

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “C”

TRABAJOS DE FÍSICA

Nº 4/11

**Análisis de Datos e Incertidumbres
en Física Experimental**

Silvina Pérez - Clemar Schurrer - Guillermo Stutz

**3ra. Edición
Abril 2015**



Editores: Miguel A. Chesta–Ricardo C. Zamar

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA
REPÚBLICA ARGENTINA

Análisis de Datos e Incertidumbres en Física Experimental

Silvina C. Pérez, Clemar A. Schürerer, Guillermo E. Stutz

“... cuando puedes medir aquello de lo que estás hablando y expresarlo en números, sabes algo al respecto, pero cuando no se puede expresar en números, tu conocimiento es escaso y poco satisfactorio, puede ser el principio del conocimiento, pero apenas has avanzado con tus pensamientos al estado de la ciencia, cualquiera sea el asunto del que se trate.” Lord Kelvin

Índice general

1. Introducción	3
1.1. La importancia del experimento en la ciencia	3
1.2. Etapas de un experimento típico	3
1.3. El cuaderno de laboratorio	4
2. Mediciones e incertidumbres	6
2.1. Magnitud física y medición	6
2.2. Apreciación de un instrumento de medición	6
2.3. Apreciación del observador o estimación de la lectura	7
2.4. Mediciones directas	7
2.4.1. Cómo comunicar el valor de una magnitud	12
2.4.2. Precisión y exactitud de una medición	12
2.5. Mediciones indirectas	13
2.6. Cifras significativas y redondeo	15
3. Tratamiento estadístico de datos experimentales	17
3.1. El mejor estimador y la desviación estándar	17
3.2. La desviación estándar de la media o error estándar	20
3.3. Histogramas y distribuciones	22
3.4. Distribuciones límites	24
3.5. Distribución normal	27
3.6. Distribución normal estándar	28
3.7. Distribuciones normales no estándar	29
3.8. Distribución de la media muestral	30
3.9. Estimación puntual e intervalos estadísticos basados en una sola muestra .	30
3.9.1. Estimador puntual	30
3.9.2. Intervalos de confianza con muestras grandes	31
3.9.3. Nivel de confianza y precisión	33
3.10. Comparación de valores determinados experimentalmente	33
3.11. Intervalos de confianza con muestras pequeñas	36
3.12. Propiedades de las distribuciones t	37
4. Ajuste de una función lineal	38
4.1. El método de cuadrados mínimos	38
4.2. Coeficiente de determinación y de correlación lineal	41
4.3. Desviación estándar asociadas a los parámetros de ajustes	42
4.4. Intervalo de confianza para la pendiente	44

4.5. Ajuste pesado	44
4.6. Transformación de funciones en funciones lineales	45
A.	46
A.1. Sistema internacional de unidades	46
A.1.1. Unidades fundamentales	46
A.1.2. Unidades derivadas	46
A.1.3. Prefijos del SI	49
B.	50
B.1. Área bajo la curva normal estándar	50
B.2. Valores críticos para la distribución t de Student	52

Capítulo 1

Introducción

1.1. La importancia del experimento en la ciencia

La física, al igual que la química y la biología, es una ciencia fáctica natural y se dedica a averiguar y entender “hechos” naturales (tales como procesos y fenómenos físicos, estructura y propiedades de la materia, etc.). El conocimiento de estos “hechos” se adquiere a través de la observación y/o el experimento. De aquí surge la importancia que tiene el experimento para la ciencia. Los avances científicos, y también los tecnológicos, se basan fundamentalmente en el respaldo que brinda un conjunto de experimentos. Nuevas y viejas teorías son puestas a prueba a través de experimentos; mediciones cuidadosamente realizadas pueden revelar nuevos efectos que requieren que las teorías existentes sean modificadas, etc. A otro nivel, los experimentos que se realizan en un curso de laboratorio, nos brindan la oportunidad de adquirir conocimientos y comprensión al investigar el “mundo real”, con las ventajas que esto tiene con respecto a las descripciones idealizadas de los fenómenos físicos presentadas en los libros de texto. En este sentido, ver que algo ocurre o hacer que algo suceda de manera controlada, como lo que hacemos cuando realizamos un experimento, tiene mucho más impacto y deja en la mente una impresión más grande que leer acerca de ello. Por lo tanto, el trabajo experimental, tanto en el laboratorio como en el aula a través de experiencias demostrativas, cumple un rol fundamental, y al mismo tiempo es una de las actividades más importantes y estimulantes en cualquier curso de física. Un experimento bien diseñado y ejecutado, seguido por un adecuado procesamiento y análisis de los datos, nos provee información sobre un determinado proceso o fenómeno la cual difícilmente pueda ser proporcionado solamente por un estudio teórico. El objetivo de este apunte es justamente introducir al alumno en la ejecución del trabajo en el laboratorio, lo que incluye: el diseño de un experimento, la realización de las mediciones, la colección y presentación de datos experimentales y el análisis de los mismos.

1.2. Etapas de un experimento típico

En general, todo experimento de laboratorio consta de diferentes etapas, algunas de las cuales deben guardar cierto orden cronológico. Las etapas usuales en un trabajo de laboratorio están descriptas brevemente a continuación.

- **Objetivo:** es lo que queremos averiguar o investigar y constituye el punto de partida de cualquier experimento. Mientras más claro y más definido esté el objetivo, más

fácil será planear el experimento.

- **Plan:** una vez que el objetivo está planteado, se proyecta un plan para lograr aquel objetivo. Esto contempla decidir sobre el equipamiento necesario, las cantidades a medir y el procedimiento experimental.
- **Preparación:** en esta etapa se arma el dispositivo experimental, se calibran y ajustan los instrumentos, el experimentador se instruye en el funcionamiento y se familiariza con la operación de los mismos.
- **Mediciones preliminares:** permite familiarizarse y adquirir experiencia con la técnica experimental, verificar que todo funciona correctamente y da una idea de los valores de las cantidades a medir.
- **Recolección de datos:** las mediciones deben realizarse con cuidado, esmero y concentración a fin de obtener un conjunto de “buenos” datos experimentales, los cuales serán adquiridos manual o electrónicamente de manera clara y fidedigna.
- **Repetitividad:** en caso de ser posible, es conveniente repetir el experimento en las “mismas condiciones” con el fin de verificar si el primer conjunto de datos medidos es representativo y puede ser repetido, dentro de las incertidumbres experimentales.
- **Análisis de datos:** en general, los datos crudos obtenidos de las mediciones necesitan ser analizados y procesados para poder llegar a un resultado final y extraer conclusiones.
- **Informe del experimento:** una vez que el trabajo de laboratorio se ha completado y los datos se han analizado e interpretado, los resultados obtenidos se deben comunicar de manera clara y concisa, ya sea a través de un informe de laboratorio, artículo científico, etc. El informe debe describir el objetivo, el procedimiento experimental, las mediciones, el análisis de los datos experimentales, los resultados obtenidos, su discusión y las conclusiones extraídas.

1.3. El cuaderno de laboratorio

El cuaderno de laboratorio contiene un registro permanente de los experimentos realizados y cumple esencialmente dos funciones. La primera es la de registrar toda información relacionada con el experimento, incluso detalles que en ese momento pueden parecer irrelevantes pero que pueden adquirir importancia en el momento de analizar los datos o extraer conclusiones. La segunda es la de proveer un informe elemental de laboratorio con la información suficiente como para que pueda ser utilizado por otras personas, o por nosotros mismos, tiempo después de realizado el experimento. En general, en un cuaderno de laboratorio se debe registrar lo siguiente:

- **Fecha y hora.** Son necesarias para llevar un registro cronológico de cuándo se hizo cada medición. Esto permitirá correlacionar los datos experimentales con otras variables en cada momento.
- **Título del experimento.** Permite identificar rápidamente de qué experimento se trata.

- **Objetivo del experimento.** Se debe describir tanto el objetivo general del experimento como los específicos, indicando, por ejemplo, el propósito de un nuevo conjunto de mediciones o cálculos.
- **Dibujo esquemático del dispositivo experimental.** Se debe indicar claramente cada uno de los componentes.
- **Descripción de los instrumentos.** Comúnmente basta con el nombre del instrumento (regla, cronómetro, etc.), su marca y, en lo posible, un número de serie que lo identifique universalmente.
- **Método experimental.** Debe ser descripto lo suficientemente detallado como para que otra persona, o uno mismo, tiempo después, pueda repetir el experimento.
- **Mediciones.** En la medida de lo posible, los datos originales deben ser registrados directamente en el cuaderno de laboratorio, indicando las unidades de las cantidades medidas y una estimación de la incertidumbre experimental de las cantidades medidas directamente.
- **Gráficos.** Un gráfico permite visualizar los datos, y analizar sus tendencias, mejor que una tabla de números. Deben tener un título, indicar claramente qué se representa en cada eje y en qué unidades, etc.
- **Cálculos.** Se deben indicar claramente las fórmulas utilizadas.
- **Conclusiones.** Al finalizar el experimento se debe escribir una breve conclusión relacionada con el objetivo.

Recuerde que las anotaciones deben ser claras y comprensibles, que el cuaderno de laboratorio es un documento, es personal y es un registro secuencial, que las páginas deben estar numeradas, al igual que las figuras y las fórmulas, para poder ser citadas correctamente cuando corresponda.

Capítulo 2

Mediciones e incertidumbres

2.1. Magnitud física y medición

Una magnitud física es una propiedad de un cuerpo o de un proceso o fenómeno físico que puede ser medida, como por ejemplo la temperatura, la masa, la longitud, la corriente eléctrica, etc. A la medida de la magnitud de un objeto o de un proceso específico se la denomina cantidad, y su valor lo determinamos a partir de una medición. La temperatura de un cuerpo, la masa de una partícula, la longitud de una mesa o la intensidad de corriente eléctrica que fluye por un cable, son ejemplos de cantidades.

Un proceso de medición involucra los siguientes sistemas:

- El sistema objeto de la medición: la cantidad a medir (en la jerga actual de la metrología se llama “mesurando”).
- El sistema de medición: el instrumento de medición.
- El sistema de referencia: las unidades de medición y los respectivos patrones.
- El operador, que llevará a cabo el método o proceso de medición.

El resultado de una medición es un número (el valor de la cantidad medida), la unidad de medida y la incertidumbre en la determinación de aquel número. Por ejemplo el resultado de la medición de la temperatura de un objeto podría ser $(4,6 \pm 0,1)^\circ\text{C}$.

2.2. Apreciación de un instrumento de medición

Es la menor división de la escala del instrumento. En el caso de una regla común, por ejemplo, las marcas más finas en su escala están separadas por una distancia de 1 mm. La apreciación de esta regla es, por lo tanto, 1 mm. En general, la apreciación del instrumento representa el intervalo de incertidumbre más pequeño que se puede asignar al valor de una única medición de una cantidad. Si la cantidad que estamos midiendo es estable en el tiempo y si el instrumento de medición está precisamente calibrado, es razonable tomar como incertidumbre, en una única lectura, a la mitad de la apreciación del instrumento. Así, por ejemplo, se podría expresar la longitud de un objeto de extremos bien definidos, medida con una regla común, como $(47,0 \pm 0,5)$ mm. El signo \pm se usa para indicar que el valor de la longitud de aquel objeto se encuentra en el intervalo (46,5 mm, 47,5 mm).

2.3. Apreciación del observador o estimación de la lectura

Es el menor intervalo que un observador puede estimar con ayuda de la escala del instrumento de medición. Dependiendo de su habilidad (y de condiciones ambientales, como por ejemplo la iluminación), la apreciación del observador puede ser mayor o menor que la apreciación del instrumento de medición. Por ejemplo, si un observador fuera muy cuidadoso podría apreciar con una regla común fracciones de milímetro, digamos 0,5 mm, tal cual como se expuso en el párrafo anterior.

2.4. Mediciones directas

Toda medición de una dada cantidad tiene asociada una incertidumbre producto de diversos procesos que contribuyen a ella. Independientemente del grado de sofisticación del equipamiento que se utilice en un determinado experimento, la medición estará afectada por incertidumbres experimentales. Esto significa que si realizáramos mediciones repetidas de una cierta cantidad, observaríamos muy probablemente variaciones en los valores medidos. Esta variabilidad es una característica inherente al procedimiento de recolección de datos. A la incertidumbre experimental se la puede denominar alternativamente “error experimental”. En este contexto el término “error” no hace referencia a una equivocación, sino a la variabilidad de los valores medidos. Actualmente, en forma paulatina, se está dejando de lado su uso.

La incertidumbre de una medición es un parámetro asociado al resultado de una medida, que caracteriza el intervalo de valores que puede ser razonablemente atribuido al valor de la cantidad que se está midiendo. Da una idea de la calidad de la medición. Las fuentes de “error” experimental pueden tener diversos orígenes: el instrumento de medición, el sistema objeto de la medición, la metodología de medición, el operador, el entorno, etc.

Las incertidumbres pueden agruparse según dos procedimientos:

1. Analizando los efectos que producen sobre el resultado de la medición.
2. De acuerdo al método utilizado para obtener su valor numérico.

Clasificación de la incertidumbre según los efectos producidos:

Incetidumbres aleatorias: En un experimento en el que se mide repetidamente una cierta cantidad, las incertidumbres aleatorias son aquellas que hacen fluctuar, al azar, en torno a un valor medio, los sucesivos valores medidos. Son inherentes a todo proceso de medición. Este tipo de incertidumbre puede ser cuantificado por medio de un análisis estadístico de los datos experimentales.

Incetidumbres sistemáticas: Son aquellas que tienen su origen en algún proceso del experimento siguiendo una regla definida desconocida e inadvertida, lo que introduce una variación sistemática (por exceso o por defecto) de los valores medidos. Las incertidumbres sistemáticas afectan al valor medido siempre de la misma manera cada vez que la medición se repite. Un análisis detallado del experimento permite minimizar la posibilidad de incertidumbres sistemáticas, pero no garantiza

su ausencia. Este tipo de errores son más difíciles de identificar, pero cuando son detectados pueden ser corregidos.

Los errores sistemáticos pueden tener distintos orígenes:

a. Instrumentales:

- I. Error de “cero”. Por ejemplo una regla quebrada en el inicio y que comience en la división 1,3 mm.
- II. Error de “ganancia”. Por ejemplo una regla plástica estirada. El caso típico es el de la cinta métrica usada por las costureras.

Estos errores sistemáticos de origen instrumental pueden ser eliminados calibrando el instrumento con patrones de referencia.

- b. De observación. Por ejemplo el error de paralaje. La posición de un objeto frente a una escala se debe observar (i.e. medir) en una dirección perpendicular a la escala y que pase por un eje de referencia del objeto. Cuando la lectura no se realiza en la dirección perpendicular se comete un error de paralaje (ver Figura 2.1).

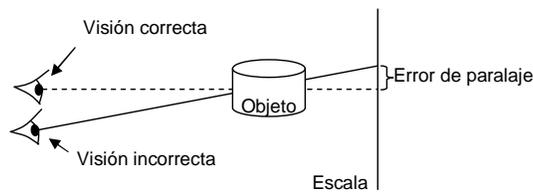


Figura 2.1: Error de paralaje en una medición.

c. Ambientales:

- I. Presión. Afecta fundamentalmente a equipos que usan ondas (de sonido o de luz) para realizar las mediciones.
- II. Temperatura. Variaciones en la temperatura producen dilataciones o contracciones que afectan las mediciones de longitud y el funcionamiento de muchos equipos mecánicos que cuentan con engranajes, palancas, etc. en sus mecanismos internos.
- III. Composición química del aire. Como en el caso de la presión, la composición del aire afecta fundamentalmente a equipos que usan ondas (de sonido o de luz) para realizar las mediciones.

Todos los errores de origen ambiental se pueden corregir si se dispone del equipamiento adecuado.

- d. Teóricos. Este tipo de error es introducido por el modelo teórico usado para analizar los datos.

Regularmente al momento de estar midiendo se tiene la preocupación de si se tomaron todas las precauciones “experimentales” para que los resultados obtenidos sean todos fiables. Es menester extender las precauciones a las ecuaciones que describen teóricamente el experimento. Uno de los ejemplos más simple es cuando se describe el período (T) de un péndulo, armado con un

hilo y una bola pesada atada en su extremo, con la ecuación $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, en donde l es la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. En esta ecuación se soslaya la variación introducida al período por la forma del cuerpo que está oscilando (péndulo físico), sin mencionar otros muchos efectos de menor importancia.

En el caso del péndulo se conoce con bastante detalle toda la física que describe el proceso de oscilación y por ende se pueden encontrar descripciones teóricas muy precisas para el período. Sin embargo cuando las mediciones se realizan en sistemas poco conocidos las cosas pueden complicarse. Razón por la cual siempre hay que ser cauto al realizar afirmaciones sobre sistemas que uno está aprendiendo a conocer (en el caso de un aprendiz esto significa que la cautela debe tenerla en todos los experimentos).

Los errores sistemáticos enumerados anteriormente son solo los más comunes de una lista extremadamente larga. La enumeración enunciada pretende estimular la visión crítica de los experimentos.

Clasificación de acuerdo al método utilizado para obtener su valor numérico¹:

Incertidumbres tipo A: Son todas aquellas en las que se usa un procedimiento estadístico para obtener su valor numérico.

Esta contribución se puede disminuir aumentando el número de lecturas. Es accesible al observador. Por ejemplo la desviación estándar en torno a una media de una serie de mediciones independientes; el método de cuadrados mínimos para obtener la desviación estándar de los parámetros de una curva o superficie, etc. Para cuantificar las incertidumbres aleatorias existen procedimientos específicos que se presentarán en el capítulo 3.

Incertidumbres tipo B: Son todas aquellas en las que no se usa un procedimiento estadístico para obtener su valor numérico.

Estas incertidumbres no pueden ser modificadas por el observador. Por ejemplo las incertidumbres asociadas a un aparato de medición (su apreciación y calibración) o a un patrón, las cuales, en general, son provistas por el fabricante u otra entidad que haya certificado el aparato o el patrón; las incertidumbres determinadas a partir de datos de mediciones anteriores que ya tienen especificada su incertidumbre; las incertidumbres asignadas a datos obtenidos de catálogos generales; etc.

En todo experimento, en el que se mide una determinada cantidad, la incertidumbre del valor medido tendrá contribuciones aleatorias y sistemáticas, tanto de tipo A como de tipo B. En este caso, la incertidumbre de la cantidad medida se obtiene sumando en cuadratura (raíz cuadrada de la suma de los cuadrados) las contribuciones de todas las

¹Esta clasificación comenzó a gestarse hacia fines de la década de 1970 y principios de la década de 1980, impulsada por el Bureau Internacional des Poids et Mesures (BIPM). En el año 1993 se plasmó como la Guía para la Expresión de Incertidumbres en Mediciones (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurements*, International Organization for Standardization (ISO), primera edición (1993); *Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement*, BIPM - JCGM 100:2008), abreviado corrientemente como GUM.

incertidumbres. En la actualidad la clasificación más usual de las incertidumbres es en tipo A o B y la correspondencia con incertidumbres aleatorias o sistemáticas, en el caso que existan, es, en general, difícil.

Ejemplo: En la Tabla 2.1² se enumeran las contribuciones a la incertidumbre de la comparación de un bloque patrón de máxima calidad (grado K) con otro bloque de menor calidad (grados 0, 1 ó 2). Un bloque patrón es un prisma rectangular que posee dos caras opuestas pulidas (para definir planos), paralelas entre sí (para definir una normal) entre las que se mide la distancia de centro a centro de cada cara, valor que es usado para definir la longitud del bloque. Los bloques pueden ser de acero, vidrio u otras cerámicas. La calidad de los bloques está asociada a la planitud de las caras de medición. Para longitudes de bloques de 0,5 mm hasta 150 mm los valores de planitud se presentan en la Tabla 2.2.

Para la comparación se utiliza un comparador, que es un aparato que compara las longitudes de dos bloques con una apreciación de 1 nm (ó 10 nm). El aparato es construido con aceros especiales e intervienen partes ópticas. Todo el equipo está ubicado en habitaciones con temperatura controlada ($T = (20,0 \pm 0,1)^\circ\text{C}$) y la temperatura de los bloques y la mesa donde apoyan a su vez se miden con una incertidumbre de $0,001^\circ\text{C}$.

A continuación describiremos con un poco de detalle el origen de las componentes de incertidumbre que figuran en la Tabla 2.1. A modo de introducción digamos que en un proceso usual de medición el valor de la longitud de un bloque se obtiene repitiendo las medición entre 5 a 10 veces y luego promediando los valores obtenidos.

Clasificación de las componentes de la incertidumbre:

- 1) La calibración del bloque patrón es provista por una institución que acredita internacionalmente ser experta en ese tipo de mediciones. Sin embargo, la utilización de un “plano” donde se apoya una de las caras del bloque y luz que se refleja en ese plano y en una cara del bloque es inherente al proceso de medición. Sin ingresar a un análisis detallado del montaje experimental resulta evidente que ningún plano físico (construido) es perfecto. Sirva este detalle para catalogar esta incertidumbre como sistemática en origen y de tipo B ya que es provista externamente al observador.
- 2) La medición reiterada siguiendo un mismo procedimiento experimental permite hacer un análisis estadístico en donde queda discriminada la incertidumbre que introduce la manipulación y ubicación de los bloques en el comparador.
- 3) Otros procedimientos experimentales permiten obtener componentes sistemáticas, en general por imprecisión mecánica o electrónica del aparato comparador, que varían al azar. Estas variaciones si bien son al azar pueden tener un período de variación largo (desde horas a días) mientras que el tiempo en que se realiza una medición no va más allá de los 10 minutos. Esto hace que para la comparación de bloques la contribución es sistemática, sin embargo permite una evaluación estadística.
- 4) Tanto en la contribución (2) como en la (3) las componentes son pasibles de un análisis estadístico por parte del operador. Sin embargo hay componentes sistemáticas como ser la calibración de la escala de un comparador que no están sujetas a un análisis estadístico y por ende hay que remitirse a lo que el certificado de fabricación especifica.

²Tabla extraída de: *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*, B.N. Taylor y C.E. Kuyatt, NIST Technical Note 1297 (1994).

Componentes de incertidumbre	Valor de la incertidumbre (nm)			
	Incertidumbres aleatorias		Incertidumbres sistemáticas	
	Tipo A	Tipo B	Tipo A	Tipo B
1) Calibración del bloque patrón				25
Diferencia medida entre las caras de los bloques:				
2) Observaciones repetidas	5,8			
3) Efectos aleatorios del comparador			3,9	
4) Efectos sistemáticos del comparador				6,7
5) Expansión térmica del bloque patrón				1,7
Temperatura de la mesa de medición:				
6) Temperatura media de la mesa	5,8			
7) Variación cíclica de la temperatura de la habitación				10,2
8) Diferencia entre los coeficientes de expansión térmica de los bloques comparados				2,9
9) Diferencia de temperatura de los bloques		16,6		
Incertidumbre total $u = 34$ nm				

Tabla 2.1: Detalle de las incertidumbres presentes en una comparación de longitudes mediante un comparador de bloques.

Longitud nominal	Grado K	Grado 0	Grado 1	Grado 2
De 0,5mm hasta 150mm	50 nm	100 nm	150 nm	250 nm

Tabla 2.2: Valores de planitud de bloques para longitudes de 0,5 mm hasta 150 mm.

- 5) Midiendo la temperatura del bloque es posible conocer cuánto se expandió un bloque respecto a la longitud que posee a 20°C , a la cual fue calibrado. Los coeficientes de expansión térmica tienen incertidumbres con lo cual, como no se tiene acceso al análisis estadístico de esta componente, es necesario introducirla como una componente tipo B y claramente es sistemática ya que el valor del coeficiente de dilatación térmica que se usa en las correcciones difiere del mejor valor que se podría medir para ese bloque.
 - 6) La mesa metálica del comparador sobre la que se apoyan los bloques posee una temperatura que precisa ser determinada ya que define la temperatura de aquellos. La incertidumbre por fluctuaciones al azar de la temperatura medida se traduce (vía el coeficiente de dilatación térmica del bloque) en una incertidumbre de longitud.
 - 7) El aire de la habitación que rodea al bloque y al comparador de bloques puede tener variaciones (en escalas de tiempo largas comparadas con el tiempo de medición) que no se pueden controlar pero que se sabe por estudios previos, que están acotadas a un intervalo dado. Esto conduce a un error sistemático que es de tipo B.
 - 8) Los coeficientes de dilatación térmica de los bloques que se comparan en general no son iguales. Sin embargo la diferencia está acotada a un intervalo. Esto conduce a una componente de incertidumbre tipo B, que introduce un efecto sistemático en las mediciones.
 - 9) En todo sistema en el que la temperatura cambia en función del tiempo (aunque sea unas pocas milésimas de grado por minuto) aparecen gradientes espaciales de temperatura los cuales se conocen por estudios previos que nunca superan un cierto valor. En este caso, como la fluctuación es al azar y dinámica, esta componente de incertidumbre es aleatoria pero de tipo B.
-

2.4.1. Cómo comunicar el valor de una magnitud

Una cantidad debe ser expresada indicando su valor (C_0), la incertidumbre absoluta asociada (U_0) y la unidad en que fue medida, es decir:

$$C = (C_0 \pm U_0) \text{ [unidad]}$$

A veces también es posible indicar la incertidumbre de manera relativa $E = U_0/C_0$ o de manera porcentual, que es la incertidumbre relativa multiplicada por 100 y expresada como un porcentaje ($E\% = 100 U_0/C_0$).

2.4.2. Precisión y exactitud de una medición

Asociado a una medición hay dos conceptos que son necesarios definir:

Precisión: Es una medida de cuan bien uno puede repetir las mediciones. Mientras más a menudo se consiguen números cercanos unos a otros para la misma medida, mayor es la precisión.

Diremos que una medida $C = (C_0 \pm U_0)$ es más precisa que otra $C = (C_1 \pm U_1)$ si

$$(2.1) \quad \frac{U_0}{C_0} < \frac{U_1}{C_1}$$

La comparación puede realizarse inclusive si C_0 y C_1 están asociados a distintas magnitudes. Por ejemplo, la mejor precisión que se consigue actualmente en mediciones de tiempo es una parte en 10^{15} (10^{-15}), mientras que la mejor precisión en mediciones de masa es una parte en 10^9 (10^{-9}). Por lo tanto es corriente afirmar que las mediciones de longitud son más precisas que las de masa.

Exactitud: es una medida de cuan próximo está el resultado de un experimento del valor aceptado de la cantidad que uno quiere medir.

Valor de referencia aceptado es aquel que se obtendría con el mejor procedimiento de medición del momento para esa cantidad.

Debe notarse que los resultados de una medición pueden ser: precisos y exactos, precisos pero inexactos, exactos pero imprecisos o, en el peor de los casos, imprecisos e inexactos. Una idea gráfica de estas distintas posibilidades se ejemplifica en la Figura 2.2.

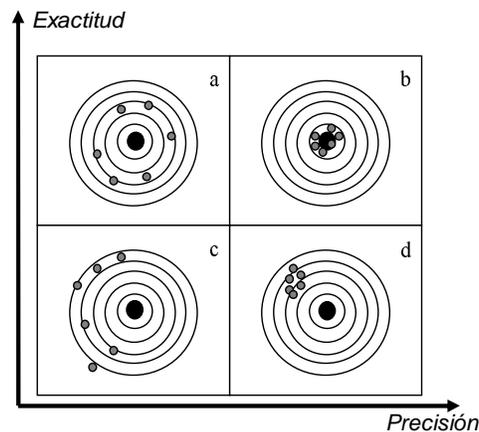


Figura 2.2: Esquema de la relación entre exactitud y precisión. El círculo negro representa el valor aceptado y los círculos grises más pequeños representan las valores de distintas mediciones. (a) Resultados exactos pero imprecisos, (b) precisos y exactos, (c) imprecisos e inexactos y (d) precisos pero inexactos.

2.5. Mediciones indirectas

Existen muchos experimentos en los cuales la cantidad requerida se obtiene a partir de valores medidos directamente (por ejemplo, largo, masas, lapsos, etc). Sin embargo hay otro sinnúmero de situaciones en las que la cantidad a determinar (por ejemplo, áreas, volúmenes, densidades, velocidades, etc.) requiere de la medición directas de dos o más cantidades.

Imagine que se quiere determinar el valor de una cantidad F que es función de otras dos cantidades X e Y , es decir $F = f(X, Y)$. Si se cumple que:

1. X e Y se pueden medir directamente y sus incertidumbres son ΔX_0 y ΔY_0 , respectivamente.

2. Las incertidumbres en X y en Y pueden corresponder tanto al tipo A como al tipo B.
3. Las incertidumbres en X son independientes de las incertidumbres en Y
4. $f(X, Y)$ se puede aproximar linealmente en un entorno pequeño de X_0, Y_0 definido por ΔX_0 y ΔY_0 (desarrollo de $f(X, Y)$ hasta primer orden en una serie de Taylor).

Entonces:

$$\begin{aligned}
 F &= F_0 \pm \Delta F \\
 F_0 &= f(X_0, Y_0) \\
 (2.2) \quad \Delta F &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}(X_0, Y_0) \Delta X_0\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}(X_0, Y_0) \Delta Y_0\right)^2}
 \end{aligned}$$

Si los términos entre paréntesis del lado derecho de la igualdad anterior se asocian al largo de los lados de un triángulo rectángulo, ΔF representa la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo. La desigualdad triangular permite determinar una cota superior para ΔF :

$$(2.3) \quad \Delta F \leq \left| \frac{\partial f}{\partial X}(X_0, Y_0) \right| \Delta X_0 + \left| \frac{\partial f}{\partial Y}(X_0, Y_0) \right| \Delta Y_0$$

Estudiemos algunos casos particulares que serán de utilidad:

1) Suma o resta de dos cantidades: $F = X \pm Y$. En este caso $|\partial f / \partial X| = |\partial f / \partial Y| = 1$, con lo cual

$$(2.4) \quad \Delta F = \sqrt{(\Delta X_0)^2 + (\Delta Y_0)^2}$$

Usualmente, con el fin de agilizar cálculos, se puede utilizar en lugar de la expresión anterior para ΔF , una cota superior dada por:

$$(2.5) \quad \Delta F \approx \Delta X_0 + \Delta Y_0$$

2) Producto de dos cantidades: $F = XY$. En este caso $|\partial f / \partial X| = |Y|$, $|\partial f / \partial Y| = |X|$, con lo cual resulta:

$$(2.6) \quad \Delta F = \sqrt{(Y_0 \Delta X_0)^2 + (X_0 \Delta Y_0)^2}$$

Una expresión útil para evaluar una cota superior de la incertidumbre relativa es en este caso:

$$(2.7) \quad \frac{\Delta F}{F_0} \approx \frac{\Delta X_0}{X_0} + \frac{\Delta Y_0}{Y_0}$$

3) Cociente de dos cantidades: $F = X/Y$. En este caso $|\partial f/\partial X| = |1/Y|$, $|\partial f/\partial Y| = |X/Y^2|$, por lo tanto:

$$(2.8) \quad \Delta F = \sqrt{\left(\frac{\Delta X_0}{Y_0}\right)^2 + \left(\frac{X_0}{Y_0^2} \Delta Y_0\right)^2}$$

Al igual que en el caso del producto, resulta en forma aproximada para la incertidumbre relativa:

$$(2.9) \quad \frac{\Delta F}{F_0} \approx \frac{\Delta X_0}{X_0} + \frac{\Delta Y_0}{Y_0}$$

4) Potencia de una cantidad: $F = X^n$. En este caso $|\partial f/\partial X| = |nX^{n-1}|$, y por lo tanto:

$$(2.10) \quad \Delta F = |nX_0^{n-1} \Delta X_0|$$

En este caso:

$$(2.11) \quad \frac{\Delta F}{F_0} = n \frac{\Delta X_0}{|X_0|}$$

En el caso que la cantidad F sea dependiente de p cantidades X_i , $F = f(X_1, \dots, X_p)$ con $X_i = X_{0i} \pm \Delta X_{0i}$ e $i = 1 \dots p$, la generalización es inmediata:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} F &= F_0 \pm \Delta F \\ F_0 &= f(X_{01}, \dots, X_{0p}) \\ \Delta F &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(X_{01}, \dots, X_{0p}) \Delta X_{01}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_p}(X_{01}, \dots, X_{0p}) \Delta X_{0p}\right)^2} \end{aligned}$$

y

$$(2.13) \quad \Delta F \leq \left| \frac{\partial f}{\partial X_1}(X_{01}, \dots, X_{0p}) \right| \Delta X_{01} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_p}(X_{01}, \dots, X_{0p}) \right| \Delta X_{0p}$$

2.6. Cifras significativas y redondeo

A la incertidumbre de una medición la expresaremos, en general, con una sola cifra significativa (la primera cifra diferente de cero ubicada más a la izquierda). Existen situaciones en las que es posible determinar el error experimental muy precisamente, en estos casos es factible expresarlo con dos cifras significativas, pero estas situaciones son poco comunes. Esta limitación al número de cifras significativas impone la necesidad de redondear el resultado final, hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de cual sea el número más próximo.

Los siguientes ejemplos muestran la manera correcta de expresar el valor de una cantidad con su respectivo error. En todos los casos suponga que a partir del cálculo con las cantidades medidas obtuvieron los siguientes valores de la cantidad F y su correspondiente incertidumbre.

$F_0 = 64251 \text{ m}$, $\Delta F = 325 \text{ m}$, entonces $F = (64300 \pm 300) \text{ m}$, o $F = (64,3 \pm 0,3) \times 10^3 \text{ m}$

$F_0 = 46,023 \text{ m/s}$, $F = 0,278 \text{ m/s}$, entonces $F = (46,0 \pm 0,3) \text{ m/s}$

$F_0 = 127,46^\circ\text{C}$, $F = 0,96^\circ\text{C}$, entonces $F = (127 \pm 1)^\circ\text{C}$

El redondeo debe realizarse solo al finalizar los cálculos, a fin de evitar errores introducidos por efectos del redondeo.

Capítulo 3

Tratamiento estadístico de datos experimentales

Se sabe que los valores medidos de cualquier magnitud están influenciados, en general, por incertidumbres aleatorias independientemente del cuidado con que se haya realizado el experimento. Por ejemplo, supongamos que se quiere determinar el largo de una de las mesas del laboratorio. Para ello se realizan 10 mediciones usando una regla de 20 cm de longitud. Los valores medidos se muestran en la Tabla 3.1.

119,35	119,50	119,45	119,30	119,30	119,40	119,25	119,50	119,50	119,40
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Tabla 3.1: Diez medidas de la longitud de una mesa, expresada en cm.

¿Qué valor se debería tomar como la mejor estimación de la cantidad que deseamos determinar?

Para responder a esta pregunta consideraremos un método prestado por la estadística que permite tratar la variabilidad de los datos medidos. La estadística se ocupa de proveer métodos para:

1. Organizar y resumir datos (estadística descriptiva).
2. Sacar conclusiones de los procesos o experimentos que se estuvieren estudiando basadas en la información que contienen los datos (inferencia estadística).

Esta sección se basará principalmente en la determinación del valor de la magnitud medida y de su incertidumbre. Este método es aplicable cuando se ha hecho más de una medida para describir de manera satisfactoria la dispersión de los datos debido a las incertidumbres aleatorias.

3.1. El mejor estimador y la desviación estándar

Se ha planteado el problema de definir qué valor se debería tomar como valor más razonable (o mejor estimador) de la cantidad que se desea determinar. El que surge naturalmente es la media aritmética:

$$(3.1) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Podrían considerarse otros valores, como la media geométrica:

$$(3.2) \quad \bar{x} = \sqrt[N]{x_1 \cdots x_N}$$

o la media armónica:

$$(3.3) \quad \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_N} \right)$$

También es posible considerar como mejor estimador aquel valor de x cuya suma de distancias resulte un mínimo:

$$(3.4) \quad \min_x \{|x_1 - x| + \cdots + |x_N - x|\}$$

o aquel valor de x que hace mínima la suma de cuadrados:

$$(3.5) \quad \min_x \{(x_1 - x)^2 + \cdots + (x_N - x)^2\}$$

Para el caso de la ecuación (3.4) se encuentra, dependiendo si la cantidad de datos medidos es par o impar, que habrá o no un único valor de x posible; mientras que para el caso de la ecuación (3.5), exigiendo que se anule la derivada primera, resulta:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} -2[(x_1 - x) + \cdots + (x_N - x)] &= 0 \\ x_1 + \cdots + x_N - Nx &= 0 \\ x &= \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} \end{aligned}$$

o sea, el caso de la ecuación (3.5) nos conduce a la media aritmética. El método empleado fue establecido por Gauss y es conocido con el nombre de **método de los cuadrados mínimos**.

En lo que sigue usaremos la media aritmética como mejor estimador de la cantidad medida. En el ejemplo de la Tabla 3.1, $\bar{x} = 119,395$ cm.

La segunda pregunta que uno debe hacerse es: ¿Cómo se deben usar los datos para obtener, además, un único valor que represente la incertidumbre asociada a la mejor estimación?

La Figura 3.1 presenta tres conjuntos de mediciones de la misma magnitud, realizados con el mismo método. Cada uno de estos conjuntos se denomina **muestra**. Los tres

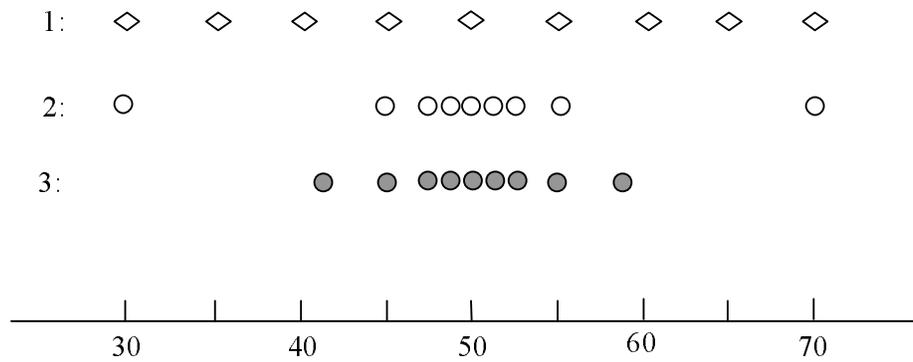


Figura 3.1: Tres conjuntos de mediciones con idéntica media pero distinta variabilidad.

conjuntos tienen la misma media aritmética ($\bar{x}=50$), pero distinto grado de dispersión en torno al centro.

La medida más sencilla de la variabilidad en un conjunto de mediciones es tomar el intervalo donde caen todas las mediciones, es decir la diferencia entre el valor máximo y el mínimo. Para el ejemplo de la Figura 3.1 ese intervalo es mucho mayor en el conjunto 1 que en el conjunto 3, pero es igual para el conjunto 1 y el 2. Sin embargo como este valor solo depende de los dos valores extremos, no tiene en cuenta la disposición de los valores restantes. Si en los conjuntos 1 y 2 no se consideran los valores extremos, hay muchos menos variabilidad en el conjunto 2 que en el 1. Por lo tanto este parámetro no es una buena medida de la variabilidad.

Otra opción es considerar las desviaciones respecto a la media, es decir, $x_1 - \bar{x}, \dots, x_N - \bar{x}$. Si estas desviaciones son pequeñas, entonces todos los valores están cerca de la media y hay poca variabilidad. Una forma sencilla de combinar las desviaciones en una sola cantidad es promediarlas (sumarlas y dividir las por el número de datos N). Sin embargo este método presenta un gran problema, como veremos a continuación. Con los datos de la Tabla 3.1, donde las incertidumbres aleatorias han causado una dispersión en los valores de la cantidad medida, se confeccionó la Tabla 3.2 que contiene las desviaciones respecto a la media, que llamaremos d_i , y sus respectivos valores al cuadrado. Se puede observar que la suma de las desviaciones es cero y por lo tanto su media también lo es.

¿Cómo hacer entonces que las desviaciones consideradas sean cantidades no negativas, para que las desviaciones positivas y negativas no se contrarresten entre sí cuando se combinan?

Lo que se toma comúnmente como una medida de la variabilidad de los datos es:

$$(3.7) \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

Esta cantidad se conoce con el nombre **varianza muestral**. Note que su unidad es el cuadrado de la unidad de la cantidad medida. Aunque la varianza es una medida fundamental de la variabilidad de los datos, es más adecuado considerar la **desviación estándar muestral** de un conjunto de datos como una medida de su variabilidad. Esta cantidad tiene las mismas unidades que la cantidad medida y se define como la raíz cuadrada de la varianza muestral:

x_i [cm]	$d_i = x_i - \bar{x}$ [cm]	$d_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$ [cm ²]
119,35	-0,045	0,002025
119,50	0,105	0,011025
119,45	0,055	0,003025
119,30	-0,095	0,009025
119,30	-0,095	0,009025
119,40	0,005	0,000025
119,25	-0,145	0,021025
119,50	0,105	0,011025
119,50	0,105	0,011025
119,40	0,005	0,000025
	$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0,07725 \text{ cm}^2$

Tabla 3.2: Desviaciones respecto a la media y sus respectivos valores al cuadrado.

$$(3.8) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Para los datos de la Tabla 3.2, la desviación estándar muestral es $s = 0,0926$ cm.

Uno se podría preguntar entonces por qué usar $N - 1$ en lugar de N en la definición de s . Observe que si bien la determinación de s está basada en N medidas, la suma de las desviaciones es cero, de tal modo que la especificación de un conjunto cualquiera de $N - 1$ valores, determina el valor restante. Además si se hiciera una sola medida, el valor medio sería igual al valor medido y en la desviación estándar muestral (Ecuación (3.8)) aparecería un cociente indeterminado, es decir, la desviación estándar estaría indefinida, lo que refleja correctamente nuestra ignorancia del valor de la cantidad medida después de realizar una sola medición.

3.2. La desviación estándar de la media o error estándar

Recordemos que la razón para llevar a cabo medidas repetidas de una cantidad durante un experimento es tratar de encontrar la mejor estimación para dicha cantidad, la cual ya establecimos que es la media aritmética, pero además nos gustaría también estimar la incertidumbre asociada a la media. ¿Por qué hablamos de la incertidumbre en la media?

Observe que si realizamos un nuevo conjunto de N mediciones de la misma cantidad, se obtendrá, en general, un nuevo valor para la media, ya que cada uno de los valores medidos será diferente a los medidos en el primer conjunto de N observaciones. De esta manera si se realizan M conjuntos de N observaciones cada uno, obtendremos M valores de la media. La pregunta es entonces:

¿Cuál es la variabilidad de esos M promedios y cómo se relaciona con la variabilidad de las mediciones de cada uno de los conjuntos?

Como en cada experimento medimos N cantidades x_1, \dots, x_N y luego calculamos:

$$(3.9) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

que es una función simple de las cantidades medidas x_1, \dots, x_N , podemos encontrar la variabilidad de \bar{x} usando simplemente la fórmula de propagación de errores. La característica llamativa de esta función es que las cantidades x_i tiene todas la misma desviación estándar muestral s por tratarse de medidas de una misma cantidad. De este modo:

$$(3.10) \quad s_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} s\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N} s\right)^2},$$

además $\partial \bar{x} / \partial x_1 = \dots = \partial \bar{x} / \partial x_N = 1/N$,
por lo tanto

$$(3.11) \quad s_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{1}{N} s\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{N} s\right)^2} = \sqrt{N \left(\frac{s}{N}\right)^2} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

que se conoce con el nombre de **desviación estándar de la media** o **error estándar**.

En nuestro ejemplo $s = 0,0926 \text{ cm} / \sqrt{10} = 0,0293 \text{ cm}$. De este modo la mejor estimación del valor de la cantidad medida, basada en las 10 mediciones realizadas es:

$$(119,40 \pm 0,03) \text{cm}$$

Una característica importante del error estándar es la \sqrt{N} en el denominador. La desviación estándar muestral s no cambia apreciablemente (a partir de un determinado N) si uno realiza más medidas, mientras que el error estándar decrece lentamente a medida que incrementamos el número de mediciones. Desafortunadamente el factor \sqrt{N} crece lentamente al aumentar N , es decir si queremos mejorar nuestra precisión en un factor 10, tendremos que aumentar N un factor 100. Por lo tanto si se quiere mejorar significativamente la precisión en las medidas, en la práctica es más conveniente mejorar la técnica experimental antes que incrementar el número de medidas. En este curso consideraremos que el máximo N es aquel para el cual el error estándar es aproximadamente la cuarta parte de la apreciación del instrumento.

Lo presentado en esta sección lo podemos resumir de la siguiente manera:

1. La mejor estimación del valor de una cantidad medida varias veces es la media aritmética.
2. La desviación estándar s es una medida de la variabilidad de los valores medidos y no es sensible al número de medidas realizadas.
3. El error estándar $s_{\bar{x}}$ es una medida de la variabilidad de la media y es la incertidumbre asociada a la media aritmética. Esta cantidad decrece al aumentar el número de medidas.

3.3. Histogramas y distribuciones

Hemos establecido que el análisis estadístico de un experimento necesita de la realización de numerosas medidas. Por lo tanto es necesario disponer de algún método para mostrar los datos. Una forma de hacer esto es a través de un **histograma**. El histograma es una representación gráfica de una distribución de frecuencias (cantidad de veces que se repite un resultado).

¿Cómo se construye un histograma?

1. En un sistema de coordenadas se representan los valores de las mediciones en las abscisas y las frecuencias relativas en las ordenadas.
2. Se divide el conjunto de mediciones en una colección de intervalos disjuntos de tal manera que cada medición esté en un intervalo. Cada uno de esos intervalos se llama **intervalo de clase** o **clase**.
3. Para seleccionar los intervalos de clase se procede de la siguiente manera:
 - a. Se calcula la cantidad \sqrt{N} (N es el número de datos) que da un valor aproximado para el número apropiado de intervalos. Se redondea al número entero superior.
 - b. Se encuentra el rango R (diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo) de los datos.
 - c. Se divide R por el número de intervalos para calcular el ancho de cada intervalo.
4. En el caso que un dato caiga en el límite de algún intervalo, utilizaremos la convención de intervalos cerrados a izquierda y abiertos a derecha.
5. Se construye una tabla que muestre para cada intervalo el número de valores n_k que cae en ese intervalo, también llamado frecuencia absoluta, y la frecuencia relativa definida como $f_k = n_k/N$.
6. Se construye un gráfico asignando a cada intervalo un rectángulo cuya altura es la frecuencia relativa.

Para ejemplificar, en la Tabla 3.3 mostramos 100 valores medidos del período de un péndulo. El valor máximo es 2,88 s y el mínimo es 2,67 s, por lo tanto $R = 0,21$ s. Por otro lado, como $N=100$, el número de intervalos será $\sqrt{100}=10$. De esta manera el ancho de cada intervalo resulta $0,21\text{ s}/10 = 0,021\text{ s} \simeq 0,02\text{ s}$. Los valores de la frecuencia y de la frecuencia relativa se muestran en la Tabla 3.4 y el histograma correspondiente en la Figura 3.2.

Se observa que el histograma presenta las siguientes características:

- El intervalo 2,77 s a 2,79 s tiene la frecuencia más alta. Este intervalo incluye la media $\bar{x} = 2,7753$ s.
- La distribución de valores es aproximadamente simétrica alrededor del intervalo que contiene a la media.

2.81	2.76	2.73	2.75	2.74	2.72	2.85	2.77	2.88	2.82
2.81	2.80	2.72	2.77	2.77	2.84	2.75	2.70	2.74	2.75
2.73	2.74	2.71	2.73	2.81	2.80	2.76	2.78	2.88	2.81
2.80	2.78	2.79	2.83	2.74	2.77	2.76	2.81	2.80	2.82
2.67	2.80	2.78	2.79	2.81	2.81	2.75	2.78	2.83	2.77
2.77	2.77	2.77	2.73	2.86	2.85	2.83	2.75	2.83	2.77
2.79	2.70	2.67	2.81	2.77	2.80	2.75	2.78	2.81	2.77
2.78	2.76	2.70	2.79	2.74	2.70	2.74	2.84	2.87	2.81
2.79	2.78	2.82	2.84	2.74	2.70	2.74	2.68	2.84	2.77
2.77	2.77	2.71	2.71	2.83	2.84	2.68	2.81	2.71	2.77

Tabla 3.3: 100 medidas del período de un péndulo expresadas en s.

Intervalo	Frecuencia	Frecuencia relativa
$2,67 \leq x < 2,69$	4	0,04
$2,69 \leq x < 2,71$	5	0,05
$2,71 \leq x < 2,73$	6	0,06
$2,73 \leq x < 2,75$	12	0,12
$2,75 \leq x < 2,77$	10	0,10
$2,77 \leq x < 2,79$	22	0,22
$2,79 \leq x < 2,81$	11	0,11
$2,81 \leq x < 2,83$	14	0,14
$2,83 \leq x < 2,85$	10	0,10
$2,85 \leq x < 2,87$	3	0,03
$2,87 \leq x < 2,89$	3	0,03

Tabla 3.4: Valores de frecuencias y frecuencias relativas para cada intervalo de clase, correspondiente a los valores de la Tabla 3.3.

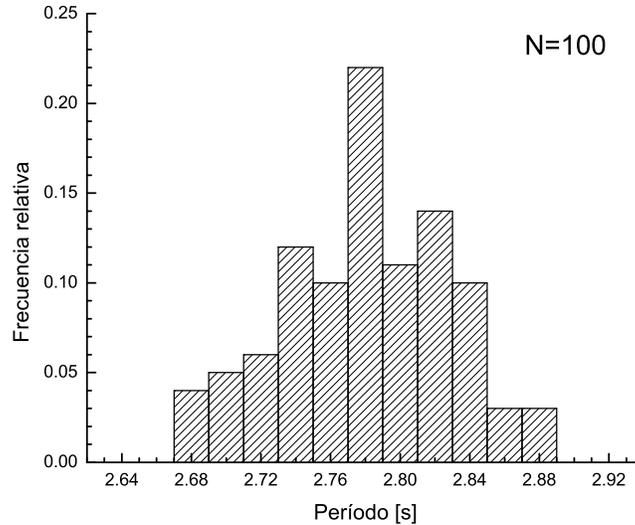


Figura 3.2: Histograma correspondiente a las medidas de la Tabla 3.3.

- Hay pocos valores que se encuentran lejos de la media.

Estas características se presentan en una gran variedad de experimentos, por lo que es importante una discusión sobre una distribución estadística que posea estas propiedades.

Puede observarse que en términos de la frecuencia relativa $f_k = n_k/N$, el promedio puede calcularse como la suma pesada de todos los valores diferentes x_k :

$$(3.12) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \sum_k f_k x_k$$

Como $\sum_k n_k = N$ resulta que $\sum_k f_k = 1$. A esta relación se la conoce como **condición de normalización**.

3.4. Distribuciones límites

En la mayoría de los experimentos, a medida que se incrementa el número de mediciones, el histograma comienza a tomar una forma simple. Esta forma se ve claramente en las Figuras 3.3 y 3.4, las cuales muestran los histogramas correspondientes a 30 y 300 mediciones, respectivamente, de la misma cantidad.

Con 300 mediciones el ancho de clase, respecto al de 30 mediciones, disminuye de 0,03 s a 0,02 s y el histograma es más suave y regular. A medida que el número de mediciones crece, su distribución se aproxima a una curva continua y definida. Cuando el número de mediciones es infinitamente grande ($N \rightarrow \infty$), la curva continua recibe el nombre de **distribución límite**. Para las medidas del ejemplo mostrado en la sección anterior la distribución límite es una curva simétrica con forma de campana (ver Figura 3.4). La

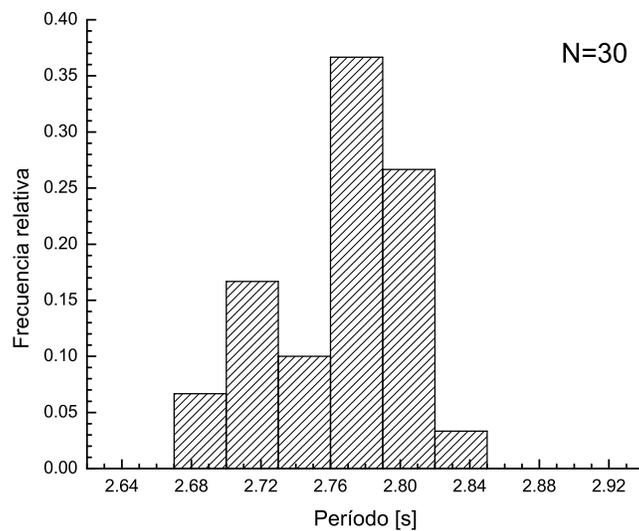


Figura 3.3: Histograma correspondiente a los 30 primeros valores de la Tabla 3.3.

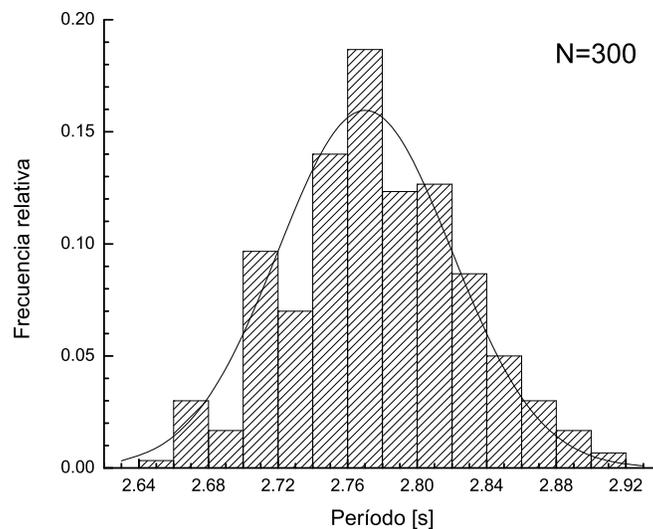


Figura 3.4: Histograma correspondiente a 300 valores del período del péndulo. La curva continua muestra la distribución límite.

distribución límite es una construcción teórica que no puede ser medida exactamente, pero mientras más mediciones se hagan, más se aproximará nuestro histograma a la distribución límite.

Una distribución límite define una función que llamaremos $f(x)$. Esta función satisface que:

$$f(x)dx = \text{fracción de medidas que caen entre } x \text{ y } x + dx ,$$

o de manera más general:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \text{fracción de medidas que caen entre } a \text{ y } b$$

Dicho de otra manera, $P(a \leq X \leq b)$ es la probabilidad de que una sola medida de x caiga en el intervalo $[a, b]$.

Dado que la probabilidad total de obtener una medición entre $-\infty$ y ∞ debe ser uno, la función límite $f(x)$ debe satisfacer:

$$(3.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Esto no significa que debemos obtener medidas en todo el rango desde $-\infty$ a ∞ . Por el contrario, en experimentos reales las mediciones caen en un intervalo pequeño y finito. Por ejemplo, las medidas del ejemplo anterior caen entre 2,64 s y 2,92 s aún después de muchas medidas. En otras palabras, $f(x)$ es esencialmente cero fuera de este rango y por lo tanto no hay diferencia si los límites de la integral se extienden desde $-\infty$ a ∞ . Más aún, si las medidas bajo consideración son muy precisas, todos los valores medidos estarán muy próximos, de tal manera que la distribución límite tendrá la forma de un pico muy angosto. En cambio, si la medición no es muy precisa, los valores medidos estarán muy dispersos y la distribución será ancha y baja como se muestra en la Figura 3.5.

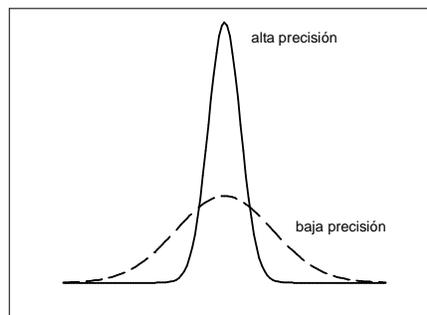


Figura 3.5: Ejemplos de distribuciones límites para alta y baja precisión.

Con esta definición es evidente que si se conociera $f(x)$ se podría calcular el valor medio que se encontraría después de muchas medidas. Ya vimos que la media de un dado número de medidas es la suma de todos los valores x_k pesados por la fracción de veces que son obtenidos (Ecuación (3.12)):

$$(3.14) \quad \bar{x} = \sum_k f_k x_k$$

Tratándose de un número grande de medidas, si se divide el rango de valores en pequeños intervalos $(x_k, x_k + \delta x_k)$, la fracción de valores en cada intervalo es $f_k = f(x_k)\delta x_k$ y en el límite que el ancho del intervalo tiende a cero y el número de medidas tiende a infinito, resulta:

$$(3.15) \quad \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Usando el mismo razonamiento y la Ecuación (3.7) se puede calcular la varianza s^2

$$(3.16) \quad s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

3.5. Distribución normal

Diferentes tipos de datos experimentales tienen diferentes tipos de distribuciones límites, sin embargo muchas mediciones experimentales tienen una distribución límite con forma de campana simétrica, en especial si las mediciones están sujetas a fuentes de incertidumbres aleatorias. La función matemática que describe este tipo de distribución límite es la **distribución normal** o **función de Gauss** y está descrita por la expresión:

$$(3.17) \quad G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde μ indica el centro de la distribución y σ representa el ancho característico de la distribución normal (Figura 3.6).

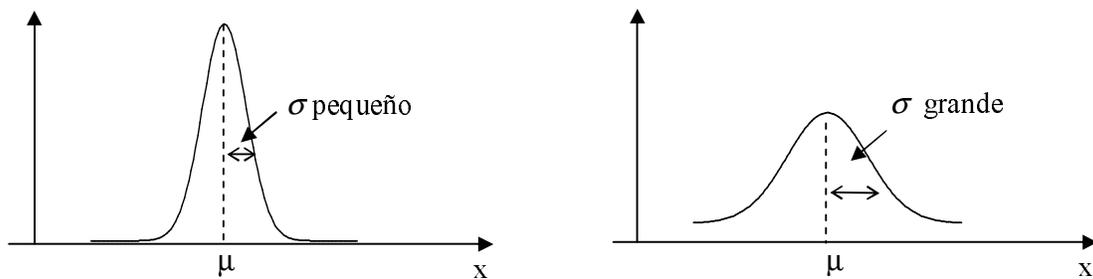


Figura 3.6: Función Gaussiana centrada en μ con dos valores distintos del ancho σ .

La función $G_{\mu,\sigma}(x)$ describe entonces la distribución límite de las medidas de una cantidad x cuyo valor medio es μ , cuando la medición está sujeta sólo a incertidumbres aleatorias.

Esta distribución está normalizada, es decir, cumple que:

$$(3.18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_{\mu,\sigma}(x) dx = 1$$

y además se satisface que $\bar{x} = \mu$ y $s^2 = \sigma^2$. Por lo tanto, si las medidas están distribuidas normalmente, μ y σ serían los valores que obtendríamos, para la media y la desviación estándar respectivamente, después de realizar un número infinito de medidas.

3.6. Distribución normal estándar

Para calcular $P(a \leq X \leq b)$ cuando x es una variable aleatoria normal se debe evaluar:

$$(3.19) \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b G_{\mu,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Esta integral no puede ser evaluada analíticamente. Para $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la expresión anterior ha sido evaluada numéricamente y tabulada para ciertos valores de a y b . Esta tabla también se puede utilizar para calcular las probabilidades de cualesquiera otros valores de μ y σ bajo consideración.

La distribución normal con valores de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ recibe el nombre de **distribución normal estándar** y está descripta por la expresión:

$$(3.20) \quad G_{0,1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

La distribución normal estándar es una distribución de referencia, de la cual se puede obtener información acerca de otras distribuciones normales. Puede observarse que $G_{0,1}(z)$ es una función simétrica respecto de $z=0$. La Tabla B.1 da $P(-\infty < Z \leq z)$, es decir el área bajo la curva a la izquierda de z , como muestra la Figura 3.7.

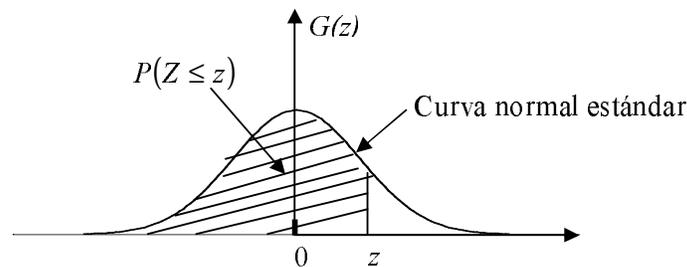


Figura 3.7: Área bajo la curva normal estándar.

De esta tabla se pueden calcular otros tipos de probabilidades:

1. $P(a \leq Z \leq b)$, para ello realizamos el siguiente cálculo:

$$(3.21) \quad P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$

Por ejemplo:

$$P(-0,2 \leq Z \leq 1,25) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq -0,2) = 0,8944 - 0,4207 = 0,4737$$

2. $P(Z \geq c)$, para ello realizamos el siguiente cálculo:

$$(3.22) \quad P(Z \geq c) = 1 - P(Z \leq c)$$

Por ejemplo:

$$P(Z \geq 0,83) = 1 - P(Z \leq 0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033$$

3.7. Distribuciones normales no estándar

Si la variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ , entonces la variable

$$(3.23) \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución normal estándar. De esta manera

$$(3.24) \quad \begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Calculemos ahora la probabilidad que una medición caiga dentro del intervalo $\mu \pm z\sigma$ ($z=1, 2, 3$, etc), es decir nos interesa calcular:

$$(3.25) \quad P(\mu - z\sigma \leq X \leq \mu + z\sigma)$$

Estandarizando resulta:

$$(3.26) \quad P(\mu - z\sigma \leq X \leq \mu + z\sigma) = P(-z \leq Z \leq z) = P(Z \leq z) - P(Z \leq -z)$$

Si $z = 1$ resulta:

$$(3.27) \quad P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826,$$

es decir, hay una probabilidad del 68,26% de que el valor medido caiga dentro de una desviación estándar de la media.

De la misma manera, si $z = 2$:

$$(3.28) \quad P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,9544,$$

es decir, hay una probabilidad del 95,44% de que el valor medido caiga dentro de dos desviaciones estándar de la media.

Finalmente si $z = 3$:

$$(3.29) \quad P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,9974,$$

o sea, hay una probabilidad del 99,74% de que el valor medido caiga dentro de tres desviaciones estándar de la media.

Volvamos a los datos de la Tabla 3.3. Usando $\bar{x} = 2,78$ s y $s = 0,05$ s como estimaciones de los valores desconocidos μ y σ , se puede observar que dentro de una desviación estándar, es decir en el intervalo $[2,72$ s, $2,82$ s], se encuentran 69 puntos. Esto equivale a una probabilidad del 69%. Dentro de dos desviaciones estándar, es decir en el intervalo $[2,67$ s, $2,87$ s], caen 98 puntos que representa el 98% de los valores conforme a las probabilidades calculadas anteriormente.

3.8. Distribución de la media muestral

Anteriormente vimos que si se toman distintas muestras de N mediciones cada una, obtendremos en cada caso un valor \bar{x} diferente. Por lo tanto \bar{X} es también una variable aleatoria, llamada estadística, porque su valor se calcula a partir de datos muestrales.

El Teorema Central del Límite (TCL) establece lo siguiente:

Sea X_1, \dots, X_N una muestra aleatoria de una distribución con media μ y desviación estándar σ . Entonces, si N es lo suficientemente grande, \bar{X} tiene aproximadamente una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{N}$. Cuanto más grande sea el valor de N , mejor será la aproximación.

La pregunta que surge entonces es ¿cuándo N es lo suficientemente grande?. Como eso depende de la distribución que tenga la variable bajo estudio, se usa en general una regla práctica que dice que si $N > 30$ se puede usar el TCL.

3.9. Estimación puntual e intervalos estadísticos basados en una sola muestra

3.9.1. Estimador puntual

Dado una magnitud de interés, el objetivo de la estimación puntual es emplear una única muestra para calcular el número que mejor represente el valor de la cantidad en cuestión. El número resultante se llama estimador puntual.

Un teorema de la estadística establece lo siguiente:

Si X_1, \dots, X_N es una muestra aleatoria de una distribución normal con parámetros μ y σ , entonces \bar{X} es el estimador con varianza mínima para μ .

Es importante destacar aquí que el mejor estimador para μ depende esencialmente de cual es la distribución de la muestra. Así, si la muestra aleatoria proviene de una distribución normal, \bar{X} es el mejor estimador. Por otro lado, si proviene de una distribución

Lorentziana o de Cauchy ¹, \bar{X} es un pésimo estimador porque es sensible a la presencia de observaciones que estén muy lejos de los restantes valores. En este caso la mediana (\tilde{X}) es el mejor estimador. La misma se define de la siguiente manera:

$$(3.30) \quad \tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{N+1}{2})} & \text{si } N \text{ es impar,} \\ \frac{x_{(\frac{N}{2})} + x_{(\frac{N}{2}+1)}}{2} & \text{si } N \text{ es par,} \end{cases}$$

donde $x_{(n)}$ corresponde al n ésimo valor medido cuando la muestra está ordenada de menor a mayor.

En cambio, si la distribución es uniforme ²

$$(3.31) \quad \bar{X}_e = \frac{\text{máx}(X_i) + \text{mín}(X_i)}{2}$$

es el mejor estimador.

Un gráfico comparativo de las distribuciones normal, Lorentziana y uniforme se muestra en la Figura 3.8.

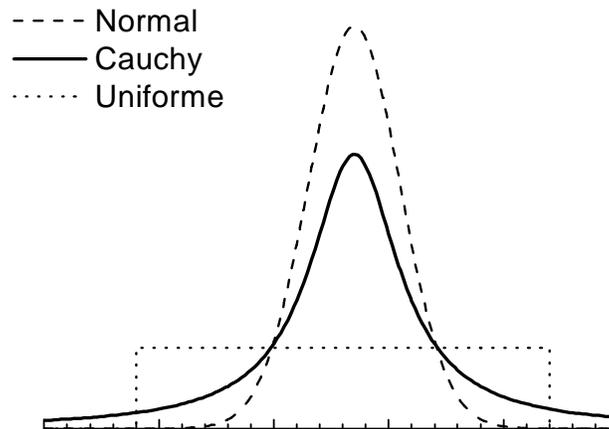


Figura 3.8: Comparación de distintas funciones de distribución.

3.9.2. Intervalos de confianza con muestras grandes

Un estimador puntual, por ser un solo número, no proporciona información alguna sobre la precisión y confiabilidad de la estimación. Una alternativa es calcular e informar todo un intervalo de valores factibles al que se denomina **intervalo de confianza** (IC). Este intervalo se calcula siempre seleccionando primero un **nivel de confianza**, que es una medida del grado de fiabilidad en el intervalo. Así, por ejemplo, un nivel de confianza

¹ $f(x) = \frac{\gamma}{\pi[\gamma^2 + (x - \mu)^2]}$, $\gamma = \text{cte.}$
² $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c & \text{si } |x - \mu| \leq c \\ 0 & \text{si } |x - \mu| > c \end{cases}$, $c = \text{cte.}$

del 95 % implica que, en promedio, 95 % de todas las muestras que se tomen daría lugar a un intervalo que incluye el valor de la magnitud medida; mientras que, en promedio, sólo un 5 % daría un intervalo erróneo. En la práctica, los niveles de confianza que se usan con más frecuencia son 90 %, 95 % y 99 %.

De acuerdo al TCL, cuando N es lo suficientemente grande, la variable estandarizada

$$(3.32) \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}}$$

tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Esto implica que

$$(3.33) \quad \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{N}}$$

es el intervalo de confianza asociado a la magnitud medida, con nivel de confianza de $100(1 - \alpha) \%$. Esta fórmula es válida independientemente de la forma de la distribución de la población. Los valores de $z_{\alpha/2}$ representan valores de la variable aleatoria Z para los cuales se cumple que $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ (ver Figura 3.9).

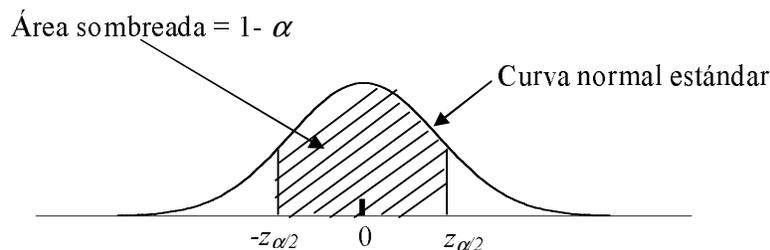


Figura 3.9: Curva normal estándar. El área sombreada representa la probabilidad $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.

Así por ejemplo si se quiere un IC del 95 %, resulta que:

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025$$

El valor de z correspondiente a $\alpha/2 = 0,025$ es $z_{\alpha/2} = 1,96$ (ver Tabla B.1), resultando un intervalo de confianza:

$$\bar{x} \pm 1,96 \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Obsérvese que si tomamos $z_{\alpha/2} = 2$, esto representa un intervalo de confianza del 95,44 % (esto es lo que se adopta usualmente en metrología) y si $z_{\alpha/2} = 1$ representa un intervalo de confianza del 68,26 %.

En el caso que los datos experimentales respondan a una distribución normal, pero el número N sea pequeño ($N < 30$), el cálculo de los intervalos de confianza requiere el uso de la llamada **distribución t de Student**, cuyas características veremos más adelante.

3.9.3. Nivel de confianza y precisión

¿Por qué fijar un nivel de confianza del 95 % cuando es posible uno del 99 %? Porque el precio que se paga por un nivel de confianza más alto es un intervalo más amplio (para el 99 % es $z_{\alpha/2} = 2,58$), asumiendo constante el número de puntos en la muestra. Es decir, tenemos mayor fiabilidad en el intervalo de 99 % precisamente porque es más amplio. Pero si consideramos que la longitud del intervalo especifica su precisión, entonces el nivel de confianza del intervalo está inversamente relacionado con su precisión. Una estimación de intervalo altamente confiable es imprecisa porque los puntos extremos del intervalo están muy separados, mientras que un intervalo preciso puede ocasionar una confiabilidad relativamente baja.

3.10. Comparación de valores determinados experimentalmente

A veces resulta necesario comparar nuestra determinación experimental del valor de una cierta magnitud con la realizada por otras personas o con un patrón de referencia y la pregunta que surge es:

¿Cómo se decide si hay o no acuerdo entre los valores medidos?

Con la ayuda estadística se puede dar un significado cuantitativo a la comparación. Consideremos que se ha realizado una determinación experimental y que se obtiene el siguiente resultado:

$$\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

Se quiere llevar a cabo un procedimiento de prueba que nos permita decidir si el valor medido es igual o distinto a un valor aceptado universalmente al que llamaremos μ_0 .

Para llevar a cabo este procedimiento lo primero que debemos hacer es definir lo que se conoce con el nombre de **hipótesis nula** (H_0) y que es la afirmación que se supone cierta. En nuestro caso la hipótesis nula es que el valor de la magnitud que hemos determinado es igual al del patrón o valor aceptado. Esta hipótesis nula se rechaza a favor de una hipótesis alternativa (H_a) solo si la evidencia muestral sugiere que H_0 es falsa. En nuestro caso la **hipótesis alternativa** es que el valor medido es distinto al valor de referencia. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\text{Hipótesis nula: } H_0 : \mu = \mu_0$$

$$\text{Hipótesis alternativa: } H_a : \mu \neq \mu_0$$

Luego se procede a determinar el parámetro conocido con el nombre de **estadístico de prueba**, que es una función de los datos de la muestra en los cuales se basará la decisión de rechazar o no la hipótesis nula.

Considerando que se ha trabajado con una muestra suficientemente grande (para garantizar normalidad de la distribución del valor medio) el estadístico de prueba es:

$$(3.34) \quad z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

Con este valor se define una región de rechazo que es el conjunto de todos los valores del estadístico de prueba para los cuales H_0 será rechazada. Esto quiere decir que la hipótesis

nula será rechazada si y solo si el valor del estadístico de prueba cae en la región de rechazo. En este caso la región de rechazo para un nivel de significancia α es:

$$(3.35) \quad RR = \{z \geq z_{\alpha/2} \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\}$$

Así para un nivel de significancia $\alpha = 0,05$, $\alpha/2 = 0,025$, entonces se determina $z_{\alpha/2}$ tal que $P(z > z_{\alpha/2}) = 0,025$, resultando $z_{\alpha/2} = 1,96$ y

$$(3.36) \quad RR = \{z \geq 1,96 \text{ o } z \leq -1,96\}$$

De esta manera si el estadístico de prueba calculado con los datos muestrales cae en la región de rechazo, se debe rechazar la hipótesis nula a favor de la alternativa, concluir que nuestras mediciones no son aceptables y tratar de encontrar el origen de la discrepancia.

Ejemplo: De una muestra de 50 lentes para anteojos se determina que el grosor promedio muestral es de 3,05 mm y que la desviación estándar muestral es de 0,34 mm. Se desea que el grosor promedio de las lentes que se fabrican sea de 3,20 mm. ¿Sugieren los datos muestrales que el grosor promedio de las lentes es diferente al deseado? Pruebe con $\alpha = 0,05$.

1. Establecer la hipótesis nula y la hipótesis alternativa adecuada:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu = 3,20$

Hipótesis alternativa: $H_a : \mu \neq 3,20$

2. Calcular el estadístico de prueba

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{3,05 - 3,20}{\frac{0,34}{\sqrt{50}}} = -3,119$$

3. Establecer la región de rechazo para el nivel de significancia seleccionado. En este caso $\alpha = 0,05$ y por lo tanto $RR = \{z \geq z_{0,025} \text{ o } z \leq -z_{0,025}\}$. Es decir hay que encontrar $z_{\alpha/2}$ tal que $P(z > z_{\alpha/2}) = 0,025$, resultando $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $RR = \{z \geq 1,96 \text{ o } z \leq -1,96\}$.
4. Como el estadístico de prueba $z = -3,119$ pertenece a la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula.

Aquí también, en caso que los datos experimentales respondan a una distribución normal, pero el número N es pequeño, el cálculo de los límites de confianza requiere el uso de la distribución t de Student cuyas características, como ya mencionamos, las veremos más adelante.

Existen otras dos posibles hipótesis alternativas cuyas respectivas regiones de rechazo con un nivel de significancia α son:

Hipótesis alternativa: $H_a : \mu < \mu_0$

$$RR = \{z \leq -z_{\alpha}\}$$

Hipótesis alternativa: $H_a : \mu > \mu_0$

$$RR = \{z \geq z_{\alpha}\}$$

En estos casos, si nuestro estadístico de prueba cae en la región de rechazo, los datos indicarían que nuestra determinación experimental está por debajo/encima del valor aceptado, respectivamente. Si se repite el experimento y se vuelve a obtener el mismo resultado, una posibilidad es que estemos en presencia de un error sistemático, pero también existen otras posibilidades que se deberán contemplar (temperatura, presión, tensión de línea, etc).

Ejemplo: El índice de dureza Rockwell para acero se determina al rayar el acero con un punzón de diamante y medir la profundidad de penetración. En 50 muestras de cierto tipo de acero el índice de dureza tuvo una media de 62 con una desviación estándar de 8. El productor afirma que este acero tiene un índice de dureza promedio de por lo menos 64. Hay suficiente evidencia para refutar la afirmación del productor con un nivel de significancia de 0.01?

1. Establecer la hipótesis nula y la hipótesis alternativa adecuada:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu = 64$

Hipótesis alternativa: $H_a : \mu < 64$

2. Calcular el estadístico de prueba

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{62 - 64}{\frac{8}{\sqrt{50}}} = -1,768$$

3. Establecer la región de rechazo para el nivel de significancia seleccionado. En este caso $\alpha = 0,01$ y por lo tanto $RR = \{z \leq -z_{0,01}\}$. Es decir hay que encontrar z_α tal que $P(z < -z_\alpha) = 0,01$, resultando $z_\alpha = 2,33$ y $RR = \{z \leq -2,33\}$.
4. El estadístico de prueba $z = -1,768$ no pertenece a la región de rechazo por lo tanto no hay suficiente evidencia para refutar al proveedor.

Como se dijo anteriormente también puede ser de interés comparar nuestro valor medido con el obtenido por otro grupo o con el obtenido por otro método experimental. Supongamos entonces que el segundo grupo o método obtuvo el siguiente resultado:

$$\bar{y} \pm s_{\bar{y}}$$

En este caso, suponiendo nuevamente que estamos en presencia de muestras grandes, el procedimiento de prueba es el siguiente:

Hipótesis nula $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Estadístico de prueba:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2}}$$

Este estadístico de prueba, así construido, tiene aproximadamente distribución normal estándar.

Hipótesis alternativa:	Región de rechazo con nivel de significancia α :
Hipótesis alternativa: $H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0$	$RR = \{z \leq -z_\alpha\}$
Hipótesis alternativa: $H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$	$RR = \{z \geq z_\alpha\}$
Hipótesis alternativa: $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$RR = \{z \geq z_{\alpha/2} \text{ o } z \leq -z_{\alpha/2}\}$

Ejemplo: Las medidas de la fuerza de corte que se obtuvieron en pruebas de compresión independientes de dos clases de suelo arrojaron los resultados que aparecen en la siguiente tabla (las medidas están en toneladas por pie cuadrados):

Suelo tipo I	Suelo tipo II
$n_1 = 30$	$n_2 = 35$
$\bar{y}_1 = 1,65$	$\bar{y}_2 = 1,43$
$s_1 = 0,26$	$s_2 = 0,22$

¿Difieren los dos tipos de suelo en lo que se refiere a la fuerza de corte promedio en un nivel de significancia de 0.01?

1. Establecer la hipótesis nula y la hipótesis alternativa adecuada:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Hipótesis alternativa: $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2. Calcular el estadístico de prueba

$$z = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = 3,648$$

3. La región de rechazo está dada por $RR = \{z \geq z_{0,005} \text{ o } z \leq -z_{0,005}\}$. Es decir hay que encontrar $z_{\alpha/2}$ tal que $P(z < -z_{\alpha/2}) = 0,005$, resultando $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $RR = \{z \geq 2,575 \text{ o } z \leq -2,575\}$.
4. Como el estadístico de prueba pertenece a la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula a favor de la alternativa y por lo tanto los suelos son diferentes con un nivel de significancia de 0.01.

3.11. Intervalos de confianza con muestras pequeñas

Cuando N es pequeño, ya no es tan probable que s esté cercana a σ , de modo que la variable estandarizada $Z = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{N})$ presenta aleatoriedad tanto en el numerador como en el denominador. Esto implica que la distribución de probabilidad de Z estará más dispersa que la distribución normal estándar.

En este caso la variable aleatoria:

$$(3.37) \quad T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\frac{S}{\sqrt{N}}}$$

tiene una distribución de probabilidad del tipo t -Student con $N - 1$ grados de libertad. La Tabla B.3 contiene valores $t_{\alpha,\nu}$ para ν grados de libertad y niveles de confianza $1 - \alpha$.

3.12. Propiedades de las distribuciones t

Una distribución t -Student está regida por un solo parámetro llamado número de grados de libertad de la distribución. Este parámetro se representa con la letra griega ν y toma valores enteros positivos. Cada valor diferente de ν corresponde a una distribución t diferente.

Si representamos con t_ν la curva función de densidad para ν ($\nu = N - 1$) grados de libertad, resulta que:

Cada curva t_ν tiene forma de campana con centro en 0.

Cada curva t_ν está más dispersa que la curva normal estándar.

A medida que ν aumenta, la dispersión de la curva t_ν correspondiente disminuye, como se observa en la Figura 3.10.

A medida que $\nu \rightarrow \infty$, la secuencia de la curva t_ν se aproxima a la curva normal estándar.

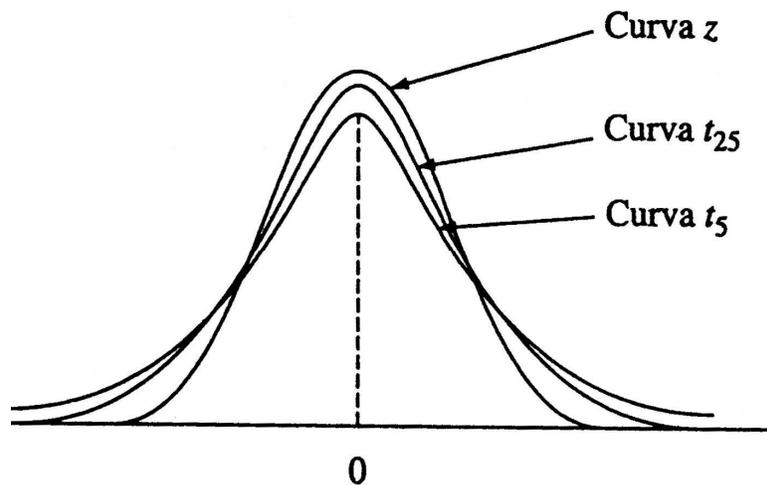


Figura 3.10: Curva t -Student para diferentes grados de libertad ($\nu=5, 25$). La curva z representa la curva normal estándar.

Capítulo 4

Ajuste de una función lineal

4.1. El método de cuadrados mínimos

Un problema muy usual que se presenta en el laboratorio es la medición de variables que están relacionadas entre sí. El caso más simple es cuando tenemos dos variables, que llamaremos x e y , que siguen una relación lineal $y = ax + b$. Para cada valor de x (X_i), mediremos un valor asociado de y (Y_i). Si las observaciones se efectúan para N valores de la variable independiente x , obtendremos entonces N pares de valores (X_i, Y_i) , con $i = 1, \dots, N$. Una gráfica de los pares de valores (X_i, Y_i) , tendrá el aspecto de la Figura 4.1, donde la línea recta representa el modelo que relaciona y con x .

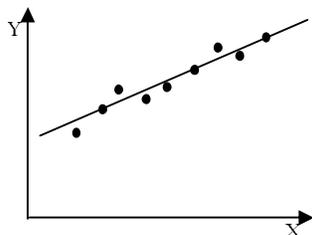


Figura 4.1: Representación gráfica de pares de valores (X_i, Y_i) , relacionados linealmente.

Para cada x el valor medido de la variable y (Y) difiere de su valor esperado, conforme al modelo, en una cantidad aleatoria ϵ , de tal manera que se cumple:

$$(4.1) \quad Y = ax + b + \epsilon = y + \epsilon$$

La variable aleatoria ϵ está normalmente distribuida con valor medio 0 y desviación estándar σ . Claramente el valor medio de Y es una función lineal de x , de tal manera que la recta de regresión es entonces la línea de valores medios como se muestra en la Figura 4.2

Se ha asumido, por simplicidad, que en cada medida toda la incertidumbre está asociada a la variable dependiente y .

Los valores de a , b y σ pueden ser estimados a partir de los pares de datos medidos (X_i, Y_i) , suponiendo que las observaciones son independientes entre sí. Un método analítico para encontrar la recta que mejor ajusta a los puntos experimentales es el método de cuadrados mínimos, también denominado regresión lineal. Según este método la

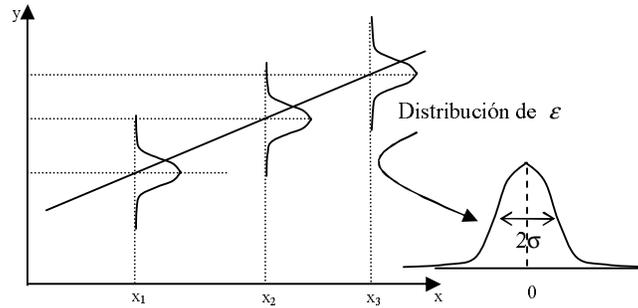


Figura 4.2: Distribución de los valores medidos Y para diferentes valores de x .

recta que proporciona el mejor ajuste de los datos es aquella para la cual los valores de a y b minimizan la suma $S(a, b)$ de los cuadrados de las distancias verticales d_i (ver Figura 4.3).

$$\begin{aligned}
 S(a, b) &= \sum_{i=1}^N d_i^2 \\
 &= (Y_1 - y_1)^2 + \dots + (Y_N - y_N)^2 \\
 (4.2) \quad &= \sum_{i=1}^N [Y_i - (aX_i + b)]^2 + \dots + [Y_N - (aX_N + b)]^2
 \end{aligned}$$

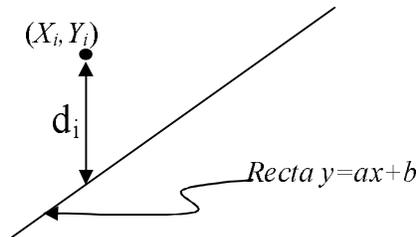


Figura 4.3: Distancia vertical d_i desde el punto (X_i, Y_i) a la recta de ajuste.

$S(a, b)$ es mínima si $|\partial S/\partial a|_{a_0, b_0} = 0$ y $|\partial S/\partial b|_{a_0, b_0} = 0$, donde a_0 y b_0 son los valores de a y b que minimizan S y reciben el nombre de estimadores de cuadrados mínimos. Por lo tanto, a partir de (4.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (aX_i + b)](-X_i) = 0 \\
 (4.3) \quad \frac{\partial S}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (aX_i + b)](-1) = 0
 \end{aligned}$$

Distribuyendo las sumatorias y evaluando en a_0 y b_0 , el sistema de ecuaciones anterior se reduce a:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^N X_i + Nb_0 &= \sum_{i=1}^N Y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N X_i^2 + b_0 \sum_{i=1}^N X_i &= \sum_{i=1}^N X_i Y_i \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales para a_0 y b_0 posee solución única con la condición que al menos dos X_i sean diferentes. En este caso:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \\ b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N Y_i - a_0 \sum_{i=1}^N X_i}{N} = \bar{Y} - a_0 \bar{X} \end{aligned}$$

donde

$$(4.6) \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N}$$

$$(4.7) \quad S_{XY} = \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N Y_i \quad S_{XX} = \sum_{i=1}^N X_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2$$

También resulta necesario estimar la varianza σ^2 . La misma da una idea de cuán dispersos están los valores observados Y_i respecto de las correspondientes ordenadas (para cada valor de X_i) en la recta de ajuste.

$$(4.8) \quad \sigma^2 \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N [Y_i - (a_0 X_i + b_0)]^2}{N - 2} = \frac{SSE}{N - 2}$$

donde SSE es $S(a_0, b_0)$. El $N - 2$ en el denominador aparece ya que el sistema de ecuaciones (4.5) impone condiciones de vínculo (reduce los grados de libertad) tales que si se tienen $N - 2$ pares (X_i, Y_i) totalmente independientes los restantes dos quedan unívocamente determinados por el sistema (4.5) (asumiendo que ya se han determinado a_0, b_0). Del mismo modo se puede pensar que si mido solo dos puntos (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) aún cuando se puede determinar a_0 y b_0 queda indeterminada la varianza muestral de Y .

4.2. Coeficiente de determinación y de correlación lineal

En este punto uno se podría preguntar si los valores medidos (X_i, Y_i) realmente responden a una relación lineal. Para responder a esta pregunta debemos idear una cierta medida de qué tan bien la recta encontrada ajusta los datos.

El grado en que un conjunto de puntos admite una relación lineal entre x e y es medida por el **coeficiente de determinación**, representado por r^2 , y está dado por la expresión:

$$(4.9) \quad r^2 = 1 - \frac{SSE}{S_{YY}}$$

donde

$$(4.10) \quad S_{YY} = \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$$

El coeficiente de determinación r^2 es un número que varía entre 0 y 1. Si este número es cercano a 1, los puntos, en general, yacen próximos a alguna línea recta; si r^2 es cercano a 0, los puntos tienen poca tendencia a yacer sobre una línea recta.

Es importante destacar aquí que algunos autores usan el coeficiente de correlación r definido de la siguiente manera:

$$(4.11) \quad r = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 (Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}}$$

Las propiedades más importantes de r son las siguientes:

El valor de r no depende de cuál de las dos variables bajo estudio está marcada como x y cuál como y .

El valor de r es independiente de las unidades en las que se midan x e y .

$$-1 \leq r \leq 1$$

$r=1$ si y solo si todos los pares (X_i, Y_i) están en una línea recta con pendiente positiva y $r=-1$ si y solo si todos los pares (X_i, Y_i) están en una línea recta con pendiente negativa.

El cuadrado del coeficiente de correlación da el coeficiente de determinación.

4.3. Desviación estándar asociadas a los parámetros de ajustes

Las incertidumbres asociadas a a_0 y b_0 pueden ser expresadas en términos de s^2 . De las ecuaciones (4.5) y recordando que se ha asumido, por simplicidad, que en cada medida toda la incertidumbre está asociada a la variable dependiente y , resulta que

$$(4.12) \quad \begin{aligned} a_0 &= a_0(Y_1, \dots, Y_N) \\ b_0 &= b_0(Y_1, \dots, Y_N) \end{aligned}$$

con lo cual sus incertidumbres se pueden calcular propagando las incertidumbres de las cantidades determinadas de manera directa:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} s_{a_0} &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial a_0}{\partial Y_i} \right|^2 \sigma_{Y_i}^2} \\ s_{b_0} &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial b_0}{\partial Y_i} \right|^2 \sigma_{Y_i}^2} \end{aligned}$$

Dado que $\sigma_{Y_i}^2 = \sigma^2 \approx s^2$, para $i = 1, \dots, N$, se obtiene después de un poco de álgebra:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} s_{a_0} &= \frac{s}{\sqrt{S_{XX}}} \\ s_{b_0} &= \frac{s}{\sqrt{S_{XX}}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N X_i^2}{N}} \end{aligned}$$

La incertidumbre del parámetro a_0 también puede escribirse en términos del coeficiente de correlación lineal r de la siguiente manera:

$$(4.15) \quad s_{a_0} = \sqrt{\frac{a_0^2}{N-2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right)}$$

Estas expresiones son de gran utilidad para estimar s_{a_0} y s_{b_0} ya que la mayoría de las calculadoras dan los valores de los parámetros a_0 , b_0 y r .

Haber despreciado las incertidumbres en x , y considerar sólo las incertidumbres en y , es válido solo si la variación producida en y causada por una variación de x (correspondiente a la incertidumbre en su determinación) es mucho más pequeña que la incertidumbre en la determinación de y . Esto es equivalente a pedir:

$$(4.16) \quad \sigma_x \frac{\partial y}{\partial x} \ll \sigma_y \quad \text{o} \quad \frac{\partial y}{\partial x} \ll \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

donde $\partial y/\partial x$ es la pendiente de la función $y = y(x)$ estimada a partir del gráfico de los pares (X_i, Y_i) .

En cambio si se cumple:

$$(4.17) \quad \frac{\partial y}{\partial x} \gg \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

es necesario intercambiar las variables x e y para aplicar el método de regresión lineal precedente.

La situación más compleja ocurre cuando

$$(4.18) \quad \frac{\partial y}{\partial x} \sim \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

caso que no será analizado en el presente curso.

Trabajemos un poco con la incertidumbre asociada a la pendiente para ver si es posible hacer una estimación de la misma, previa a la realización del experimento. La incertidumbre en la pendiente se puede escribir de la siguiente forma:

$$(4.19) \quad s_{a_0} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}}$$

Una situación frecuente en el laboratorio es aquella en la que se conoce el rango de la variable independiente para el cual se llevarán a cabo las mediciones. Este rango de medición podría estar limitado, por ejemplo por cuestiones experimentales. Además, es común, que se elijan los puntos de medición de tal manera que queden distribuidos de manera aproximadamente uniforme. Con el objetivo de estimar el número mínimo de pares de valores a medir para obtener una incertidumbre predeterminada en la pendiente, trataremos de encontrar una expresión para el error en la pendiente en términos de la longitud del intervalo de medición ($L = X_N - X_1$) y de N .

Expresando los X_i de la siguiente manera:

$$(4.20) \quad X_i = X_1 + (i - 1) \delta,$$

donde δ es la distancia entre los puntos, obtenemos después de cierta álgebra:

$$(4.21) \quad s_{a_0} \approx \frac{s}{L} \sqrt{\frac{12}{N}}$$

Se puede observar que el error en la pendiente disminuye al aumentar tanto el intervalo de medición como el número de puntos. Por lo tanto, si el intervalo de medición está predeterminado, esta expresión es útil para estimar el número de puntos a medir cuando se desea determinar la pendiente con una cierta incertidumbre.

4.4. Intervalo de confianza para la pendiente

Un teorema de la estadística establece que las suposiciones del modelo de regresión lineal simple implican que la variable estandarizada asociada a la pendiente tiene una distribución t con $N - 2$ grados de libertad. Por ello, un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para la pendiente a es:

$$(4.22) \quad a = a_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2}, N-2} s_{a_0}$$

4.5. Ajuste pesado

Si ahora para cada X_i los valores Y_i difieren de su valor esperado en una cantidad aleatoria que está normalmente distribuida con valor medio 0, pero sus desviaciones estándares son diferentes entre sí ($\sigma_i, i = 1, \dots, N$), el método de encontrar el ajuste óptimo de los datos será encontrar valores de a_0 y b_0 que minimicen la suma pesada de los cuadrados de las distancias verticales:

$$(4.23) \quad S(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{d_i^2}{\sigma_i^2}$$

Procediendo como en el caso anterior, se obtienen para los parámetros de la recta de ajuste:

$$(4.24) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{\sigma_i^2}}{\Delta} \\ b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{X_i Y_i}{\sigma_i^2}}{\Delta} \end{aligned}$$

donde se ha definido:

$$(4.25) \quad \Delta = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{X_i}{\sigma_i^2} \right)^2$$

Usando (4.13), la expresión para los errores en los parámetros resulta:

$$(4.26) \quad \begin{aligned} s_{a_0} &= \sqrt{\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \\ s_{b_0} &= \sqrt{\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}} \end{aligned}$$

4.6. Transformación de funciones en funciones lineales

En el procedimiento desarrollado anteriormente se ha asumido que la función de ajuste es lineal en los coeficientes. Ocurre con frecuencia que la relación entre las variables a medir no es lineal. En este caso, a veces es posible elegir una nueva variable de modo de obtener una relación lineal. Estas situaciones podemos ilustrarlas con los siguientes ejemplos:

1. Período de oscilación de un resorte:

Si la variable x es la masa M y la variable y es el período de oscilación T de un resorte, de constante elástica k , entonces la relación entre T y M está dada por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Esta función puede ser transformada en una función lineal de dos maneras:

$$\begin{aligned} y = T, \quad x = \sqrt{M}, \quad y = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} x \\ y = T^2, \quad x = M, \quad y = \frac{4\pi^2}{k} x \end{aligned}$$

2. Enfriamiento de un cuerpo

Si un cuerpo, inicialmente a temperatura T_0 , se encuentra en un ambiente a temperatura T_a , la expresión que describe la temperatura del cuerpo (T) en función del tiempo está dada por:

$$T - T_a = (T_0 - T_a) e^{-t/\tau}$$

siendo τ una constante.

Esta función puede ser transformada en una función lineal de la siguiente manera:

$$y = \ln\left(\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}\right), \quad x = t, \quad y = x - \frac{t}{\tau}$$

En términos generales si ajustamos la función linealizada $y' = f(y)$, las incertidumbres en los valores Y'_i (σ'_i) están relacionadas con las de los valores Y_i (σ_i) de la siguiente manera:

$$(4.27) \quad \sigma'_i = \left| \frac{\partial f(y)}{\partial y} \right|_{y=Y_i} \sigma_i$$

Se puede observar que aún cuando los valores σ_i no dependan de y , los valores σ'_i sí dependerán y por lo tanto será necesario aplicar el método de ajuste pesado.

Apéndice A

A.1. Sistema internacional de unidades

A.1.1. Unidades fundamentales

El sistema internacional de unidades (SI) se basa en siete unidades básicas o fundamentales correspondientes a siete magnitudes fundamentales e independientes (ver Tabla A.1).

Tabla A.1: Unidades fundamentales del SI.

Magnitud	Unidad	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	ampere/amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
intensidad luminosa	candela	cd
cantidad de sustancia	mol	mol

A.1.2. Unidades derivadas

Otras magnitudes, denominadas magnitudes derivadas, están definidas en términos de las siete magnitudes fundamentales del SI por medio de ecuaciones. La Tabla A.2 muestra algunos ejemplos de unidades derivadas. Por conveniencia, a 22 unidades derivadas del SI se les ha asignado un nombre y un símbolo especial. Estas se presentan en la Tabla A.3.

Tabla A.2: Ejemplos de unidades derivadas del SI.

Magnitud	Unidad	Unidad expresada en término de unidades fundamentales
área	metro cuadrado	m^2
volumen	metro cúbico	m^3
densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
velocidad	metro por segundo	m/s
número de onda	recíproco del metro	m^{-1}
aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2
densidad de corriente	ampere por metro cuadrado	A/m^2
intensidad de campo magnético	ampere por metro	A/m
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2

Tabla A.3: Unidades derivadas del SI con nombres y símbolos especiales.

Magnitud	Unidad	Símbolo	Unidad expresada en término de unidades derivadas	Unidad expresada en término de unidades fundamentales
ángulo plano	radián	rad		$m/m = 1$
ángulo sólido	estereorradián	sr		$m^2/m^2 = 1$
frecuencia	hertz/hercio	Hz		s^{-1}
fuerza	newton	N		$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
presión	pascal	Pa	N/m^2	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
energía, trabajo, cantidad de calor	joule/julio	J	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2/s^2$
potencia	watt/vatio	W	J/s	$kg \cdot m^2/s^3$
carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb/culombio	C		$s \cdot A$
diferencia de potencial eléctrico,	volt/voltio	V	$W/A, J/C$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
fuerza electromotriz	farad/faradio	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
capacidad eléctrica, capacitancia	ohm/ohmio	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
resistencia eléctrica	siemens	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
conductancia eléctrica	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
flujo magnético	tesla	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
densidad de flujo magnético	henry/henrio	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
inductancia	grado Celsius	$^{\circ}C$		K
temperatura Celsius	lumen	lm	$cd \cdot sr$	$m^2 \cdot m^{-2} \cdot cd = cd$
flujo luminoso	lux	lx	lm/m^2	$m^2 \cdot m^{-4} \cdot cd = m^{-2} \cdot cd$
iluminancia	becquerel	Bq		s^{-1}
actividad (de un radionucleido)	gray	Gy	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
dosis absorbida, energía específica (impartida), kerma	sievert	Sv	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
dosis equivalente	katal	kat		$s^{-1} \cdot mol$
actividad catalítica				

A.1.3. Prefijos del SI

Tabla A.4: Prefijos asignados a múltiplos y submúltiplos de unidades del SI.

Múltiplos y submúltiplos	Nombre	Símbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Apéndice B

B.1. Área bajo la curva normal estándar

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0038
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0310	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3482
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

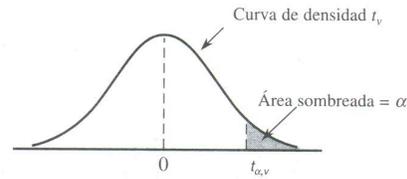
Tabla B.1: Área bajo la curva normal estándar¹.

¹Tabla extraída de J.L. Devore, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, 5ta. ed. (International Thomson, 2001), pág. 710 y 711.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8840	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Tabla B.2: Área bajo la curva normal estándar (continuación).

B.2. Valores críticos para la distribución t de Student



ν	α						
	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Tabla B.3: Valores críticos ($t_{\alpha, \nu}$) para la distribución t para ν grados de libertad².

²Tabla extraída de J.L. Devore, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, 5ta. ed. (International Thomson, 2001), pág. 713

Bibliografía

- J.R. Taylor, *An introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, 2da. ed. (University Science Book, 1997).
- P. Bevington y D. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science*, 3ra. ed. (Mc. Graw Hill, 2003).
- S.G. Rabinovich, *Measurements Errors and Uncertainties: Theory and Practice*, 3ra. ed. (Springer, 2005).
- L. Kirkup, *Experimental Methods: An Introduction to the Analysis and Presentation of Data* (John Wiley & Son, 1997).
- A. Maiztegui y R. Gleiser, *Introducción a las Mediciones de Laboratorio*, (Editorial Kapeluz, 1980).
- J.L. Devore, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, 5ta. ed. (International Thomson, 2001).
- D. Wackerly, W. Mendenhall III y R. Scheaffer, *Estadística Matemática con Aplicaciones*, 6ta. ed. (International Thomson, 2002).
- B. Taylor y C. Kuyatt, *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*, NIST Technical Note 1297 (1994).