrica $f(z) = \sin(z)$