FAMAF

Funciones Complejas
Período | 2021-II
Práctico 8

Ej. 1 (Repaso) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función períodica tal que existe su período fundamental T. Mostrar que cualquier período de f es un múltiplo entero de T.

Ej. 2 Sean a, b, c y λ números reales positivos tales que $b/c \in \mathbb{Q}$ y $0 < \lambda < 2\pi$. Determinar si las siguientes funciones son períodicas y de ser posible, dar el período fundamental:

1. $\cos(at)$
2. $\cos(t+\lambda)$
3. $\cos(t+\lambda) - \cos(t)$
4. $\sin(bt) + \sin(ct)$
5. $|\cos(t)| + |\sin(t)|$
6. $\sin(t^2)$
7. $\sin(t)\cos(t)$
8. $(\cos(t))^2$
9. $(\cos(t))^4 + (\sin(t))^4$

Ej. 3 Sean $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Estudiar si f_1, f_2 y $f_1 + f_2$ son funciones períodicas y de ser posible, dar su período fundamental.

Ej. 4 Mostrar que si una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es períodica y continua, entonces es acotada, y si además es diferenciable con período fundamental T, entonces su derivada f' también es períodica con el mismo período fundamental.

Ej. 5 Sean $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ números reales positivos distintos. Mostrar que el conjunto de $2m$ funciones $\{\cos(t_k x), \sin(t_k x) : 1 \le k \le m\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ej. 6 (Opcional) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ números enteros positivos distintos y sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{a_k} x\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi}{a_k} x\right) \right)$$

donde α_k y β_k son constantes reales, no ambas nulas. Demostrar que f es una función períodica con período fundamental $T = \text{mcm}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Ej. 7 Determinar la serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas con período fundamental L definidas sobre un intervalo del tipo $[a, a+L)$:

1. $H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$
2. $f(x) = x$, $-1 \le x < 1$
3. $f(x) = x$, $0 \le x < 2$.
4. $f(x) = x^2$, $-\pi \le x < \pi$.
5. $M(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$
6. $T(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x < \pi \\ \pi, & \text{si } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$
7. $\cos(x)$, $0 \le x < \pi$.
8. $|\sin(x)|$, $-\pi \le x < \pi$.
9. $Q(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -5 \le x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \le x < 3. \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} \sin(+\frac{x}{2}), & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ \sin(-\frac{x}{2}), & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$

Ej. 8 Sea λ un número real no nulo y sea f la función periódica definida por $f(x) = e^{\lambda x}$, si $-\pi \leq x < \pi$ y $f(x+2\pi) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Verificar que la serie de Fourier de f está dada por

$$\frac{\sinh(\pi\lambda)}{\pi}\left\{\frac{1}{\lambda} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}(\lambda\cos(nx) - n\sin(nx))\right\}.$$

Usar la anterior serie de forma apropiada para verificar que:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{2\lambda}\operatorname{csch}(\lambda\pi) - \frac{1}{2\lambda^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{\lambda}\operatorname{csch}(\lambda\pi)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{2\lambda}\coth(\lambda\pi) - \frac{1}{2\lambda^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{\lambda}\coth(\lambda\pi)$

Ej. 9 Sea f la función periódica definida por

$$\begin{cases} \pi^2, & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ (x-\pi)^2, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

y $f(x) = f(x+2\pi)$. Dar la serie de Fourier de f y usarla de forma apropiada para verificar que:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Ej. 10 Para las siguientes funciones definidas en el intervalo dado, extenderlas periódicamente en una forma par y en una forma impar para dar la respectiva serie de Fourier en cosenos y la serie de Fourier en senos:

1. $f(x) = 1 - x$, $0 < x \leq 1$
2. $f(x) = x^2$, $0 \leq x < 2$
3. $f(x) = x(\pi - x)$, $0 \leq x \leq \pi$
4. $f(x) = \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$
5. $f(x) = x\sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$
6. $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$

Ej. 11 Sea f la función periódica definida por $f(x) = x$, si $-\pi \leq x < \pi$ y $f(x+2\pi) = f(x)$ para cualquier x en $\mathbb{R}$, cuya serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Integrar la anterior serie para mostrar que si $x \in (-\pi, \pi)$, entonces

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos(kx).$$

¿Qué puede decir de la igualdad cuando $x = \pm\pi$.

Ej. 12 Sea f la función periódica definida por $f(x)=|x|$, si $-\pi \le x < \pi$ y $f(x+2\pi)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Verificar que la serie de Fourier de f está dada por

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2},$$

e integrando esta serie, mostrar que la serie de Fourier de la función periódica g definida por

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x(\pi+x), & \text{si} \quad -\pi \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}x(\pi-x), & \text{si} \quad 0\le x\le \pi \end{cases}$$

y $g(x)=g(x+2\pi)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ es

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Usar los anteriores resultados para mostrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

Ej. 13 Sea a un real positivo. Determinar la transformada de Fourier de las siguientes funciones

1. $f(t)=\begin{cases} 1, & \text{si } |t|<a \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$
2. $f(t)=\begin{cases} a+t, & \text{si } -a\le t<0 \\ a-t, & \text{si } 0\le t<a \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases} |t|, & \text{si } |t|\le a \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$
4. $f(t)=\begin{cases} 1-\frac{|t|}{a}, & \text{si } |t|\le a \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$
5. $f(t)=\begin{cases} \exp(-at), & \text{si } t\ge 0 \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$
6. $f(t)=\exp(-a|t|)$
7. $f(t)=t\exp(-a|t|)$
8. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$
9. $f(t)=\dfrac{t}{a^2+t^2}$
10. $f(t)=\begin{cases} \exp(-at), & \text{si } t\ge 0 \\ -\exp(at), & \text{en otro caso}\end{cases}$

Ej. 14 Usar propiedades de la transformada de Fourier para obtener el valor de las siguientes integrales impropias:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(sa)\cos(sx)}{s}\,\mathrm{d}s$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(sx)}{s^2+a^2}\,\mathrm{d}s$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{1+s^2}$

Ej. 15 Sean a y b números reales tales que $0<b<a$. Encontrar una función $g(s)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)\,\mathrm{d}s}{(x-s)^2+b^2}=\frac{1}{x^2+a^2}$$

Ej. 16 Sea a un real positivo. Encontrar la transformada inversa de la funciones definidas por

$g(w)=\dfrac{\sin(w)}{w}$, $\quad g(w)=\dfrac{1}{(a+iw)}$. $\quad g(w)=\dfrac{1}{(a-iw)}$. $\quad g(w)=\dfrac{1}{(a+iw)^2}$.