Funciones Complejas

Período | 2021-II

Práctico 7

Ej. 1 Encontrar el residuo en $z=0$ de las funciones

1. $z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$
2. $\frac{z-\sin(z)}{z}$
3. $\frac{e^{z+1}}{z^3}$
4. $\frac{\cot(z)}{z^4}$

Ej. 2 Usar el teorema del residuo de Cauchy para evaluar la integral de cada una de las siguientes funciones a lo largo de la circunferencia de radio 3 orientada positivamente

1. $\frac{\exp(-z)}{z^2}$
2. $\frac{\exp(-z)}{(z-1)^2}$
3. $z^2\exp\left(\frac{1}{z}\right)$
4. $\frac{z+1}{z^2-2z}$

Ej. 3 Encontrar todos los posibles valores valores de $\int_\gamma e^{1/z}\,\mathrm{d}z$ donde γ es cualquier curva cerrada que no pasa por el cero.

Ej. 4 Sea f una función analítica en todo el plano complejo excepto por un número finito de puntos singulares $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Mostrar que

$$\operatorname*{Res}_{z=w_1} f + \operatorname*{Res}_{z=w_2} f + \ldots + \operatorname*{Res}_{z=w_n} f = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} f.$$

Ej. 5 En cada caso, escribir la parte principal de la función en el punto singular y determinar si tal punto es un punto singular removible, punto singular esencial o un polo:

1. $z\exp\left(\frac{1}{z}\right)$
2. $\frac{z^2}{1+z}$
3. $\frac{\sin(z)}{z}$
4. $\frac{\cos(z)}{z}$
5. $\frac{1}{(2-z)^3}$

Ej. 6 Supongamos que f tiene un polo simple en $z=w_0$ y que g es analítica en un abierto que contiene a z_0. Verificar que $\operatorname*{Res}_{z=w_0} fg = g(w_0)\operatorname*{Res}_{z=w_0} f$.

Ej. 7 Suponer que f es una función analítica en z_0 y considerar la función $g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$. Verificar que

1. Si $f(z_0)\neq 0$, entonces z_0 es un polo simple de g con residuo $f(z_0)$.
2. Si $f(z_0)=0$, entonces z_0 es un punto singular removible de g.

Ej. 8 En cada caso, mostrar que cualquier punto singular de la función es un polo. Determinar el orden de cada polo y encontrar el correspondiente residuo:

1. $\frac{z+1}{z^2+9}$
2. $\frac{z^2+2}{z-1}$
3. $\left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$
4. $\frac{e^z}{z^2+\pi^2}$
5. $\frac{\sinh(z)}{z^4}$

Residuos e integrales reales

Ej. 9 En cada caso, encontrar el valor de la integral $\int_\gamma f(z)dz$ donde γ son circunferencias positivamente orientadas:

1. $\dfrac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}$ circunferencia $|z-2|=2$
2. $\dfrac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}$ circunferencia $|z|=4$
3. $\dfrac{1}{z^3(z+4)}$ circunferencia $|z+2|=3$
4. $\dfrac{1}{z^3(z+4)}$ circunferencia $|z|=2$
5. $\dfrac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}$ circunferencia $|z|=2$
6. $\dfrac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z^3}$ circunferencia $|z|=3$

Ej. 10 Verificar que $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{(z^2-1)^2+3}\,\mathrm{d}z$ es igual a $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ donde α es la frontera positivamente orientada del rectángulo cuyos lados están entre las líneas $x=\pm 2$, $y=0$ e $y=1$.

Ej. 11 Usar residuos para verificar las siguientes igualdades

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}=\frac{\pi}{3}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+4)^2}=\frac{\pi}{200}$
6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Ej. 12 Sean a, b y c en $\mathbb{R}$, con $|a|<1$, $b>1$ y $c>0$. Calcular las siguientes integrales reales usando residuos:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$
6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(x)}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin(\theta))^{2n}\,\mathrm{d}\theta$
9. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2}\,\mathrm{d}\theta$
10. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{(b+\cos(\theta))}\,\mathrm{d}\theta$
11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{c+(\sin(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$
12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln(t))^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln(t))^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Ej. 13 Verificar que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda t}\operatorname{sech}(t)\,\mathrm{d}t$ es igual a $\pi\sec(\lambda\pi/2)$ para cualquier número complejo λ tal que $|\mathfrak{Re}(\lambda)|<1$.