Funciones Complejas

Período 2021-II

Práctico 6

FAMAF

Ej. 1 Mostrar que si una serie de números complejos converge absolutamente entonces la serie es convergente

Ej. 2 Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$, $|z|<1$, y haciendo $z = re^{i\theta}$, con $0<r<1$, en la fórmula anterior, deducir las siguientes igualdades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Ej. 3 Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ y c es un número complejo, mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S}$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS$.

Ej. 4 (Opcional) Sean f y g funciones analíticas en el disco abierto $B_R(z_0)$. Demostrar:

1. Si existe una sucesión en el disco $\{z_n\}$ tal que $f(z_k)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y que converge al centro del disco, entonces f debe ser identicamente cero.
   [Hint: Probar que $f^{(n)}(z_0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ considerando la serie de Taylor de f alrededor de z_0.]
2. Si el producto de funciones $f.g$ es constante e igual a cero entonces f es identicamente cero o g es identicamente cero.

Ej. 5 Deducir la representación en serie de Maclaurin $z\cosh(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!}$, $\quad z\in\mathbb{C}$.

Ej. 6 Verificar que $e^z = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

Ej. 7 Hallar la serie de Maclaurin de la siguiente función e indicar su dominio de convergencia:

$$f(z) = \frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9}\left(\frac{1}{1+(z^4/9)}\right).$$

Ej. 8 Desarrollar en serie de Taylor las funciones $\cos z$ y $\sinh z$ centradas en $z_0=\pi/2$ y $z_0=\pi i$ respectivamente.

Ej. 9 Escribir la representación en serie de Maclaurin de $f(z)=\sin(z^2)$ y deducir que $f^{(4n)}(0)=0$ y $f^{(2n+1)}(0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Ej. 10 Sean λ un complejo no nulo y n un entero no negativo. Se define el *coeficiente binomial* $\binom{\lambda}{n}$ como $\binom{\lambda}{0}=1$ y $\binom{\lambda}{n}=\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}$ si $n\geq 1$. Verificar que si $|z|<1$ entonces

$$(1+z)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n} z^n$$

SERIES

Ej. 11 Sea w un complejo tal que $|w| < 1$. Dada la función f y el anillo D, escribir la representación en serie de Laurent centrada en el centro del anillo D de las siguientes funciones:

1. $\dfrac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \infty\}$
2. $\tan(z)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \frac{\pi}{2}| < \pi\}$
3. $\dfrac{1}{z}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < \infty\}$
4. $\dfrac{1}{z(1+z^2)}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$
5. $\dfrac{1}{z(1+z^2)}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$
6. $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+2| < 1\}$
7. $\dfrac{w}{z-w}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |w| < |z| < \infty\}$
8. $\dfrac{1}{(\tan(z))^2} - \dfrac{1}{z^2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{\pi}{2}\}$

Ej. 12 Mostrar que si $z \neq 0$, entonces $\exp\left(\dfrac{\lambda}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(\lambda) z^n$ donde

$$\mathrm{J}_n(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - \lambda\sin(\theta))d\theta,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Los coeficientes $J_n(\lambda)$ son llamados funciones de Bessel de primera clase (Wikipedia: Bessel functions).

Ej. 13 Tomando derivada en el desarrollo en serie de Maclaurin $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, para $|z| < 1$, obtener las siguientes representaciones en el mismo disco abierto:

1. $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$,
2. $\dfrac{2}{(1-z)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n$,

Ej. 14 Sea θ un ángulo entre $-\pi$ y π. Hallar el desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados, y determinar el radio de convergencia de la serie obtenida.

1. $\frac{1}{z^2}$, en $z_0 = -1$.
2. $\operatorname{Log} z$, en $z_0 = i$.
3. $\frac{1}{1+i-\sqrt{2}z}$, en $z_0 = 0$.
4. $\operatorname{Arctan}(z)$, en $z_0 = 0$.
5. $z(\cos(z))^2$, en $z_0 = \pi$.
6. $\sqrt{z}$, en $z_0 = e^{i\theta}$.
7. $\frac{e^z}{1-z}$, en $z_0 = 0$.
8. ze^{2z}, en $z_0 = -1$.

Ej. 15 Expandir la función $\dfrac{1}{(1+z^2)}$ en serie de Taylor para $|z| < 1$ y en serie de Laurent para $|z| > 1$.

Ej. 16 Expandir la función $\dfrac{1}{\operatorname{Log}(1+z)}$ en serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$ y determinar la región de convergencia.

Ej. 17 Hallar la región de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n!}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1+(1+i)^n}$.