UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

SERIES "C"

TRABAJOS DE FÍSICA

N.º 16/2022

Series de Fourier

Guido A. Raggio

Editor: Miguel A. Chesta

CIUDAD UNIVERSITARIA 5000, CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

Series de Fourier

G.A. Raggio
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba. .

Octubre de 2015

Índice

1. Advertencia

Estas notas evolucionaron a partir de notas provisorias para la materia *Métodos Matemáticos de la Física I*, 2^{do}-cuatrimestre de 2015. Fueron revisadas y extendidas considerablemente en marzo de 2022. En el curso mencionado había poco tiempo y no se hacia mucho más que mencionar la convergencia en media cuadrática (para funciones de módulo cuadrado integrable) y se demostraba a lo sumo alguna variante del teorema de convergencia puntual para funciones suaves a trozos (por ejemplo para funciones continuamente diferenciables). Aquí damos demostraciones de ambos resultados.
En el contexto del curso mencionado, las series de Fourier eran, básicamente, herramientas para atacar ecuaciones diferenciales que era el tema nuclear. Por eso, la motivación que sigue en el Apartado 2. Las aplicaciones del método inventado por Fourier exceden por supuesto este horizonte. Y, el análisis de Fourier constituye la raíz del análisis armónico[I].
El fin de una demostración se indica con esto: $\blacksquare$
.

2. Motivación

La ecuación diferencial (lineal y de segundo orden)

$$\ddot{x}(t) + \tau^{-1}\dot{x}(t) + \beta x(t) = f(t) \tag{1}$$

donde $\tau \neq 0$, β son constantes y f es una función conocida surge en diversos problemas físicos:

- En un circuito eléctrico en serie formado por una resistencia R, una capacidad C y una inductancia L sometido a un fuerza electromotriz variable $v(t)$, se tiene la ecuación (1) para la carga en el capacitor $x(t)$ con $\tau = L/R$, $\beta = 1/LC$ y $f(t) = v(t)/L$.
- En un circuito eléctrico formado por los mismos elementos en paralelo alimentado por una corriente variable $I(t)$, se tiene (1) para la diferencia de potencial $x(t)$ con $\tau = RC$, $\beta = 1/CL$ y $f(t) = \dot{I}(t)/C$.
- Un sistema mecánico unidimensional en un potencial cuadrático y con una fuerza dispersiva proporcional a su velocidad. Por ejemplo, para un péndulo de masa m forzado por una fuerza $F(t)$ en un medio viscoso se cumple (1) con $\tau = m/k_1$, $\beta = k_2/m$ y $f(t) = F(t)/m$.

Suponemos en lo que sigue que ni τ ni β se anulan.
El caso donde la "perturbación" f es sinusoidal, i.e.

$$f(t) = \gamma \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

[I] El maravilloso librito de A. Deitmar citado en la bibliografía presenta una introducción a este tema y usa la teoría de integración de Riemann solamente es muy fácil de resolver.

Es inmediato ver que

$$y(t) = a\cos(\omega t + \phi) + b\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{2}$$

con

$$a = -\frac{\gamma(\omega/\tau)}{(\beta-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad , \quad b = \frac{\gamma(\beta-\omega^2)}{(\beta-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \ . \tag{3}$$

es una solución de (1). Podemos reescribir

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\beta-\omega^2) + (\omega/\tau)^2}}\ \mathrm{sen}(\omega t + \phi + \varphi) \ ,$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega}{\tau(\omega^2-\beta)} \ ,$$

poniendo de manifiesto que y oscila con la misma frecuencia de la perturbación pero hay un corrimiento de fase (dado por φ). Ya que tenemos una solución (i.e. y) y – como veremos más adelante – la solución general de (1) se obtiene sumándole a y la solución general de la ecuación homogénea asociada a (1), debemos discutir la solución general de

$$\ddot{u} + \tau^{-1}\dot{u} + \beta u = 0 \ . \tag{4}$$

La solución de esta ecuación no presenta mayores problemas; como veremos más adelante (verifique diferenciando y reemplazando en (4)) la solución general es:

$$u(t) = Ae^{k_+ t} + Be^{k_- t} \qquad\qquad \text{si } 1 \neq 4\beta\tau^2$$

donde $k_\pm = (2\tau)^{-1}(1 \pm \sqrt{1-4\beta\tau^2})$ son las dos raíces (distintas !) de la ecuación $k^2 + \tau^{-1}k + \beta = 0$; respectivamente

$$u(t) = Ae^{-t/(2\tau)} + Bte^{-t/(2\tau)} \qquad\qquad \text{si } 1 = 4\beta\tau^2 \ .$$

En ambos casos A, B son constantes cuyo valor queda determinado por la condición inicial (e.g., $u(0)$ y $\dot{u}(0)$ dados). Obsérvese que cuando $\tau > 0$ – lo que es usualmente el caso en problemas físicos ya que τ es el coeficiente de “fricción” en dimensiones apropiadas – se tiene que la parte real de $k_\pm$ es estrictamente negativa con lo que, en ambos casos,

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \ .$$

La solución general de (1) en el caso $f(t) = \gamma\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$ es entonces:

$$x(t) = u(t) + y(t) \ ,$$

donde las constantes libres A, B de u se determinan a través de las condiciones iniciales (e.g., $u(0) = x(0) - y(0)$, y $\dot{u}(0) = \dot{x}(0) - \dot{y}(0)$). Si $\tau > 0$ entonces obtenemos que $x(t) \asymp y(t)$

para t muy grande, o más precisamente $\lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 0$. En este contexto se conoce a $y(t)$ como el **comportamiento estacionario** de $x(t)$; este **no depende de la condición inicial**.

Consideremos ahora el caso de funciones f más complicadas pero tales que se puedan expresar como suma (finita o quizas infinita) de funciones sinusoidales,

$$f(t) = \sum_n c_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi_n) \ . \tag{5}$$

Denotando, por $y_n(t)$ la solución de (1) para el caso $f(t) = a_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi_n)$ dada por (2,3), la **linealidad** de la ecuación diferencial (1) implica que la solución general es

$$x(t) = u(t) + \sum_n y_n(t) \ ,$$

y que el comportamiento estacionario es $\sum_n y_n(t)$.

Tomemos el caso particular del desarrollo (5) donde todas las frecuencias ω_n son múltiplos enteros de una frecuencia básica ω,

$$\omega_n = n\omega \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \ ,$$

y todas las fases son triviales $\phi_n = 0$ o $\phi_n = \pi/2$. En ese caso, (5) se escribe

$$f(t) = \sum_n a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t) \ . \tag{6}$$

Es obvio que en este caso f es periódica de período $2\pi/\omega$: $f(t + (2\pi/\omega)) = f(t)$ para todo t. Fué Fourier que en el marco de sus investigaciones sobre el transporte de calor realizadas a fines del siglo XVIII y principios del XIX descubrió[II] que *"toda" función periódica* de período T (i.e., $f(t+T) = f(t)$ para todo t) admite el desarrollo (6) con frecuencia $\omega = 2\pi/T$.

Por lo tanto, la teoría de Fourier que analizaremos a continuación, nos permitiría por ejemplo, resolver la ecuación diferencial (1) para cualquier función periódica $f(t)$[III].

Supongamos que la función f definida sobre los reales a valores complejos o reales es **periódica**, vale decir hay algún real $T \neq 0$ tal que

$$f(t+T) = f(t) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Entonces $f(t-T) = f(t-T+T) = f(t)$ con lo que podemos suponer que $T > 0$ y en tal caso llamamos a T el **período** (luego se ve que $f(t+kT) = f(t)$ para todo entero $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \equiv \mathbb{Z}$)[IV]

[II] Su memoria al respecto presentada a la Academia de Ciencias de París es de 1807.

[III] Esto es ya de alguna relevancia electrotécnica.

[IV] Si f es periódica de período T puede haber un período T' más chico que T. Por ejemplo: $t \mapsto \operatorname{sen}(2t)$ es periódica de periodo 2π o π. Sin embargo para funciones continuas es fácil ver que si la función es periódica pero no constante, entonces dos períodos distintos son múltiplos enteros el uno del otro.

Si f es periódica de período T, entonces

$$g(t) = f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ ,$$

es periódica de período 2π ya que

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{T(t+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) = g(t) \ .$$

Y, inversamente, dada una función g periódica de período 2π obtenemos via $f(t) = g(2\pi t/T)$ una función periódica de período T para todo $T > 0$. Por lo tanto, si nos interesan las funciones periódicas, no nos restringimos en nada si estudiamos aquellas de período 2π.

3. Series de Fourier

3.1. Polinomios trigonométricos

Para todo entero k, la función

$$e_k(t) = e^{ikt} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

es periódica de período[V] 2π. Además se cumple la importantísima relación

$$\boxed{(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e_k(t)} e_m(t) = \delta_{k,m}} \tag{7}$$

que llamaremos **relación de ortogonalidad**.

Un **polinomio trigonométrico** P es una combinación lineal finita de funciones e_k con coeficientes complejos

$$P = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k \ . \tag{8}$$

Un polinomio trigonométrico tiene cuatro propiedades generales básicas: primero es periódico de período 2π; segundo – como consecuencia de la relación de ortogonalidad –

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} |P(t)|^2 dt = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \ ; \tag{9}$$

tercero, por el mismo motivo,

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e_k(t)} P(t) \ = \left\{ \begin{array}{lll} c_k & , & \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ con } |k| \leq N \\ 0 & , & \text{si } k \in \mathbb{Z} \text{ y } |k| > N \end{array} \right. \quad ; \tag{10}$$

y por último

$$|P(t)| \leq \sum_{k=-N}^{N} |c_k| \ . \tag{11}$$

[V] Más exactamente es constante para $k = 0$, y periódica de período $2\pi/|k|$ para $k \neq 0$

3.2. Coeficientes de Fourier - Series de Fourier

Dada una función periódica de período 2π definimos sus **coeficientes de Fourier** por

$$\boxed{\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e_n(t)} f(t)\, dt = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \quad , \quad n \in \mathbb{Z}} \ . \tag{12}$$

Si f está definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se definen los coeficientes de Fourier por la misma fórmula. Es bueno observar que los valores de f pueden alterarse en finitos puntos de $[-\pi, \pi]$ sin que cambien los coeficientes de Fourier. En particular podemos redefinir los valores de f en $\pm\pi$ como $(f(\pi) + f(-\pi))/2$, y extender a f periódicamente a toda la recta real lo que puede introducir discontinuidades iguales en todos los múltiplos enteros de π. Como en el caso de funciones periódicas, donde elegimos reducir el análisis al caso 2π-periódico, aquí también la elección del intervalo $[-\pi, \pi]$ es arbitraria sino convencional. Si ϕ es una función a valores complejos definida en un intervalo finito cerrado $[a, b]$ $(a < b)$ entonces la transformación

$$x \mapsto \frac{2\pi}{b-a}\left[x - \frac{a+b}{2}\right]$$

transforma el intervalo $[a, b]$ de manera monótonamente creciente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y a la función ϕ en la función

$$f(t) := \phi\left(\frac{b-a}{2\pi}t + \frac{b+a}{2}\right) \ , \quad -\pi \leq t \leq \pi \ .$$

Las dos preguntas naturales e importantes son: Primeramente, ¿que propiedades de la función f se reflejan (y como) en propiedades de la función $\widehat{f}$ de la variable discreta $n \in \mathbb{Z}$? Y, segundo, ¿se puede reconstruir f a partir de $\widehat{f}$? , o bien ¿es cierto –y en que sentido– que

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e_n(t) \ ?$$

Está claro que para que $\widehat{f}(n)$ sea un número finito (i.e. este definido) para todo $n \in \mathbb{Z}$ la función f debe cumplir ciertas condiciones. No podemos ni queremos discutir las condiciones más generales y menos restrictivas sobre f que garantizan esto[VI]. Supondremos a continuación que las funciones f a las cuales les calculamos sus coeficientes de Fourier, son tales que cumplen con

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt \text{ es finito} \ . \tag{13}$$

Vale decir f es de módulo integrable (según Riemann). Esto se cumple si f es continua y veremos luego otras condiciones que garantizan esta condición de integrabilidad.

[VI]Esto conduciría a la teoría de integración de Lebesgue.

Si (13) se cumple, definimos

$$\|f\|_1 := (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt \ ,$$

y obtenemos inmediatamente

$$|\widehat{f}(n)| = |(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \ | \leq \|f\|_1 \ .$$

En general tenemos

$$\widehat{f}(-n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(t)\, dt = (2\pi)^{-1} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \overline{f(t)}\, dt} = \overline{\widehat{\overline{f}}(n)} \ ;$$

o sea:

$$\boxed{\overline{\widehat{f}(n)} = \widehat{\overline{f}}(-n) \ , \quad n \in \mathbb{Z}} \ . \tag{14}$$

3.2.1. El caso de funciones reales

Si f toma valores reales, i.e., $\overline{f} = f$, entonces $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ y

$$\Re(\widehat{f}(n)) = \frac{\widehat{f}(n) + \overline{\widehat{f}(n)}}{2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \ ;$$

$$\Im(\widehat{f}(n)) = \frac{\widehat{f}(n) - \overline{\widehat{f}(n)}}{2i} = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(-nt)\, dt \ .$$

En tal caso, se llama usualmente a $2\Re(\widehat{f}(n)) =: a_n$ para $n \in \mathbb{N}$ el enésimo coeficiente del coseno y a $2\Im(\widehat{f}(-n)) =: b_n$ para $0 < n \in \mathbb{N}$ el enésimo coeficiente del seno. Se tiene

$$\boxed{\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2} \ , \quad \widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2} \ , \quad n \in \mathbb{N}} \ . \tag{15}$$

La serie de Fourier es entonces

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \ .$$

Obsérvese que debido a la paridad del coseno y del seno, para $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t) + f(-t)}{2} \cos(nt)\, dt} \ ; \tag{16}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t) - f(-t)}{2} \operatorname{sen}(nt)\, dt} \ . \tag{17}$$

Por lo tanto, si f es par ($f(-t) = f(t)$) se tiene $b_n = 0$ para todo $n > 0$; mientras que si f es impar ($f(-t) = -f(t)$) son los a_n ($n \in \mathbb{N}$) los que se anulan.

Ejemplo 3.1: $f(t) := t$ en $[-\pi, \pi]$. La función es impar de modo que $a_n = 0$ para $n \geq 0$ y integrando por partes, para $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \operatorname{sen}(nt)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\pi n^{-1} \cos(n\pi) + n^{-1} \int_0^\pi \cos(nt)\, dt \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \ .$$

La serie de Fourier es

$$-2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \ .$$

En $t = \pm\pi$, esto no converge a $f(\pm\pi) = \pm\pi$. ◀

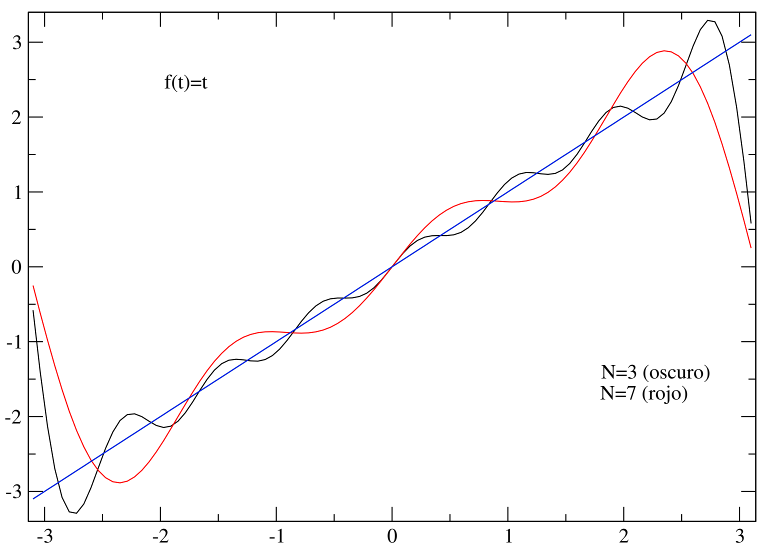

Figura 1: t

Ejemplo 3.2: $f(t) : |t|$ en $[-\pi, \pi]$ que es continua y diferenciable salvo en $t = 0$. Como f es par, se tiene $b_n = 0$ para $n \geq 1$ y para $n \geq 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt)\, dt \ .$$

Entonces $a_o = \pi$ y para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\pi n^{-1} \sin(n\pi) - n^{-1} \int_0^\pi \sin(nt)\, dt \right) = \frac{2}{n^2 \pi} \left(\cos(n\pi) - 1 \right) = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \ .$$

La serie de Fourier es

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t)) \ .$$

Por el llamado M-test, la serie es absoluta y uniformemente convergente en $[-\pi, \pi]$. Es de notar que $f(\pi) = f(-\pi)$. La serie obtenida derivando término a término le asigna el valor 0 a $t = 0$ pero f no es diferenciable en $t = 0$. Ver el ejemplo que sigue. ◀

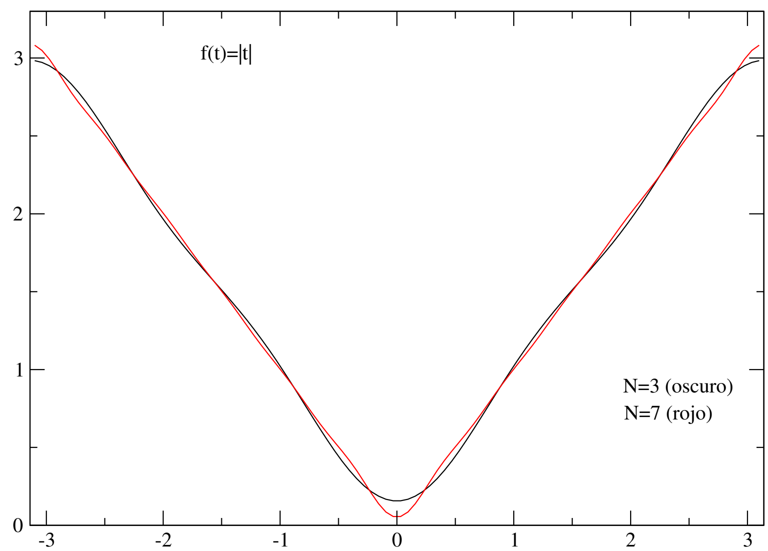

Figura 2: $|t|$

Ejemplo 3.3: $f(t) = \mathrm{sgn}(t)$ en $[-\pi, \pi]$; vale decir $f(t) = 1$ si $t > 0$ y $f(t) = -1$ si $t < 0$. Esta es la derivada de la función $|t|$ fuera de $t = 0$. La función es continua y diferenciable salvo en $t = 0$ (donde puede usted definirla como más le guste). Como f es impar, $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Para $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt = \frac{-2}{\pi n} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{-2}{n\pi}((-1)^n - 1) \ .$$

La serie de Fourier es

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t) \ .$$

Esta es la serie que se obtiene derivando término a término la serie del ejemplo anterior. ◀

Ejemplo 3.4: $f(t) = \pi - t$ para $0 < t \leq \pi$, $f(t) = -f(-t)$ para $-\pi \leq t < 0$, y $f(0) = 0$. f es impar y discontinua en $t = 0$ por lo cual $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Se calcula inmediatamente que $b_n = 2/n$ para $n \geq 1$ y la serie de Fourier es

$$2 \sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{sen}(nt)}{n} \ .$$

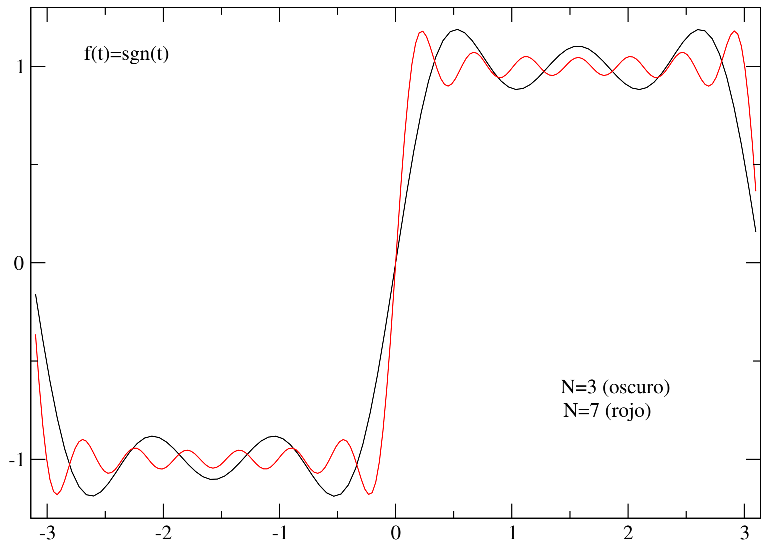

Figura 3: sgn(t)

◀

3.2.2. Propiedades básicas

Dada una función (2π-periódica o simplemente definida en $[-\pi,\pi]$) y sus coeficientes de Fourier, consideremos la función $f_N = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n$, i.e.,

$$\boxed{f_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e_k(t)} \,. \tag{18}$$

o sea el polinomio trigonométrico (de orden N) que se obtiene usando los coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ con $|n| \leq N$. Debido a (9) sabemos que

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \,.$$

Calculemos los coeficientes de Fourier de

$$g_N := f - f_N \,.$$

Tenemos

$$\widehat{g_N}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} (f(t) - f_N(t)) \, dt$$

$$= \widehat{f}(n) - \widehat{f_N}(n) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } |n| \leq N \\ \widehat{f}(n) & , \quad \text{si } |n| > N \end{cases} \,,$$

donde en el último paso usamos (10).

Supongamos que

$$\|f\|_2 := \left((2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{19}$$

es finito lo que es el caso si f es continua en $[-\pi, \pi]$; entonces[VII]

$$\|f\|_2^2 = \|g_N + f_N\|_2^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |g_N(t) + f_N(t)|^2 \, dt$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(|g_N(t)|^2 \, dt + |f_N(t)|^2 + \overline{g_N(t)} f_N(t) + g_N(t) \overline{f_N(t)} \right) dt$$

$$= \|g_N\|_2^2 + \|f_N\|_2^2 + \sum_{n=-N}^{N} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{g_N(t)} \widehat{f}(n) e^{int} + g_N(t) \overline{\widehat{f}(n)} e^{-int} \right) dt$$

$$= \|g_N\|_2^2 + \|f_N\|_2^2 + \sum_{n=-N}^{N} \left(\overline{\widehat{g_N}(n)} \widehat{f}(n) + \widehat{g_N}(n) \overline{\widehat{f}(n)} \right) = \|g_N\|_2^2 + \|f_N\|_2^2 \, .$$

Esto demuestra la parte esencial del siguiente resultado:

Teorema 1 *Si f tiene media cuadrática (19) finita entonces*

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_N(t)|^2 \, dt + \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \; ; \tag{20}$$

y vale la desigualdad de Bessel

$$\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2 \tag{21}$$

con igualdad si y solo si $f = f_N$.

Como consecuencia se obtiene inmediatamente lo que se conoce como Lema de Riemann-Lebesgue:[VIII]

$$\boxed{\lim_{|n| \to \infty} \widehat{f}(n) = 0} \, , \tag{22}$$

[VII] Es fácil ver que $\|\cdot\|_2$ satisface la desigualdad del triángulo:

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \; ;$$

esto garantiza que $\|g_N\|_2 < \infty$.

[VIII] El resultado persiste cuando se asume la condición de integrabilidad (13) que es más débil que (19). De (21) inferimos que la sucesión $\{s_N = \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \; : \; N = 1, 2, \cdots\}$ es convergente pues es acotada y creciente. Por lo tanto $\lim_{N \to \infty} s_N - s_{N-1} = \lim_{N \to \infty} |\widehat{f}(N)|^2 + |\widehat{f}(-N)|^2 = 0$.

siempre recordando que la demostración que hemos dado es válida si (19) se cumple.

Obsérvese que si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tiene coeficientes de Fourier definidos entonces f_N es continua, diferenciable y de módulo cuadrado integrable con $\|f_N\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2$.

Los coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ de una función f definida sobre $[-\pi, \pi]$ surgen también como solución de encontrar el polinomio trigonométrico que mejor aproxima a f en media cuadrática. En efecto:

Teorema 2 *Si f tiene media cuadrática (19) finita entonces para todo polinomio trigonométrico $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ se tiene*

$$\|f - P\|_2 \geq \|f - f_N\|_2$$

con igualdad si y solo si $P = f_N$.

<u>Demostración</u>: Para ver esto, calculamos

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|P\|_2^2 - (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{f(t)} P(t) + f(t) \overline{P(t)} \right) dt$$

$$= \|f\|_2^2 + \|P\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{f(t)} c_n e_n(t) + f(t) \overline{c_n} \overline{e_n(t)} \right) dt$$

$$= \|f\|_2^2 + \|P\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{\widehat{f}(n)} + \overline{c_n} \widehat{f}(n) \ .$$

y

$$\|f_N - P\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n) - c_n|^2$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 + |c_n|^2 - \overline{c_n} \widehat{f}(n) - c_n \overline{\widehat{f}(n)}$$

$$= \|f_N\|_2^2 + \|P\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \widehat{f}(n) + c_n \overline{\widehat{f}(n)} \ .$$

Restando ambas identidades tenemos:

$$\|f - P\|_2^2 - \|f_N - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f_N\|_2^2 \ ;$$

y recordando que por (20), $\|f - f_N\|_2^2 + \|f_N\|_2^2 = \|f\|_2^2$, obtenemos

$$\|f - P\|_2^2 = \|f - f_N\|_2^2 + \|f_N - P\|_2^2 \geq \|f - f_N\|_2^2 \ ,$$

con igualdad si y solo si $\|f_N - P\|_2 = 0$; pero esto último es equivalente a $f_N = P$. ■

Muchas de las relaciones que hemos obtenido surgen del hecho de que

$$\langle f, g\rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt$$

definido para funciones f y g ambas a valores complejos sobre $[-\pi, \pi]$ tiene las propiedades de un producto escalar o interno con la salvedad de que $\langle f, f\rangle$ puede anularse sin que $f \equiv 0$[IX]. Vistas desde este punto de vista, muchas relaciones que hemos estado considerando son análogas a relaciones de la geometría euclídea. Explicitamos esto más adelante.

3.2.3. Relación entre $\widehat{f}$ y $\widehat{f'}$

Si f es diferenciable y la derivada f' es tal que admite coeficientes de Fourier, entonces una integración por partes da

$$\widehat{f'}(n) = (2\pi)^{-1}(f(\pi) - f(-\pi)) + in\widehat{f}(n)\ .$$

En particular,

$$\widehat{f'}(0) = (2\pi)^{-1}(f(\pi) - f(-\pi))\ .$$

Si $f(-\pi) = f(\pi)$ (lo que se satisface si f definida sobre $\mathbb{R}$ es 2π periódica), entonces

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f'}(n)}{in}\ ,\ \ n \neq 0\ .$$

Queda claro que si podemos repetir esto varias veces, o sea si f es k veces diferenciable y $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ para $j = 0, 1, \cdots, k-1$ en el sentido de derivadas a la derecha en $-\pi$ y a la izquierda en π[X], entonces

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k}\ ,\ \ n \neq 0\ .$$

Como consecuencia, si $\widehat{f^{(k)}}(n)$ está acotado (por ejemplo si $f^{(k)}$ es de modulo integrable) entonces $\widehat{f}(n)$ será de orden $|n|^{-k}$. En general cuanto más diferenciable sea f más rápido decaen sus coeficientes de Fourier cuando $|n| \to \infty$.

Aplicando el teorema general de convergencia uniforme de una sucesión a partir de la convergencia de la sucesión de derivadas (Capítulo 7 de W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New York 1964) se obtiene

[IX]Esto es bien conocido en la teoría de integración según Riemann donde una función puede alterarse en muchos puntos sin que cambie su integral de Riemann.

[X]Esto se satisface automáticamente si f es k veces diferenciable y 2π periódica sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 3 *Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tal que la serie de Fourier converge an algún punto. Si la sucesión $\{(f_N)' : N = 1, 2, \cdots\}$ converge uniformemente a g en $[-\pi, \pi]$ entonces f es diferenciable, $f' = g$ y*

$$f' = \lim_{N\to\infty} (f_N)' = i \lim_{N\to\infty} (f_N)'(t) = i \sum_{n=-N}^{N} n\widehat{f}(n)e_n \,.$$

3.2.4. Integración de series de Fourier

Aplicando el teorema general sobre convergencia de la integral de una sucesión que converge uniformemente (Capítulo 7 de W. Rudin; loc. cit.) se obtiene

Teorema 4 *Si la serie de Fourier de $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente entonces para $-\pi \leq a < b \leq \pi$*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N(t)\,dt = -i \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{\widehat{f}(n)}{n}(e^{inb} - e^{ina}) \,.$$

3.3. Excursión: Producto escalar sobre un espacio vectorial real o complejo

La noción abstracta de espacio vectorial surge al destilar las propiedades de los conocidos $\mathbb{R}^n$.

Un espacio vectorial real/complejo $\mathbb{V}$ es un conjunto donde esta definida la suma de dos elementos – llamados vectores – y el producto de un elemento por un número real/complejo de tal manera que se cumplan las leyes usuales: más exactamente

- A cada par de vectores v, w en $\mathbb{V}$, hay asociado un vector denotado por $v + w$ de $\mathbb{V}$ llamado la suma de v y w; hay un vector especial denotado por 0 y llamado (vector) cero, tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in \mathbb{V}$; para cada vector $v \in \mathbb{V}$ hay un vector $(-v) \in \mathbb{V}$ tal que $v + (-v) = 0$.
- A cada vector v y a cada número real/complejo z hay asociado un vector denotado por $z.v$ (o simplemente zv) de $\mathbb{V}$ llamado el producto de z y de v;
- se satisfacen las siguientes relaciones:

$$v + w = w + v \,;$$
$$v + (w + x) = (v + w) + x \,;$$
$$z.(v + w) = zv + zw \,;$$
$$(z_1 + z_2).v = z_1.v + z_2.v \,;$$
$$z_1.(z_2.v) = (z_1 z_2).v \,.$$

De aquí se desprenden todas las relaciones usuales de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo: $0.v = 0$, y $(-1).v = (-v)$ lo que sugiere dejarse de jorobar y escribir $-v$ para $(-v)$.

Un **producto escalar o interno** sobre un espacio vectorial real/complejo $\mathbb{V}$ es una aplicación que asocia a cada par de vectores v y w de $\mathbb{V}$ un número real/complejo $\langle v, w\rangle$ tal que:

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} \ ;$$

$$\langle v, zw\rangle = z\langle v, w\rangle \ ;$$

$$\langle v, w + x\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, x\rangle \ ;$$

$$\langle v, v\rangle \geq 0 \ , \quad \text{con igualdad si y solo si } v = 0 \ .$$

Si en la última condición sólo se pide que $\langle v, v\rangle \geq 0$, se habla de una **forma linear hermítica (o simétrica en el caso real) positiva semi-definida**. En ese caso $\langle 0, 0\rangle = 0$ pero $\langle v, v\rangle = 0$ no implica que $v = 0$.
De estas propiedades se deduce rápidamente que

$$\langle v + \alpha w, x + \beta y\rangle = \langle v, x\rangle + \beta\langle v, y\rangle + \overline{\alpha}\langle w, x\rangle + \beta\overline{\alpha}\langle w, y\rangle \ .$$

Con cada producto escalar asociamos el número no-negativo

$$\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle} \ .$$

Es inmediato ver que

$$\|zv\|_2 = |z|\|v\|_2 \ ;$$

$$\|v\|_2 \geq 0 \ , \quad \text{con igualdad si y solo si } v = 0 \ ;$$

lo que casi alcanza para caracterizar a $\|v\|_2$ como el "largo" del vector v, o bien la distancia de v al vector cero. Lo que falta es

$$\|v + w\|_2 \leq \|v\|_2 + \|w\|_2 \ ;$$

Esto último es consecuencia (Ejercicio) de la igualdad

$$\|v + w\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle \ , \tag{23}$$

y de la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** (Ejercicio[XI])

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|_2 \ \|w\|_2 \ ,$$

con igualdad si y solo si $v = zw$ o bien $w = zv$ para algún real/complejo z.
La desigualdad de Cauchy-Schwarz es válida cuando en las propiedades de un producto escalar se omite la condición de que $\langle v, v\rangle = 0$ implica que $v = 0$ (véase el apéndice A).

A $\|\cdot\|_2$ se la llama norma (asociada con el producto interno $\langle\cdot, \cdot\rangle$), y (usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz) se tiene la **desigualdad del triángulo**:

$$|\|v\|_2 - \|w\|_2| \leq \|v + w\|_2 \leq \|v\|_2 + \|w\|_2 \ .$$

[XI]Hay z real/complejo tal que $z\langle v, w\rangle = |\langle v, w, \rangle|$; considere la parábola $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|v + tzw\|^2$. Esta es la demostración usual. En el apéndice A damos otra.

Una de las nociones cruciales en un espacio vectorial con producto interno es la de **ortogonalidad**. Dos vectores v y w de $\mathbb{V}$ se llaman **ortogonales** si $\langle v, w\rangle = 0$. La intuición que uno tiene de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es utilísima: v y w son ortogonales si forman un ángulo recto. En vistas de (23), se tiene el Teorema de Pitagoras:

$$\|v+w\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2 \ , \quad \text{si } v \text{ y } w \text{ son ortogonales} \ .$$

Un conjunto $\{e_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de vectores se llama **sistema ortonormal** si

$$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m} \ ,$$

o sea si los vectores son dos-a-dos ortogonales y todos tienen norma 1.

Para un dado sistema ortogonal $\{e_n : n = 1, 2, \cdots\}$ (que puede ser finito) y cualquier vector v escribiremos

$$v_N = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v\rangle e_n \ , \ N = 1, 2, \cdots \ .$$

Es inmediato verificar que (itere el teorema de Pitagoras)

$$\|v_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, v\rangle|^2 \ ;$$

y que $v - v_N$ es ortogonal a v_N, luego

$$\|v\|_2^2 = \|v - v_N\|_2^2 + \|v_N\|_2^2 \ .$$

También se puede ver que para toda familia $\{c_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de números reales/complejos c_n, se tiene $\|v - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\|_2 \geq \|v - v_N\|_2$ con igualdad si y solo si $c_n = \langle e_n, v\rangle$ para todo $n = 1, 2, , \cdots , N$.

Esto último debería resultar familiar puesto que lo hemos visto para la series de Fourier. En efecto, dejando de lado las condiciones precisas que garantizan que para dos funciones f y g definidas sobre $[-\pi, \pi]$ con valores reales la integral en

$$\langle f, g\rangle := (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt \tag{24}$$

exista, esta bien claro que si $\mathcal{L}_c$ denota las funciones continuas sobre $[-\pi, \pi]$ a valores complejos con la "suma"

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \ , \quad t \in [-\pi, \pi]$$

y el producto por escalares

$$(zf)(t) = zf(t) \ , \quad t \in [-\pi, \pi] \text{ y } z \text{ complejo}$$

entonces $\mathcal{L}_c$ es un espacio vectorial complejo y (24) define un producto interno. Es más, la continuidad solo se usa para garantizar que $\langle f, f\rangle$ sea finito (i.e., las funciones continuas en intervalos finitos tienen módulo cuadrado integrable) lo que garantiza que el producto escalar (24) este definido. La continuidad también garantiza que si $\langle f, f\rangle = 0$ entonces $f \equiv 0$. Esta última propiedad es la que conlleva que $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ es una norma.
Entonces tendremos un espacio vectorial con producto interno. En el apéndice A, consideramos el caso de las funciones de módulo cuadrado integrable (según Riemann). Nótese que ahora las funciones las estamos viendo como vectores en un espacio vectorial.

3.4. ¿Convergencia?

Empezaremos a indagar cuando y en que sentido tiene validez la igualdad

$$¿\; f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e_n \qquad (= \lim_{N\to\infty} f_N) \;\; ? \tag{25}$$

La serie infinita a la derecha se llama la **serie de Fourier** de f; por el momento es simplemente una expresión formal. Habrá que distinguir distintas nociones de convergencia para la sucesión $\{f_N\}$. Hay una noción que está latente en lo que hemos hecho hasta ahora. Diremos que la serie –o sea $\{f_N\}$– converge a f **en media cuadrática** si

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_2 = 0 \;.$$

Por (20), sabemos que esto ocurre si y solo si $\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \to \|f\|_2^2$.

Observe que la serie de Fourier no se altera si cambiamos arbitrariamente a la función en un conjunto finito[XII] de puntos. El problema de la convergencia puntual, i.e. $\lim_{N\to\infty} f_N(t) = f(t)$, es mucho más difícil y complicado que aquel de convergencia en media cuadrática. Los resultados conocidos se entrelazan con la historia de la teoría de funciones y del análisis funcional. La serie de Fourier de una función continua (que automáticamente satisface las condiciones de integrabilidad (13) y (19)) no es necesariamente puntualmente convergente[XIII]. No podemos hacer una discusión inteligible aquí y menos esbozar las demostraciones pertinentes. Nos contentamos solamente con la mención de algunos resultados sobre convergencia de la serie de Fourier de una función a esta función.

Los siguientes dos resultados son elementales y usan las propiedades de las series uniformemente convergentes. Omitimos las demostraciones (son buenos ejercicios para refrescar conceptos).

Lema 1 *Si $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ y la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ es convergente entonces la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$$

[XII] el conjunto puede incluso ser numerable.

[XIII] P. du Bois-Reymond construye en 1873 una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$ a una función continua f y $\widehat{f}(n)=c_n$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Lema 2 *Si la serie de Fourier de f es convergente para todo $t\in[-\pi,\pi]$, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty}|f(t)-f_N(t)|=0\ ,\quad \text{para todo } t\in[-\pi,\pi]\ ,$$

y la serie

$$g(t):=i\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\widehat{f}(n)e_n(t)$$

converge uniformemente para $t\in[-\pi,\pi]$, entonces f es diferenciable y su derivada es $g(t)$.

Proposición 3.1 *Si f es de módulo cuadrado integrable y $\{f_k : k\in\mathbb{N}\}$ es una sucesión de funciones de módulo cuadrado integrable que converge uniformemente a f en $[-\pi,\pi]$ entonces la sucesión converge en media cuadrática a f*

Demostración: $\|f-f_k\|_2^2=(2\pi)^{-1}\int_\pi^\pi|f(t)-f_k(t)|^2\,dt$ y dado $\epsilon>0$ hay $k_o\in\mathbb{N}$ tal que $|f(t)-f_k(t)|\le 2\pi\epsilon$ para $k\in\mathbb{N}$con $k>k_o$ y por ende $\|f-f_k\|_2\le\epsilon$. ■
Como consecuencia

Corolario 3.4.1 *Si la serie de Fourier de $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ que es de módulo cuadrado integrable converge uniformemente a f, entonces la serie de Fourier converge en media cuadrática a f.*

Proposición 3.2 *Sean f y g definidas en $[-\pi,\pi]$ a valores complejos y de módulo cuadrado integrable. Si las series de Fourier respectivas convergen en media cuadrática entonces*

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}\,g(t)\,dt=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\overline{\widehat{f}(n)}\,\widehat{g}(n)\ .$$

Demostración: Hemos observado que f_N $\overline{\text{y } g_N}$ son de módulo cuadrado integrable y por la ortogonalidad (7), $\langle f_N,g_N\rangle=\sum_{n=-N}^{N}\overline{\widehat{f}(n)}\widehat{g}(n)$. Tenemos

$$\begin{aligned}|\langle f_N,g_N\rangle-\langle f,g\rangle| &= |\langle f_N-f,g_N\rangle+\langle f,g_N-g\rangle|\le|\langle f_N-f,g_N\rangle|+|\langle f,g_N-g\rangle|\\ &\le\|f_N-f\|_2\,\|g_N\|+\|g_N-g\|_2\,\|f\|\le\|f_N-f\|_2\,\|g\|+\|g_N-g\|_2\,\|f\|\ ,\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad del triángulo para módulos, la desigualdad de Cauchy-Schwarz para la norma $\|\cdot\|_2$ y la desigualdad de Bessel para obtener $\|g_N\|_2\le\|g\|$. Si $\|f\|$ o $\|g\|$ se anulan la afirmación está probada. Sino sea $p=\max\{\|f\|,\|g\|\}>0$. Dado $\epsilon>0$ hay N_1 tal que $\|f-f_N\|_2\le\epsilon/(2p)$ para todo $N\ge N_1$ y hay N_2 tal que $\|g-g_n\|_2\le\epsilon/(2p)$ para todo $N\ge N_2$. Entonces para todo $N\ge\max\{N_1,N_2\}$, tenemos

$$|\langle f_N,g_N\rangle-\langle f,g\rangle\|\le\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\|f\|}{p}+\frac{\|g\|}{p}\right)\le\epsilon\ .$$

■

El siguiente resultado es fundamental:

Teorema 5 *Si f tiene media cuadrática (19) finita entonces la serie de Fourier de f converge a f en media cuadrática, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_2 = 0 \ ,$$

y vale la identidad de Parseval $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt$.

Antes de demostrar este teorema extraemos la siguiente consecuencia que indica que dos funciones continuas con los mismos coeficientes de Fourier son iguales:

Corolario 3.5.2 *Si la función h es continua sobre $[-\pi, \pi]$, y $\widehat{h}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $h = 0$.*

Demostración: De la continuidad de h se desprende que es de módulo cuadrado integrable y por el teorema $\|h\|_2 = 0$. Suponga que hay $t_o \in [-\pi, \pi]$ con $h(t_o) \neq 0$. Por la continuidad de $|h|$ hay un sub-intervalo $J \subset [-\pi, \pi]$ de largo $\ell > 0$ tal que $(|h(t_o)|^2/2) < |h(t)|^2$ para todo $t \in J$. Entonces $\|h\|_2^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2\, dt \geq (2\pi)^{-1} \int_J |h(t)|^2\, dt > (2\pi)^{-1}(|h(t_o)|^2/2)\, \ell > 0$. La contradicción implica que h es idénticamente nula. ■

3.4.1. La convergencia en media cuadrática

Demostramos aquí el Teorema 5. Repasamos primero algunos conceptos y resultados de la teoría de la integración según Riemann que nos serán de utilidad (Capítulo 6 de W. Rudin; loc. cit.). Consideramos un intervalo finito y cerrado $[a, b]$ fijo de la recta real. Si $J \subset [a, b]$ es un sub-intervalo abierto, semi-abierto o cerrado, i.e., $J = [c, d]$, o $J = [c, d)$, $J = (c, d]$ o $J = [c, d]$ donde $a \leq c < d \leq b$, el largo de J denotado por $\ell(J)$ es $d - c$. Una partición de este intervalo es un conjunto finito de sub-intervalos $\{I_j \subset [a, b] : j = 1, 2, \cdots, M\}$ con $M \geq 1$ tales que estos sub-intervalos son disjuntos dos-a-dos, $I_j \cap I_k = \emptyset$ para $j = k$, y su unión es $[a, b]$; claramente $\ell([a, b]) = \sum_{j=1}^{M} \ell(I_j)$. Los sub-intervalos I_j pueden ser abiertos, semi-abiertos o cerrados. Una partición $\mathcal{P}' = \{J_k : k = 1, 2, \cdots, M'\}$ es más fina que una partición $\mathcal{P} = \{I_j : j = 1, 2, \cdots, M\}$ si para todo $k \in \{1, 2, \cdots, M'\}$ existe un $j \in \{1, 2, \cdots, M\}$ tal que $J_k \subset I_j$. Dadas particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ siempre hay una partición $\mathcal{R}$ que es más fina que ambas.

Una función definida en $[a, b]$ a valores reales se dice escalonada (o constante a trozos) si hay una partición $\{I_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ de $[a, b]$ tal que f es constante en cada uno de los I_j. En otras palabras

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} v_j \Xi_{I_j}(x) \ , \quad x \in [a, b] \ ,$$

donde los v_j son números reales arbitrarios y Ξ_A denota la función característica de $A \subset \mathbb{R}$ definida por

$$\Xi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases} \ .$$

Es inmediato que si f es escalonada entonces es integrable según Riemann y $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{M} v_j \ell(I_j)$.

Para definir la integrabilidad según Riemann en $[a,b]$ se consideran particiones arbitrarias $\mathcal{P} = \{I_j \subset [a,b] : j = 1,2,\cdots,M\}$ y para una dada función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que es acotada (i.e. $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in [a,b]$), se definen

$$\xi_j := \sup_{x\in I_j} f(x) \ , \quad \eta_j := \inf_{x\in I_j} f(x) \ , \quad j = 1,2,\cdots,M \ .$$

Luego se consideran la sumas superior e inferior de Riemann de f asociadas a la partición $\mathcal{P}$ dadas por

$$\overline{S}(f;\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{M} \xi_j \ell(I_j) \ , \quad \underline{S}(f;\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{M} \eta_j \ell(I_J) \ .$$

Es inmediato que la suma superior no es menor que la suma inferior. Si la partición $\mathcal{P}'$ es más fina que la partición $\mathcal{P}$ se obtiene

$$\underline{S}(f;\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f;\mathcal{P}') \leq \overline{S}(f;\mathcal{P}') \leq \overline{S}(f;\mathcal{P}) \ .$$

En particular si f es constante a trozos y $\mathcal{P}'$ es más fina que la partición que define a f entonces $\underline{S}(f;\mathcal{P}') = \overline{S}(f;\mathcal{P}') = \int_a^b f(x)\,dx$. Con estos resultados se obtiene el criterio fundamental: *f es integrable (según Riemann) si para todo $\epsilon > 0$ hay una partición $\mathcal{P}$ tal que $\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \epsilon$.*
Reformulamos esto en términos de funciones escalonadas observando que asociada a cada f y cada partición $\mathcal{P} = \{I_j : j = 1,2,\cdots,M\}$ hay funciones escalonadas ψ^+, ψ^- definidas por

$$\psi^+ := \sum_{j=1}^{M} \xi_j \Xi_{I_j} \ , \quad \psi^- := \sum_{j=1}^{M} \eta_j \Xi_{I_j} \ , \quad x \in [a,b] \ ; \tag{26}$$

y estas cumplen $\psi^-(x) \leq f(x) \leq \psi^+(x)$, $x \in [a,b]$. Además $\overline{S}(f,\mathcal{P}) = \int_a^b \psi^+(x)\,dx$ y $\underline{S}(f,\mathcal{P}) = \int_a^b \psi^-(x)\,dx$. Con esto se reformula el criterio de integrabilidad:

Teorema 6 *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable según Riemann si (y sólo si) para todo $\epsilon > 0$ existen funciones escalonadas ψ y ϕ definidas en $[a,b]$ tales que $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y*

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \leq \int_a^b \phi(x)\,dx + \epsilon \ .$$

Demostración: La necesidad de la condición es lo que vimos introduciendo $\psi^\pm$. La suficiencia surge de que si $\phi \leq f \leq \psi$ entonces para cualquier partición $\mathcal{P}$ más fina que la partición asociada a ϕ y más fina que aquella asociada a ψ se tiene

$$\int_a^b \phi(x) = \underline{S}(\phi,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(\psi,\mathcal{P}) = \int_a^b \psi(x)\,dx$$

con lo cual $\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx$. ■

Encaramos la demostración del teorema de convergencia en media cuadrática en dos etapas. La primera demuestra el teorema para funciones escalonadas; la segunda lo extiende a funciones de módulo cuadrado integrable. Observamos que por el Teorema 1, $\text{lím}_{N\to\infty}\|f - f_N\| = 0$ es equivalente a $\text{lím}_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$.

Sea J un sub-intervalo de $[-\pi,\pi]$ de extremos c,d con $-\pi \leq c < d \leq \pi$. Si Ξ_J es la función característica de J sus coeficientes de Fourier son

$$\widehat{\Xi_J}(0) = \frac{d-c}{2\pi}\ ,\ \ \widehat{\Xi_j}(n) = -i\frac{e^{ind} - e^{inc}}{2\pi n}\ ,\ \ 0 \neq n \in \mathbb{Z}\ .$$

Entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Xi_j}(n)|^2 = \left(\frac{d-c}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n(d-c))}{n^2}\ . \tag{27}$$

En el apéndice D, demostramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^2} = \pi^2\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\ ,\ \ x \in [0,1]\ . \tag{28}$$

En particular $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ una conocida fórmula de Euler. Ahora $\ell(J) = d - c \leq 2\pi$ y aplicando (28) a (27),

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Xi_j}(n)|^2 = \frac{d-c}{2\pi} = \frac{\ell(J)}{2\pi}$$

pero el miembro derecho es igual a $\|\Xi_J\|_2^2$ como se calcula directamente. El teorema de convergencia en media cuadrática 5 para funciones características de sub-intervalos de $[-\pi,\pi]$ queda demostrado.

Para finalizar esta primara etapa, considere una función escalonada φ a valores reales definida en $[-\pi,\pi]$,

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{M} v_j \Xi_{I_j}(t)\ ,$$

donde $\{I_j : j = 1,2,\cdots,M\}$ es una partición del intervalo $[-\pi,\pi]$. Abreviamos $\Xi_j = \Xi_{I_j}$. Ya que si $j \neq k$, $I_j \cap I_k = \emptyset$ tenemos $\langle \Xi_j, \Xi_k\rangle = 0$ y por el Teorema de Pitagoras

$$\|\varphi\|_2^2 = \sum_{j=1}^{M} v_j^2 \|\Xi_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{M} v_j^2 \ell(I_j)/(2\pi)\ .$$

Por otro lado $\widehat{\varphi}(n) = \sum_{j=1}^{M} v_j \widehat{\Xi_j}(n)$ y

$$\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{\varphi}(n)|^2 = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{j,k=1}^{M} v_j v_k \overline{\widehat{\Xi_j}(n)}\widehat{\Xi_k}(n)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} v_j^2 \left(\sum_{n=-N}^{N} |\widehat{\Xi_j}(n)|^2 \right) + \sum_{j\neq k=1}^{M} v_j v_k \left(\sum_{n=-N}^{N} \overline{\widehat{\Xi_j}(n)} \widehat{\Xi_k}(n) \right) .$$

Ya que $\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} |\widehat{\Xi_j}(n)|^2 = \|\Xi_j\|_2^2$ por el Teorema de convergencia en media cuadrática para funciones características; y ya que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \overline{\widehat{\Xi_j}(n)} \widehat{\Xi_k}(n) = \langle \Xi_j, \Xi_k \rangle = 0$$

para $j \neq k$ por la Proposición 3.2, hemos completado la primera etapa.

Pasamos a la segunda etapa. Primero reducimos la demostración del Teorema 5 al caso donde la función toma valores reales. Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, sean $u(t) = \Re f(t)$ y $v(t) = \Im f(t)$. Entonces $|f(t)|^2 = |u(t)|^2 + |v(t)|^2$ con lo cual f es de módulo cuadrado integrable si y sólo si u y v también lo son. Ya que $f_N = u_N + iv_N$,

$$\|f - f_N\|_2 = \|u + iv - u_N - iv_N\|_2 \leq \|u - u_N\|_2 + \|v - v_N\|_2 ,$$

se tiene convergencia en media cuadrática para $\{f_N : N \in \mathbb{N}\}$ a f si la hay para $\{u_N : N \in \mathbb{N}\}$ a u y para $\{v_N : N \in \mathbb{N}\}$ a v. Con esto basta demostrar el Teorema 5 para funciones a valores reales.

Sea entonces f una funciones definida en $[-\pi, \pi]$ con valores reales que tiene media cuadrática finita (i.e., es de módulo cuadrado integrable según Riemann). En el apéndice A vemos que f es integrable según Riemann. Como es acotada, hay $C > 0$ tal que $|f(t)| \leq C$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$. Dividiendo a f por C podemos suponer que $C = 1$. Dado $\epsilon > 0$, hay una partición $\mathcal{P} = \{I_j : j = 1, 2, \cdots, M\}$ de $[-\pi, \pi]$ tal que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \epsilon^2/8$. Sean $\psi^{\pm}$ las funciones escalonadas asociadas con la partición $\mathcal{P}$ definidas en (26). Tenemos

$$-1 \leq \psi^-(t) \leq f(t) \leq \psi^+(t) \leq 1 , \quad \text{para todo } -\pi \leq t \leq \pi . \tag{29}$$

Además

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\psi^+(t) - \psi^-(t))\, dt = \overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \pi\epsilon^2/4 .$$

Sea $g := f - \psi^-$ que satisface $0 \leq g = f - \psi^- \leq \psi^+ - \psi_-$. Ya que

$$2(\psi^+ - \psi^-) - (\psi^+ - \psi^-)^2 = (\psi^+ - \psi^-)(2 - \psi^+ + \psi^-) = (\psi^+ - \psi^-)([1 - \psi^+] + [\psi^- + 1])$$

y los dos factores del término derecho son no-negativos por (29), tenemos

$$g^2 \leq (\psi^+ - \psi^-)^2 \leq 2(\psi^+ - \psi^-) ,$$

de modo que

$$\|g\|_2^2 \leq \|\psi^+ - \psi^-\|_2^2 \leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} (\psi^+(t) - \psi^-(t))\, dt \leq \epsilon^2/4 .$$

Ahora con $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) + \widehat{\psi^-}(n)$ y por ende $f_N = g_N + \psi_N^-$, el Teorema de convergencia en media cuadrática para la función escalonada ψ^- entrega la existencia de $N_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_o$

$$\|\psi^- - \psi_N^-\|_2 \leq \epsilon/2 \ .$$

Aplicando el Teorema 1 a g, nos produce

$$\|g - g_N\|_2^2 \leq \|g\|_2^2 \leq \epsilon^2/4 \ .$$

Por lo tanto, para $N \geq N_o$,

$$\|f - f_N\|_2 = \|g + \psi^- - g_N - \psi_N^-\| \leq \|g - g_N\| + \|\psi^- - \psi_N^-\| \leq \epsilon \ ,$$

lo que demuestra el teorema de convergencia en media cuadrática para funciones a valores reales y, como ya comentamos, también el mismo teorema en general.

3.4.2. La convergencia puntual (el núcleo de Dirichlet).

Lema 3 *Si t no es múltiplo entero de 2π, $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \dfrac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$.*
Además, $\lim_{t\to 2k\pi} \dfrac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} = 2n+1 = \displaystyle\sum_{j=-n}^{n} e^{ij(2\pi k)}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Demostración</u>: Use la fórmula de adición de una progresión geométrica $\sum_{j=0}^{n} z^j = (1 - z^{n+1})/(1-z)$, para $z \neq 1$, que implica $\sum_{j=1}^{n} z^j = (z - z^{n+1})/(1-z)$ con $z = e^{\pm it}$. ■

El **núcleo de Dirichlet** es la función sobre $\mathbb{R}$ definida por

$$D_n(t) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)} & , \quad t \notin \{2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\} \\ 2n+1 & , \quad t = 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases} ,$$

que es continua, par y 2π-periódica. Con el Lema 3, ya que $\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)\, dt = 2\pi\delta_{k,0}$, se obtiene

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1 \ , \tag{30}$$

y en virtud de la paridad también

$$(2\pi)^{-1} \int_{0}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1/2 \ . \tag{31}$$

Ahora, si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ admite coeficientes de Fourier,

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e_n(t) f(s) \overline{e_n(s)}\, ds$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\sum_{n=-N}^{N} e_n(t-s)\right) ds = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(t-s)\, ds \ .$$

Si tomamos una extensión 2π-periódica de f redefiniendo (arbitrariamente) si fuere necesario los valores de f en $\pm\pi$ y no distinguimos a f de su extensión, la periodicidad nos permite escribir

$$f_N(t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(t-s)\, ds = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(x+t)D_N(x)\, dx \ .$$

Pero entonces

$$f_N(t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(x)\, dx \ . \tag{32}$$

Considere una función f definida en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Si existen finitos puntos $\{t_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$ con $-\pi =: t_o < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} := \pi$ (denominados **puntos especiales**) tales que:

1. f es continua en cada uno de los intervalos (t_k, t_{k+1}), $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

2. los límites laterales

   $$f_-(t_k) := \lim_{t\to t_k^-} f(t)\ , \quad k = 1, 2, \cdots, n+1\ ;$$

   y

   $$f_+(t_k) := \lim_{t\to t_k^+} f(t)\ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots n$$

   existen y son finitos.

Entonces f se dice **continua a trozos**. Cuando $f_+(t_k) \neq f_-(t_k)$, t_k es un punto de discontinuidad de f. Si $f_+(-\pi) \neq f_-(\pi)$ incluimos a π y a $-\pi$ entre los puntos de discontinuidad. Si, además, f satisface

3. f es continuamente diferenciable en cada uno de los intervalos (t_k, t_{k+1}),
   $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

4. los límites

   $$f'_-(t_k) := \lim_{t\to t_k^-} \frac{f(t) - f_-(t_k)}{t - t_k}\ , \quad k = 1, 2, \cdots n+1\ ,$$

   y

   $$f'_+(t_k) := \lim_{t\to t_k^+} \frac{f(t) - f_+(t_k^)}{t - t_k}\ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n\ ,$$

   existen y son finitos;

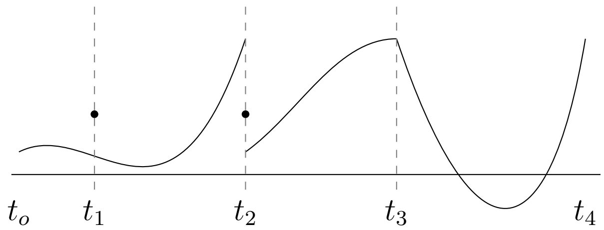

Figura 4: Una función suave a trozos

entonces decimos que f es **suave a trozos**. Observe que una función escalonada es suave a trozos.
Recalcamos que si f es suave a trozos, entonces para todo $t \in [-\pi, \pi]$, los límites laterales $f_+(t) = \lim_{h\to 0^+} f(t+h)$ y $f_-(t) = \lim_{h\to 0^-} f(t+h)$ así cómo las derivadas a izquierda $f'_-(t) = \lim_{h\to 0^-}[f(t+h) - f_-(t)]/h$ y a derecha $f'_+(t) = \lim_{h\to 0^+}[f(t+h) - f_+(t)]/h$, existen y son finitas. Los valores específicos de f en los puntos t_k, $k = 0, 1, 2, \cdots, n+1$, son irrelevantes en nuestras consideraciones.

El resultado general de convergencia puntual de la serie de Fourier de una función suave a trozos es el siguiente. La demostración nos ocupará el resto de este apartado.

Teorema 7 *Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ suave a trozos. Para todo $t \in [-\pi, \pi]$,*

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t) = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2} .$$

Lema 4 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es suave a trozos entonces para todo c, d con $a \leq c < d \leq b$*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_c^d f(t) e^{i\lambda t}\, dt = 0$$

uniformemente en (c, d).

Demostración: Sean $\{t_k : \ k = 0, 1, 2, \cdots, n+1\}$ los puntos especiales de f. Sea

$$\varphi(\lambda; c, d) = \int_c^d f(t) e^{i\lambda t}\, dt .$$

Se tiene

$$\varphi(\lambda; c, d) = \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f^{(k)}(t) e^{i\lambda t}\, dt ,$$

donde

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} f(t) & , \ \text{si } t_k < t < t_{k+1} \\ f_+(t_k) & , \ \text{si } t = t_k \\ f_-(t_{k+1} & , \ \text{si} t = t_{k+1} \end{cases} \quad , \ t_k \leq t t_{k+1} ,$$

que es continuamente diferenciable. Para cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ podemos integrar por partes para $\lambda \neq 0$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^{(k)}(t)e^{i\lambda t}\,dt = \frac{f_-(t_{k+1})e^{i\lambda t_{k+1}} - f_+(t_k)e^{i\lambda t_k}}{i\lambda} + \frac{i}{\lambda}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(k))'(t)e^{i\lambda t}\,dt \;.$$

Ya que $f^{(k)}$ es continuamente diferenciable

$$p_k := \sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |f^{(k)}(t)| \;, \quad q_k := \sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |(f^{(k)})'(t)| \;, \quad k+0,1,\cdots,n \;,$$

son finitos y con $p := \max\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ y $q := \max\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, obtenemos

$$|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^{(k)}(t)e^{i\lambda t}\,dt| \leq= \frac{|f_-(t_{k+1})| + |f_+(t_k)|}{|\lambda|} + \frac{q_k(t_{k+1}-t_k)}{|\lambda|} \leq \frac{2p+q(b-a)}{|\lambda|} \;.$$

Entonces

$$|\varphi(\lambda; c, d)| \leq \frac{(n+1)[2p+q(b-a)]}{|\lambda|} \;.$$

■

Proposición 3.3 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua a trozos y $\epsilon > 0$ entonces existe una función suave a trozos $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(t) - g(t)| \leq \epsilon$$

para todo $t \in [a,b]$ que no es punto especial de f.

Demostración: Tratamos primero el caso particular en el cual f es continua en el intervalo $[a,b]$. En ese caso, f es uniformemente continua (Cápitulo 4 de W. Rudin; loc. cit.) y dado $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(s)| \leq \epsilon$ si $|t - s| \leq \delta$. Sean $t_k := a + 2k\delta$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < b$ y $t_{n+1} \geq b$. Conviniendo que $t_{n+1} = b$, sean $s_k = (t_{k+1} + t_k)/2$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$. Para todo $t \in [t_{k+1}, t_k]$ se tiene $|t - s_k| \leq \delta$ y por ende $|f(t) - f(s_k)| \leq \epsilon$. Entonces la función

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\Xi_{[t_k,t_{k+1})} + f(s_n)\Xi_{[t_n,b]}$$

es escalonada y por ende suave a trozos. Además, para todo $t \in [a,b]$

$$|f(t) - g(t)| \leq \epsilon \;.$$

Sea f continua a trozos y $\epsilon > 0$. Sean $\{t_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$ los puntos especiales asociados a f. Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ considere la restricción de f al intervalo (t_k, t_{k+1}). Los límites de f en t_k desde la derecha y en t_{k+1} desde la izquierda existen y definen una función continua en $[t_k, t_{k+1}]$ que coincide con f salvo posiblemente en los extremos. Si

g_k denota la función escalonada definida en $[t_k, t_{k+1}]$ construida en la primera parte se tiene $|f(t) - g_k(t)|\epsilon$ para todo $t \in (t_k, t_{k+1})$. Si definimos g concatenando las funciones g_k fuera de los puntos especiales y definimos g en los puntos especiales como más le plazca (por ejemplo usando los valores $f(t_k)$) obtenemos una función escalonada que satisface: $|f(t) - g(t)| \leq \epsilon$ para todo t que no es un punto especial. $\blacksquare$

El siguiente –una versión del Lema de Riemann-Lebesgue– será fundamental.

Teorema 8 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua a trozos entonces*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\, dt = 0 \ .$$

A fortiori:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t)\, dt = 0 \ , \quad \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, dt = 0 \ .$$

<u>Demostración</u>: Dado $\epsilon > 0$, hay una función continua a trozos g tal que $|f(t) - g(t)| \leq \epsilon/(2(b - a))$ para todo $t \in [a, b]$ que no es punto especial de f y hay $\lambda_o > 0$ tal que

$$|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\, dt| \leq \epsilon/2 \ ,$$

para todo λ con $|\lambda| \geq \lambda_o$. Entonces

$$|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\, dt| \leq \int_a^b |[f(t) - g(t)]e^{i\lambda t}|\, dt + |\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\, dt|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |[f(t) - g(t)]e^{i\lambda t}|\, dt + \epsilon/2 \leq \epsilon \ ,$$

para todo λ con $|\lambda| \geq \lambda_o$. $\blacksquare$

<u>Demostración del Teorema 7:</u> Fíjese $t \in [-\pi, \pi]$. Por (31) y (32),

$$\frac{f_+(t) + f_-(t)}{2} - f_N(t) = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2} - (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t)D_N(x)\, dx$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_0^{\pi} [f_+(t) - f(x + t)]D_N(x)\, dx + (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{0} [f_-(t) - f(x + t)]D_N(x)\, dx \ ;$$

donde el valor $f(x+t)$ es aquel determinado por la extensión 2π-periódica de f. La función $[-\pi, \pi] \ni x \mapsto f(x + t)$ es suave a trozos con puntos especiales $x_k = t_k - t \pmod{2\pi}$,

$k = 0, 1, 2, \cdots, n+1$, y en cada uno de estos x_k existen los límites laterales y las derivadas laterales. Ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_+(t) - f(t+x)}{\operatorname{sen}(x/2)} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{f_+(t) - f(t+x)}{x}\right)\left(\frac{x}{\operatorname{sen}(x/2)}\right) = -2f'_+(t) \ ,$$

y análogamente $\lim_{x\to 0^-} \frac{f_-(t)-f(t+x)}{\operatorname{sen}(x/2)} = -2f'_-(t)$, las funciones

$$g_t(x) := \frac{f_+(t) - f(t+x)}{\operatorname{sen}(x/2)} \ , \ \ 0 \le x \le \pi \ ,$$

y

$$h_t(x) := \frac{f_-(t) - f(t+x)}{\operatorname{sen}(x/2)} \ , \ \ -\pi \le x \le 0 \ ,$$

son continuas a trozos y se tiene

$$(2\pi)^{-1} \int_0^\pi [f_+(t) - f(x+t)] D_N(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^\pi g_t(x) \operatorname{sen}((2N+1)x/2)\, dx \ ,$$

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^0 [f_-(t) - f(x+t)] D_N(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^0 h_t(x) \operatorname{sen}((2N+1)x/2)\, dx \ .$$

Por el Teorema 8, ambas integrales convergen a cero para $N \to \infty$. ■

Teorema 9 *Si f tiene derivada continua en $[-\pi, \pi]$, y $f(-\pi) = f(\pi)$, entonces*

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t) = f(t)$$

uniformemente en $t \in [-\pi, \pi]$.

Demostración: Usando la relación $\widehat{f}(n) = \widehat{f'}(n)/(in)$ para $n \neq 0$, tenemos

(33) $$\sum_{|n|\le N} |\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{1\le |n|\le N} |n|^{-1} |\widehat{f'}(n)| \ .$$

Pero aplicando la desigualdad de Schwarz en $\mathbb{R}^{2N}$ a los vectores

$$(1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/N, 1, 1/2, \cdots, 1/N)$$

y

$$(\widehat{f'}(1), \widehat{f'}(2), \cdots, \widehat{f'}(N), \widehat{f'}(-1), \widehat{f'}(-2), \cdots, \widehat{f'}(-N)) \ ,$$

obtenemos

$$\sum_{1\le |n|\le N} |n|^{-1} |\widehat{f'}(n)| \le \sqrt{2 \sum_{n=1}^{N} (1/n^2)} \ \sqrt{\sum_{1\le |n|\le N} |\widehat{f'}(n)|^2} \ .$$

El segundo factor es igual a $\sqrt{\|(f')_N\|_2^2 - |\widehat{f'}(0)|^2}$ y por ende menor o igual a $\|(f')_N\|_2$. Ya que f' es continua, es de modulo cuadrado integrable con lo que $\|f'\|_2$ es finito y la desigualdad de Bessel nos da

$$\sqrt{\sum_{1\leq|n|\leq N} |\widehat{f'}(n)|^2} \leq \|f'\|_2 \ .$$

Para el primer factor, ya que la serie $\sum_{n=1}^{N} 1/n^2$ es convergente (vea Apéndice D; sea S su suma), obtenemos

$$\sqrt{2\sum_{n=1}^{N}(1/n^2)} \leq \sqrt{2S} \ .$$

Luego, volviendo a (33),

$$\sum_{|n|\leq N} |\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(0)| + \sqrt{2S\|f'\|_2} \ .$$

El miembro derecho es *independiente* de N. La sucesión $\sum_{|n|\leq N} |\widehat{f}(n)|$ es creciente y acotada y por ende converge. De aquí obtenemos, por ejemplo usando el criterio de convergencia uniforme de Weierstraß, que f_N converge uniformemente en t a una función g que es continua. Falta verificar que $g = f$. Ya que $\langle e_n, f_N\rangle = \widehat{f}(n)$ si $N \geq |n|$, tenemos

$$\widehat{f}(n) = \lim_{N\to\infty} \langle e_n, f_N\rangle \tag{34}$$

Pero, $\langle e_n, g\rangle = \widehat{g}(n)$ está bien definido para todo $n \in \mathbb{Z}$, y por convergencia uniforme de f_N a g, dado $\epsilon > 0$, podemos elegir N_o tal que para todo $N \geq N_o$ tengamos $|f_N(t) - g(t)| \leq 2\pi\epsilon$, $t \in [-\pi, \pi]$. Luego, para tales N,

$$|\langle e_n, f_N\rangle - \widehat{g}(n)| \leq (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(t) - g(t)|\, dt \leq \epsilon \ .$$

Lo que demuestra que $\lim_{N\to\infty}\langle e_n, f_N\rangle = \widehat{g}(n)$, y entonces con (34),

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) \ , \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \ .$$

La demostración se completa usando el Corolario 3.5.2 a partir de la continuidad de f y de g. ■

3.4.3. Otros criterios de convergencia puntual.

En el teorema de convergencia puntual para funciones suaves a trozos las hipótesis pueden relajarse en varias direcciones. Una función f definida en $[-\pi, \pi]$ satisface las **condiciones de Dirichlet** si es continua a trozos y en los intervalos de continuidad tiene un número finito de puntos extremales. En ese caso, f es de módulo integrable (13) y de módulo cuadrado integrable (19) y por ende los coeficientes de Fourier de f están definidos. Se tiene el siguiente resultado debido a Dirichlet:

Teorema 10 *(Dirichlet) Si f satisface las condiciones de Dirichlet entonces*

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t) = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2} \ , \ \ t \in [-\pi, \pi] \ .$$

En particular, la serie de Fourier converge a f en todo punto donde f es continua.

Hay varias variantes que modifican las condiciones de Dirichlet (hipótesis del Teorema de Dirichlet). Se pueden considerar finitas discontinuidades infinitas pero la función debe ser de módulo integrable en ellas. Se puede dispensar con la continuidad reemplazando por acotación en un número finito de sub-intervalos donde la función es monótona[XIV]. Se puede eliminar la condición de que f tiene finitos puntos extremales pero entonces la convergencia al promedio de los límites laterales es allí donde las derivadas laterales de derecha e izquierda existen; al respecto ver el libro de Churchill y Brown citado en la bibliografía. Como ejemplo incluimos el criterio de convergencia debido a C. Jordan (1881) que se basa en la noción de "variación acotada". f a valores reales definida en el intervalo $[a, b]$ es de variación acotada si

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{j=0}^{n_P-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$$

es finito. El supremo se toma sobre las particiones finitas $P = \{x_o, x_1, \cdots, x_{n_P}\}$ del intervalo con $a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n_P} = b$.
Si f es diferenciable con derivada integrable sobre $[a, b]$ entonces es de variación acotada.
El criterio mencionado es:

Teorema 11 *(Jordan) Si f es de variación acotada en un entorno de t entonces*

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t) = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2} \ .$$

Otro criterio se debe a U. Dini.

Teorema 12 *(Dini) Si para t hay $\delta > 0$ tal que*

$$\int_{\{x:\,|x|<\delta\}} \frac{|f(t+x) - f(t)|}{|x|} \, dx$$

es finito entonces $\lim_{N\to\infty} f_N(t) = f(t)$.

Obsérvese aquí que si f satisface una condición de Lipschitz $|f(t+x) - f(t)| \le |t|^p C$ en un entorno de t con $p > 1$, entonces se satisface la hipótesis del criterio de Dini.

Por último, como ya hemos mencionado en la página 17, una función continua no tiene porque cumplir con alguna de las hipótesis de los criterios de Dirichlet, Jordan o Dini.

[XIV] Esto lleva a pedir que la función f sea de variación acotada. Véase al respecto el libro de Carslaw (*Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Dover, New York 1950); el libro de Titchmarsch y el libro de Zygmund citados en la bibliografía.

4. Bibliografía

1. R.V. Churchill, y J.W. Brown: *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ediciones del Castillo, Madrid 1966.

2. M.L. Boas: *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, J. Wiley & Sons, New York, 1983. Capítulo 7.

3. E.B. Saff, and A.D. Snider: *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1993.

Los tres discuten aplicaciones a problemas de la física.

Entre los muchísimos libros que profundizan matemáticamente sobre series de Fourier se pueden consultar algunos clásicos

4. G.P. Tolstov: *Fourier Series*, Dover, New York 1976.

5. C. Lanczos: *Discourse on Fourier Series*, Oliver & Boyd, Edinburgh 1966.

6. E.C. Titchmarsh: *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford 1939.

7. A. Zygmund: *Trigonometric series, Vol. I, II*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (third edition).

Un tratamientos más moderno, y muchísimo más avanzado de lo que se balbuceo aquí, es:

8. R.E. Edwards: *Fourier series : A Modern introduction, Vol. I*, Springer, New York, 1979.

Para los interesados en explorar como sigue la historia desde las series de Fourier y la transformada de Fourier hasta el análisis armónico de grupos abelianos (localmente compactos) recomiendo:

9. A. Deitmar: *A first course in harmonic analysis.* Springer-Verlag, New York 2005 (second edition).

10. Y. Katznelson: *An introduction to harmonic analysis*, Dover Publications Inc., New York 1976.

A. Funciones de módulo cuadrado integrable según Riemann

Consideremos el conjunto $\mathcal{L}_o^2$ de las funciones f definidas en $[-\pi, \pi]$ con valores reales/complejos tales que $|f(x)|^2$ sea integrable según Riemann. Cuando f es continua, su módulo cuadrado es continuo e integrable con lo cual $\mathcal{L}^2_c$ está contenido en $\mathcal{L}^2_o$. Dadas $f, g \in \mathcal{L}^2_o$, tenemos

$$\|f\|_2^2 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \ , \quad \|g\|_2^2 := \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \, dx \ ,$$

que son finitos y, ya que $(|f(x)| + |g(x)|)^2 \geq 0$, obtenemos

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) \ ;$$

en consecuencia $|f(x)|\,|g(x)|$ es integrable según Riemann y

$$|\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) \, dx| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{f(x)} g(x)| \, dx \leq \frac{\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2}{2} \ .$$

que garantiza que – ver (24) –

$$\langle f, g\rangle := (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x) \, dx$$

está bien definido. Además, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)| \, dx \leq \frac{\|f\|_2 \, \|g\|_2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|_2^2} + \frac{|g(x)|^2}{\|g\|_2^2} \right) dx = \|f\|_2 \, \|g\|_2 \ ,$$

que se obtiene reemplazando en el argumento de recién a $|f(x)|$ (resp. $|g(x)|$) por $|f(x)|/\|f\|_2$ (resp. $|g(x)|/\|g\|_2$ cuando $\|f\| \neq 0 \neq \|g\|$.

Ahora, el mapa $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ es lineal en g, conjugado lineal en f, satisface $\overline{\langle f, g\rangle} = \langle g, f\rangle$ y $\langle f, f\rangle \geq 0$; propiedades que caracterizan una forma sesquilineal hermítica positiva semi-definida. Se tiene entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz[XV] que demostramos al final del apéndice.

(35) $$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 \ ,$$

la desigualdad del triángulo[XVI](aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $\|f + g\|_2^2 = \|f|_2^2 + \|g|_2^2 + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle$)

(36) $$|\|f\|_2 - \|g\|_2| \leq \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

y además

$$\|f\|_2 = 0 \text{ si y sólo si } \langle f, g\rangle = 0 \text{ para todo } g \in \mathcal{L}^2_o \ .$$

[XV]Que extiende la desigualdad de Hölder a casos donde $\|f\|_2$ o $\|g\|_2 = 0$.
[XVI]Como consecuencia $\mathcal{L}^2_o$ es un espacio vectorial real/complejo.

Esta última propiedad garantiza que $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}_o^2 : \|f\|_2 = 0\}$ es un subespacio. La relación

$$f \sim g \text{ si y sólo si } \|f - g\|_2 = 0 \ ,$$

es una relación de equivalencia y podemos transferir la estructura de espacio vectorial a las clases de equivalencia. En particular, si $[f]$ denota la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{L}_o^2$, i.e., $\{h \in \mathcal{L}_o^2 : f \sim h\}$, entonces

$$\langle [f], [g] \rangle := \langle f, g \rangle$$

está bien definido ya que si $f \sim h$ y $g \sim k$,

$$\langle h, k \rangle = \langle h - f + f, k \rangle = \langle f, k \rangle = \langle f, k - g + g \rangle = \langle f, g \rangle \ .$$

Ahora, $\langle [f], [f] \rangle = 0$ implica $\|f\|_2 = 0$ de modo que $f \sim 0$, y tenemos un producto escalar sobre $L_o^2 = \mathcal{L}_o^2 \backslash \mathcal{N}$. Identificando funciones de módulo cuadrado integrable según Riemann si su diferencia tiene integral nula, obtenemos un espacio vectorial real/complejo con producto escalar y norma correspondiente. Este espacio no es completo, hay sucesiones de Cauchy en L_o^2 que no son convergentes. Para remediar esto se puede completar el espacio obteniendo un ente abstracto (espacio vectorial de sucesiones de Cauchy identificando sucesiones que difieren en una sucesión de Cauchy nula). La teoría de integración de Lebesgue evita estas abstracciones y obtiene la completación de L_o^2 considerando funciones Lebesgue-medibles de módulo cuadrado integrable (e identificando nuevamente funciones cuya diferencia tiene módulo cuadrado integrable a cero).

Si en la desigualdad de Cauchy-Schwarz o de Hölder tomamos $g(x) \equiv 1$ (que es de módulo cuadrado integrable con $\|g\|_2 = 1$), obtenemos

$$\|f\|_1 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx = \langle |f|, g \rangle \leq \|f\|_2$$

de modo que si f es de módulo cuadrado integrable entonces es de módulo integrable y por ende integrable[XVII].

Demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz: Considere una forma sesquilineal hermítica positiva semi-definida $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida en $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ donde $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real o complejo. O sea: $\langle v, w \rangle$ satisface todas las condiciones de un producto escalar (detalladas en el apartado 3.3) salvo que $\langle v, v \rangle = 0$ no implica que $v = 0$[XVIII].
Para $v \in \mathbb{V}$ sea $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ que es un número real no negativo. Entonces vale el Teorema de Pitagoras $\|v + w\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2$ si $\langle v, w \rangle = 0$. En efecto

$$\|v + w\|_2^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle$$

$$= \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2 + 2\Re \langle v, w \rangle \ .$$

[XVII] Por lo tanto, si $f \sim g$ entonces $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| \, dx = 0$ y por ende $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx$.

[XVIII] El caso de funciones de módulo cuadrado integrables según Riemann es un ejemplo.

Suponga que $\|v\| \neq 0$, entonces con $u := w - \|v\|_2^{-2} \langle v, w \rangle \, v$, $\langle u, v \rangle = 0$ y por el teorema de Pitagoras

$$\|w\|_2^2 = \|u + \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2^2} v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|v\|_2^2} \geq \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|v\|_2^2} \ ,$$

que demuestra la desigualdad cuando $\|v\|_2 \neq 0$.
Si $\|v\|_2 = 0$, entonces para todo escalar z (real o complejo según corresponda) se tiene $0 \leq \langle w + zv, w + zv \rangle = \|w\|_2^2 + 2\Re(z\langle w, v \rangle)$; o lo que es lo mismo

$$\Re(z)\Re(\langle w, v \rangle) - \Im(z)\Im(\langle w, v \rangle) \geq -\frac{\|w\|_2^2}{2} \ , \quad \text{para todo } z \ .$$

Tomando $z = \alpha$ real, $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto \alpha\Re(\langle w, v \rangle)$ es una recta y si la pendiente no se anula no se puede tener $\alpha\Re(\langle w, v \rangle) \geq \beta$ para todo α, cualquiera sea $\beta \in \mathbb{R}$. El mismo argumento aplicado en el caso complejo tomando $z = i\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ nos entrega que $\Im(\langle w, v \rangle) = 0$. Por lo tanto $\langle w, v \rangle = 0$, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple con igualdad trivialmente. ■

B. Fórmulas generales para intervalos arbitrarios.

Si f está definida en el intervalo finito $[a, b]$ $(b > a)$ de largo $L := b - a$, los coeficientes de Fourier son los números

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{L} \int_a^b \exp\left(-in\frac{2\pi}{L}\, t\right) f(t)\, dt \ , \ \ n \in \mathbb{Z} \ .$$

La serie de Fourier (formal) correspondiente es

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \exp\left(in\frac{2\pi}{L} t\right) \ .$$

Si f toma valores reales esta serie se escribe también como

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{L} t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{L} t\right) \right\} \ ,$$

con

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{L} t\right) \, dt \ ; \ \ b_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{L} t\right) \, dt \ .$$

Observe que si f es periódica de período L entonces las integrales que expresan a los coeficientes $\widehat{f}(n)$, a_n y b_n son independientes del intervalo donde se integra siempre que este tenga largo L.

Lema 5 *Si φ definida en $\mathbb{R}$ es L-periódica entonces la integral $\int_c^{c+L} \varphi(t)\, dt$ es independiente de c.*

<u>Demostración</u>: Si φ es continua, la afirmación se obtiene derivando la integral respecto de c y usando la periodicidad.
Sin suponer continuidad de φ, mostramos que cualquiera sea c, la integral es igual a la integral con $c = -L/2$. Existe un único $k \in \mathbb{Z}$ de modo que $-L/2 \leq c + kL < L/2$; entonces

$$\int_{-L/2}^{L/2} \varphi(t)dt = \int_{-L/2}^{c+kL} \varphi(t)dt + \int_{c+kL}^{L/2} \varphi(t)dt \; .$$

Pero, haciendo la substitución de variables $s = t + L$, y usando la periodicidad

$$\int_{-L/2}^{c+kL} \varphi(t)dt = \int_{L/2}^{c+(k+1)L} \varphi(s - L)ds = \int_{L/2}^{c+(k+1)L} \varphi(s)ds \; ;$$

de modo que

$$\int_{-L/2}^{L/2} \varphi(t)dt = \int_{L/2}^{c+(k+1)L} \varphi(s)ds + \int_{c+kL}^{L/2} \varphi(t)dt = \int_{c+kL}^{c+(k+1)L} \varphi(t)dt \; .$$

Haciendo la substitución $s = t - kL$ y usando la periodicidad

$$\int_{c+kL}^{c+(k+1)L} \varphi(t)dt = \int_{c}^{c+L} \varphi(s + kL)ds = \int_{c}^{c+L} \varphi(s)ds \; . \quad \blacksquare$$

C. Teoremas de aproximación

Teorema 13 *(Teorema de Aproximación) Sea f es continua sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ y $\epsilon > 0$.*

1. *existe un polinomio trigonométrico P tal que $\|f - P\|_2 \leq \epsilon$.*
2. *si $f(\pi) = f(-\pi)$, existe un polinomio trigonométrico P tal que $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.*

<u>Demostración</u>: Demostramos primero la segunda afirmación. Por la continuidad existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(s)| \leq \epsilon/4$ cuando $|t - s| \leq \delta$. Si $2\pi/\delta$ es entero reemplace δ por algo más chico tal que ese cociente no sea entero. Con $t_o = -\pi$, sea $t_k = t_o + k\delta$ para $k = 1, 2, \cdots, N - 1$ donde $N - 1$ es el mayor número natural menor a $2\pi/\delta$; sea $t_N = \pi$. Entonces $-\pi = t_o < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = \pi$ es una partición del intervalo. Todo $t \in [-\pi, \pi]$ pertenece a exactamente uno de los intervalos $[t_k, t_{k+1})$ lo que nos permite definir

$$g(t) = f(t_k) + \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\delta}(t - t_k) \;\; , \;\; t_k \leq t \leq t_{k+1} \; , \;\; k = 0, 1, 2 \cdots N - 1 \; .$$

La construcción garantiza que g es continua y tiene derivada continua y constante en cada uno de los intervalos (t_k, t_k+1) para $k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. Además $g(\pi) = f(\pi) = f(-\pi)$, por lo tanto g satisface las hipótesis de la primera proposición y existe entonces $K \in \mathbb{N}$ tal que $|g(t) - g_K(t)| \leq \epsilon/2$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$. Pero, para todo t se tiene $t \in [t_k, t_{k+1})$ con algún k y entonces

$$|f(t) - g(t)| = |f(t) - f(t_k) - \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\delta}(t - t_k)|$$

$$\leq |f(t) - f(t_k)| + \frac{|f(t_{k+1}) - f(t_k)|\,|t - t_k|}{\delta} \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon/2\,,$$

ya que $|t - t_k| \leq \delta$ y $|t_{k+1} - t_k| = \delta$. Pero entonces

$$|f(t) - g_K(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - g_K(t)| = \epsilon\ .$$

Pasamos a la primera afirmación. Si $f(-\pi) = f(\pi)$ entonces tomamos un polinomio trigonométrico P tal que $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon^2$. Entonces

$$\|f - P\|_2^2 = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - P(t)|^2\,dt \leq \epsilon^2\ .$$

Si $f(-\pi) \neq f(\pi)$ sea C el máximo valor de $|f(x)|$ en nuestro intervalo. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \min\{\pi\epsilon^2/(8C^2), 2\pi\}$. Definamos

$$h(t) := \begin{cases} f(t) & , \quad -\pi \leq t \leq \pi - \delta \\ f(\pi - \delta) + \frac{f(-\pi)}{\delta}(t - \pi + \delta) & , \quad \pi - \delta < t \leq \pi \end{cases}\ .$$

Claramente h es continua y satisface $h(\pi) = h(-\pi)$ de modo que apelando a la segunda afirmación, hay un polinomio trigonométrico con $\|h - P\|_2 \leq \epsilon/2$. Estimamos

$$\|f - h\|_2^2 = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - h(t)|^2\,dt = (1/2\pi)\int_{\pi-\delta}^{\pi} |f(t) - h(t)|^2\,dt\ .$$

Ahora, en el intervalo $[\pi-\delta, \pi]$, h es el segmento de recta que une los puntos $(\pi-\delta, f(\pi-\delta))$ con $(\pi, f(-\pi))$ y se tiene $f(-\pi) \leq h(t) \leq f(\pi - \delta)$ o bien $f(\pi - \delta) \leq h(t) \leq f(-\pi)$ y en todo caso $-C \leq h(t) \leq C$ o sea: $|h(t)| \leq C$. Por lo tanto, en este intervalo, usando la desigualdad

$$(x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \iff (x - y)^2 \geq 0$$

valida para reales x, y, obtenemos

$$|f(t) - h(t)|^2 \leq 2|f(t)|^2 + 2|h(t)|^2 \leq 4C^2\ .$$

Entonces

$$\|f - h\|_2^2 \leq 4C^2\delta/(2\pi) \leq \epsilon^2/4\ ;$$

de modo que

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \|h - P\|_2 \leq \epsilon\ .$$

■

D. Sumando la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi kx)/k^2$

Se tiene

$$\sum_{k=1}^{N} 1/k^2 \leq 1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{N} < 2 \,.$$

Luego, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ es convergente ya que las sumas parciales crecen y están acotadas por 2. Entonces $|\cos(2\pi kx)| \leq 1$ implica que nuestra serie converge absolutamente y uniformemente a una función continua ξ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2} = \xi(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Y nuestra serie es la serie de Fourier de la función continua ξ que es periódica de período 1. En virtud de la convergencia uniforme la serie puede integrarse término a término (Teorema 4) obteniéndose

$$\int_a^b \xi(x)\, dx = (2\pi)^{-1} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(2\pi ka) - \operatorname{sen}(2\pi kb)}{k^3} \,.$$

Si derivamos término término nuestra serie obtenemos

$$-2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k} \,.$$

La idea es demostrar primeramente la convergencia de esta última serie[XIX]. Por la periodicidad, ξ está determinada por sus valores en el intervalo $[0,1]$.

Tomando la parte real de la fórmula del Lema 3, página 23, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{m} \cos(2\pi kx) = \frac{\operatorname{sen}((2m+1)\pi x)}{2\operatorname{sen}(\pi x)} - \frac{1}{2} \ , \quad 0 < x < 1 \,. \tag{37}$$

Por otro lado

$$\int_{1/2}^{x} \cos(2\pi kt)\, dt = \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{2\pi k} \ , \quad x \in [0,1] \,. \tag{38}$$

Entonces, para $0 < x < 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(2\pi kx)}{k} \overset{(38)}{=} 2\pi \sum_{k=1}^{N} \int_{1/2}^{x} \cos(2\pi kt)\, dt = 2\pi \int_{1/2}^{x} \left(\sum_{k=1}^{N} \cos(2\pi kt) \right) dt$$

[XIX]Seguimos la presentación del libro de A. Deitmar citado en la bibliografía

$$\overset{(37)}{=} \pi \int_{1/2}^{x} \left(\frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi t)}{\operatorname{sen}(\pi t)} - 1 \right) dt = \pi \left(\frac{1}{2} - x \right) + 2\pi \int_{1/2}^{x} \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi t)}{2 \operatorname{sen}(\pi t)} \, dt \; .$$

Para continuar analizamos la integral del segundo sumando

$$\eta_N(x) := \int_{1/2}^{x} \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi t)}{\operatorname{sen}(\pi t)} \, dt \; , \quad 0 < x < 1 \; . \tag{39}$$

Dado ρ real con $0 < \rho < 1/2$, tenemos $[\rho, 1-\rho] \subset (0,1)$ y la función $[\rho, 1-\rho] \ni x \mapsto f(x) = 1/\operatorname{sen}(\pi x)$ es continuamente diferenciable. Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue (por ejemplo el Lema 4) a $\eta_N(x)$ obtenemos que $\lim_{N\to\infty} \eta_N(x) = 0$ uniformemente para $x \in [\rho, 1-\rho]$. Luego

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(2\pi k x)}{k} = \pi \left(\frac{1}{2} - x \right) \; .$$

Pero entonces por el Teorema 3,

$$\xi'(x) = -2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi k x)}{k} = \pi^2 \, (2x - 1) \; , \quad \rho \le x \le 1 - \rho \; ,$$

y por ende

$$\xi(x) = \pi^2 (x^2 - x + \gamma)$$

con una constante γ, siempre para $\rho \le x \le 1 - \rho$. Ya que ρ con $0 < \rho < 1/2$ es arbitrario, obtenemos $\xi(x) = \pi^2(x^2 - x + \gamma)$ en $(0,1)$ y la continuidad de ξ extiende esta expresión a $[0,1]$.
Para determinar el valor de γ usamos la fórmula de integración obtenida de la cual extraemos $\int_0^1 \xi(t)\, dt = 0$; luego

$$0 = \int_0^1 \xi(t)\, dt = \pi^2 \int_0^1 (x^2 - x + \gamma)\, dx = \pi^2 \left(-\frac{1}{6} + \gamma \right) \; ,$$

de donde $\gamma = 1/6$.
Ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un único entero n_x tal que $x = n_x + t$ con $t \in [0,1]$ (n_x es el mayor entero menor o igual a x) y ξ es periódica de período 1 se tiene

$$\xi(x) = \xi(x - n_x) = \pi^2((x - n_x)^2 - (x - n_x) + \gamma) \; ;$$

o, lo que es lo mismo

$$\xi(x) = \pi^2((x-n)^2 - (x-n) + \gamma) \; , \quad n \le x \le n+1 \; , \quad n \in \mathbb{Z} \; .$$