FAMAF

Funciones Complejas

Período | 2021-II

Práctico 5

Ej. 1 Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt,$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2ti}\, dt.$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{t-i}$
4. $\displaystyle\int_2^3 \frac{3+i(5-2t)}{5+i(5-2t)}dt$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{2e^{it}-1}dt$
6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} ie^{it}\sqrt{e^{it}}dt$
7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{1+4e^{2it}}dt$
8. $\displaystyle\int_0^{e^{\pi}} \exp(i\,\mathrm{Log}(t))dt$

Ej. 2 Mostrar que si m y n son enteros, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Ej. 3 Calcular $\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z}\, dz$, donde C es:

1. la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$,
2. la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$,
3. la circunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
4. la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

Ej. 4 Sea $\gamma : [0, \pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma(t) = te^{it}$. Evaluar

1. $\int_\gamma z dz,$
2. $\int_\gamma \overline{z} dz,$
3. $\int_\gamma |z| dz,$
4. $\int_\gamma \sqrt{z} dz.$

Ej. 5 Sea C la circunferencia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$, recorrida en sentido antihorario. Mostrar que

1. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$
2. $\displaystyle\int_C (z - z_0)^{n-1}\, dz = 0 \;\; (n \in \mathbb{Z} - \{0\}).$

Ej. 6 (Opcional) Sea $w : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continua. Demostrar que

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|dt.$$

Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua y sea $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to U \subseteq \mathbb{C}$ una curva suave. Supongamos que M es una cota superior de $|f \circ \gamma|$. Usar el resultado anterior para deducir (la *ML inequality*) que

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M\,\mathrm{Longitud}(\gamma).$$

Integración Compleja

Ej. 7 Sea C el arco de la circunferencia $|z| = 2$ que yace en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, mostrar que

1. $\left|\int_C \frac{z-2}{z^4+1}dz\right| \leq \frac{4}{15}\pi$,
2. $\left|\int_C \frac{dz}{z^2-1}\right| \leq \frac{1}{3}\pi$,
3. $\left|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \leq \frac{6}{7}\pi$.

Ej. 8 Sea r un real positivo y $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma(t) = re^{it}$. Verificar que

$$\left|\int_\gamma e^{iz^2} dz\right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}.$$

Ej. 9 Sea $\gamma : [0, \pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma(t) = e^{1+it}$. Verificar que

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{\mathrm{Log}(z)}dz\right| \leq e\,\mathrm{Ln}(\pi + \sqrt{\pi^2+1})$$

Ej. 10 Sean a y b números reales, $a < b$. Dado c un número real, sea γ la curva definida por el segmento que une a $w_0 = c + ia$ y $w_1 = c + ib$; es decir, $\gamma : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ está definida por $\gamma(t) = (1 - t)w_0 + tw_1$ y considerar la integral

$$I(c) = \int_\gamma e^{-z^2} dz.$$

Acotar $|I(c)|$ de forma apropiada para concluir que $I(c)$ tiende a 0 cuando c tiende a $\pm\infty$.

Ej. 11 Sea r un real positivo y $\gamma_r : [0, \pi] \subseteq\to \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Considerar la integral

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz.$$

Mostrar que $I(r)$ tiende a 0 cuando r tiene a ∞ mientras que $I(r)$ tiende a πi cuando r tiende a cero.

Ej. 12 Mostrar, con ayuda de una primitiva, que para todo camino C que vaya de un punto z_1 a un punto z_2 vale

$$\int_C z^n\, dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

Ej. 13 Sea $\gamma : (-\infty, \infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $\gamma(t) = t + (1 - t)i$. Mostrar que

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+4}dz = \frac{1}{2}\pi$$

Ej. 14 Sea C el cuadrado cuyos lados están determinados por las lineas $x = \pm2$, $y = \pm2$ recorrido en sentido antihorario. Calcular las integrales siguientes:

1. $\int_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{i\pi}{2}}dz$,
2. $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz$,
3. $\int_C \frac{z}{2z+1}\, dz$,
4. $\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\, dz$.

Ej. 15 Hallar el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del circulo $|z-i|=2$ recorrido en sentido positivo en los casos:

1. $g(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$,
2. $g(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.

Ej. 16 Sea C la circunferencia $|z|=3$, recorrida en sentido antihorario. Mostrar que si

$$g(w)=\int_C \frac{2z^2-z-2}{z-w}\,dz, \qquad |w|\neq 3,$$

entonces $g(2)=8\pi i$. ¿Cuánto vale $g(w)$ cuando $|w|>3$?

Ej. 17 Sea la circunferencia unidad $z=e^{i\theta}$, $\theta\in[-\pi,\pi]$.

1. Mostrar que para cualquier $a\in\mathbb{R}$ vale:
$$\int_C \frac{e^{az}}{z}\,dz=2\pi i.$$
2. Escribir la integral anterior en términos de θ para deducir la fórmula de integración
$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta=\pi.$$

Ej. 18 Sea C la circunferencia $|z|=4$, recorrida en sentido antihorario. Mostrar que

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)}dz=2\pi i.$$

Ej. 19 Haciendo uso de que $4+\sin^2(\theta)$ es igual a $(2+i\sin(\theta))(2-i\sin(\theta))$, calcular:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{4+\sin^2(\theta)}d\theta,$$

Ej. 20 Mostrar que

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(t)}{t^2+1}dt=\frac{1}{2e}\pi.$$

Ej. 21 Sea b un número real positivo. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(2b\pi t)dt=\frac{\sqrt{\pi}}{e^{b^2\pi^2}}.$$

Ej. 22 Sea f entera y supongamos que $u(x,y)=\mathrm{Re}(f(x+iy))$ está acotada superiormente. Mostrar que f es constante. [Hint: Aplicar el Teorema de Liouville a $g(z)=\exp(f(z))$.]

Ej. 23 Usar GeoGebra para aproximar la integral de una función de compleja f a lo largo de una curva suave γ y comparar con algunas de las integrales resueltas en el práctico.