Álgebra I
Período | 2022-II
Práctico 4

DIVISIBILIDAD

Ej. 1 Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones y explicar en sus propias palabras lo que dice cada una:

1. Si $a \neq 0$, entonces $0 \not| \, a$.
2. Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
3. Si $a \mid 1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
4. Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
5. Si $a \mid b$, entonces $a \mid b \cdot x$ para cualquier $x \in \mathbb{Z}$.
6. Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (bx + cy)$ para $x, y \in \mathbb{Z}$ arbitrarios.
7. Si $a \mid b$ y $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid c$.
8. Si $a \mid b$, entonces $a^n \mid b^n$ para todo natural n. (‡)

(‡) En el próximo práctico veremos que si $a^n \mid b^n$ para *algún* natural n, entonces $a \mid b$.

Ej. 2 Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que las siguientes afirmaciones son falsas dando un contraejemplo.

1. Si $a \mid b \cdot c$, entonces $a \mid b$ o $a \mid c$.
2. Si $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid b$ o $a \mid c$.
3. Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
4. Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $(a + b) \mid c$.

Ej. 3 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo a, b, $c \in \mathbb{Z}$:

1. Si $9 \mid a \cdot b$, entonces $9 \mid a$ ó $9 \mid b$
2. Si $a \cdot b \mid c$, entonces $a \mid c$ y $b \mid c$
3. Si $a \cdot b \mid a \cdot c$, entonces $b \mid c$
4. Si $a \mid b$, entonces $a \leq b$
5. Si $a \mid b$, entonces $|a| \leq |b|$
6. Si $a \mid b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$
7. Si $a \mid (b + a^2)$, entonces $a \mid b$
8. Si $a \mid (a \cdot b + 2)$, entonces $a \mid 2$

Ej. 4 Sin usar el *algoritmo de la división*, mostrar que

- $4 \not| \, 26$
- $6 \not| \, 87$
- $7 \not| \, 80$
- $11 \not| \, 82$
- $13 \not| \, 72$

Ej. 5 Probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

- $8 \mid 5^n + 4n - 1$
- $9 \mid 7^n + 3n - 1$
- $8 \mid 2^n + 6^n$
- $18 \mid 3^n + 6^n + 9^n$

Ej. 6 Sean a, b y n números naturales con $a \leq b$ y $a \cdot b = n$. Demostrar que $a \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq b$.

Ej. 7 Dado un número natural n, pensar en un procedimiento para dar la lista de todos los divisores de n e implementarla para escribir los divisores de 2, 7, 13, 18 y 24.
[Hint: El algoritmo de la división y el ejercicio anterior podrían ayudar]

Ej. 8 Hallar el cociente y el resto de la división de:

- 127 por 99.
- -135 por 23.
- 135 por -23.
- -135 por -23.

Ej. 9 Un número entero se dice *número par* si este es divisible por 2, en otro caso se le llama *número impar.* Sean b y c números enteros. Probar las siguientes propiedades:

1. 0 es par y 1 es impar.
2. Si $b \mid 2$, entonces $b = \pm 1$ o $b = \pm 2$.
3. b es un número impar si y solo si $b + 1$ es un número par.
   [Hint: Algoritmo de la división]
4. Si b y c son ambos pares, entonces $b + c$ también es par.
5. Si b es par y c es impar, entonces $b + c$ es impar.
6. $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
7. $b \cdot c$ es impar si y solo si b y c son ambos impares.
8. Dados dos enteros consecutivos, entonces uno es par y el otro es impar.
9. El producto de un número entero por su consecutivo es un número par.

Ej. 10 Sean m, n números enteros. Probar las siguientes afirmaciones.

1. $2 \mid m \cdot n$ si y solo si $2 \mid m$ ó $2 \mid n$.
2. $2^2 \mid n^2$ si y solo si $2 \mid n$.
3. n es par si y sólo si n^2 es par.
4. El número $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.
5. El número $n^2 + 2$ no puede ser divisible por 4.
6. Si m y n son números impar, entonces $8 \mid (m^2 - 1)$ y $16 \mid (n^4 - 1)$.
   ¿Puede proponer y demostrar un resultado análogo para las demás potencias de 2?
   [Hint: Si $n = 2q + 1$, notar que $q(3q + 1)$ siempre es un número par.]
7. Si $n > 0$, entonces 6 divide a $4^n + 3n^2 + 3n + 2$.

Ej. 11 Usando algoritmo de la división, demostrar:

1. Dados tres números enteros consecutivos, alguno debe ser divisible por 3
2. El producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.(†)
3. Dados cuatro números enteros consecutivos, alguno debe ser divisible por 4 y otro es divisible por 2.

(†) En el próximo práctico revisitaremos este resultado teniendo nuevas herramientas.

Ej. 12 Sean m y n números enteros con $n > 0$. Justificar que el resto de dividir a por b es r para cada uno de los siguientes casos:

- $a = n^2 + 4n + 6$, $b = n + 3$ y $r = 3$.
- $a = 3\,m^3 - 5\,m^2 + 21\,m - 28$, $b = m^2 + 7$ y $r = 7$
- $a = 2n^3 - 5n^2 + 12n - 2$, $b = n^2 - 2n + 5$ y $r = 3$
- $a = 7n^3 + 2n^2 - 2n - 2$, $b = n^2 + n$ y $r = 3n - 2$

Ej. 13 Sean m y n números enteros, con $n > 0$. Encontrar los restos de dividir $n^2 + 2n + 3$ por $n + 1$, y de dividir a $3m^2 + 8$ por $m^2 + 1$.

Ej. 14 Determinar los enteros n tales que

1. $9n^2 + 6$ es divisible por $3n - 1$
2. $2n^2 - n + 1$ es divisible por $2n + 1$
3. $30n^2 - 47n + 16$ es divisible por $2n - 3$
4. $3n^2 + 2n + 1$ es divisible por $15n + 7$

Ej. 15 Sea $\mathcal{A}$ un conjunto arbitrario de 20 números enteros. Probar que hay al menos dos elementos de $\mathcal{A}$ cuya diferencia es divisible por 19.

Ej. 16 Sean a_1, a_2, $a_3, \dots, a_n$ números enteros. Probar que existen índices i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$ tales que

$$n \mid \sum_{k=i}^{j} a_k$$

. [Hint: Considerar los restos en la división por n de los n números a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.]

Ej. 17 Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$, sin usar (directamente) inducción:

1. $\binom{2n+2}{3}$ es par y $\binom{4n-1}{3}$ es un número impar.
   [Hint: Si $m = \binom{2n+2}{3}$, notar que $2 \mid 3m$ luego m no puede ser impar]
2. Para todo $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\binom{8n+k}{4}$ es par y para todo $j \in \{4, 5, 6, 7\}$, $\binom{8n+j}{4}$ es impar.
3. $n!$ divide a $2^n \prod_{i=1}^{n} (2i - 1)$.
4. $(3!)^n$ divide a $(3n)!$
5. $n!$ siempre divide a cualquier producto de n enteros consecutivos.
6. El *coeficiente binomial central* $\binom{2n}{n}$ es un número par.
   [Hint: Regla de Pascal y simetría del triángulo de Pascal]
7. $\binom{2n}{n}$ es divisible por $n + 1$.
   [Hint: probar que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$ y observar que $\binom{2n}{n} = (2n+2)\binom{2n}{n} - (2n+1)\binom{2n}{n}$].
8. Si $n > 1$ y $k \in \{1, 2, 4\}$, entonces $\binom{3n}{k}$ es divisible por 3.
   [Para $k = 5$ también es cierto y lo veremos en el próximo práctico]

Ej. 18 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar los siguiente resultados:

1. Si $a \neq b$, entonces $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Si n es un número natural impar y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n + b^n$.
3. Si n es un número natural par y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n - b^n$.

Ej. 19 (Opcional) Sean n, m y a números naturales, $a \neq 1$. Probar que si r es el resto de la división de n por m, entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$.

Ej. 20 (Opcional)

1. Sea n una potencia de 3. Probar que $n \mid 2^n + 1$
2. Probar que si a y b son enteros, entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3 en lugar de 7? ¿Para 5?

Versión para imprimir

1. Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones y explicar en sus propias palabras lo que dice cada una:

   (a) Si $a \neq 0$, entonces $0 \nmid a$.
   (b) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
   (c) Si $a \mid 1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
   (d) Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
   (e) Si $a \mid b$, entonces $a \mid b \cdot x$ para cualquier $x \in \mathbb{Z}$.
   (f) Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (bx + cy)$ para $x, y \in \mathbb{Z}$ arbitrarios.
   (g) Si $a \mid b$ y $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid c$.
   (h) Si $a \mid b$, entonces $a^n \mid b^n$ para todo natural n. (‡)

   (‡) En el próximo práctico veremos que si $a^n \mid b^n$ para *algún* natural n, entonces $a \mid b$.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que las siguientes afirmaciones son falsas dando un contraejemplo.

   (a) Si $a \mid b \cdot c$, entonces $a \mid b$ o $a \mid c$.
   (b) Si $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid b$ o $a \mid c$.
   (c) Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
   (d) Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $(a + b) \mid c$.

3. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo a, b, $c \in \mathbb{Z}$:

   - Si $9 \mid a \cdot b$, entonces $9 \mid a$ ó $9 \mid b$
   - Si $a \cdot b \mid c$, entonces $a \mid c$ y $b \mid c$
   - Si $a \cdot b \mid a \cdot c$, entonces $b \mid c$
   - Si $a \mid b$, entonces $a \leq b$
   - Si $a \mid b$, entonces $|a| \leq |b|$
   - Si $a \mid b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$
   - Si $a \mid (b + a^2)$, entonces $a \mid b$
   - Si $a \mid (a \cdot b + 2)$, entonces $a \mid 2$

4. Sin usar el *algoritmo de la división*, mostrar que

   - $4 \nmid 26$
   - $6 \nmid 87$
   - $7 \nmid 80$
   - $11 \nmid 82$
   - $13 \nmid 72$

5. Probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

   - $8 \mid 5^n + 4n - 1$
   - $9 \mid 7^n + 3n - 1$
   - $8 \mid 2^n + 6^n$
   - $18 \mid 3^n + 6^n + 9^n$

6. Sean a, b y n números naturales con $a \leq b$ y $a \cdot b = n$. Demostrar que $a \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq b$.

7. Dado un número natural n, pensar en un procedimiento para dar la lista de todos los divisores de n e implementarla para escribir los divisores de 2, 7, 13, 18 y 24.
   [Hint: El algoritmo de la división y el ejercicio anterior podrían ayudar]

8. Hallar el cociente y el resto de la división de:

   - 127 por 99.
   - -135 por 23.
   - 135 por -23.
   - -135 por -23.

9. Un número entero se dice *número par* si este es divisible por 2, en otro caso se le llama *número impar*. Sean b y c números enteros. Probar las siguientes propiedades:

   (a) 0 es par y 1 es impar.
   (b) Si $b \mid 2$, entonces $b = \pm 1$ o $b = \pm 2$.
   (c) b es un número impar si y solo si $b + 1$ es un número par.
   [Hint: Algoritmo de la división]
   (d) Si b y c son ambos pares, entonces $b + c$ también es par.
   (e) Si b es par y c es impar, entonces $b + c$ es impar.
   (f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
   (g) $b \cdot c$ es impar si y solo si b y c son ambos impares.
   (h) Dados dos enteros consecutivos, entonces uno es par y el otro es impar.
   (i) El producto de un número entero por su consecutivo es un número par.

10. Sean m, n números enteros. Probar las siguientes afirmaciones.

    (a) $2 \mid m \cdot n$ si y solo si $2 \mid m$ ó $2 \mid n$.
    (b) $2^2 \mid n^2$ si y solo si $2 \mid n$.
    (c) n es par si y sólo si n^2 es par.
    (d) El número $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.
    (e) El número $n^2 + 2$ no puede ser divisible por 4.
    (f) Si m y n son números impar, entonces $8 \mid (m^2 - 1)$ y $16 \mid (n^4 - 1)$.
    ¿Puede proponer y demostrar un resultado análogo para las demás potencias de 2?
    [Hint: Si $n = 2q + 1$, notar que $q(3q + 1)$ siempre es un número par.]
    (g) Si $n > 0$, entonces 6 divide a $4^n + 3n^2 + 3n + 2$.

11. Usando algoritmo de la división, demostrar:

(a) Dados tres números enteros consecutivos, alguno debe ser divisible por 3
(b) El producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.(†)
(c) Dados cuatro números enteros consecutivos, alguno debe ser divisible por 4 y otro es divisible por 2.

(†) En el próximo práctico revisitaremos este resultado teniendo nuevas herramientas.

12. Sean m y n números enteros con $n > 0$. Justificar que el resto de dividir a por b es r para cada uno de los siguientes casos:

- $a = n^2 + 4n + 6$, $b = n + 3$ y $r = 3$.
- $a = 3\,m^3 - 5\,m^2 + 21\,m - 28$, $b = m^2 + 7$ y $r = 7$
- $a = 2n^3 - 5n^2 + 12n - 2$, $b = n^2 - 2n + 5$ y $r = 3$
- $a = 7n^3 + 2n^2 - 2n - 2$, $b = n^2 + n$ y $r = 3n - 2$

13. Sean m y n números enteros, con $n > 0$. Encontrar los restos de dividir n^2+2n+3 por $n+1$, y de dividir a $3m^2+8$ por m^2+1.

14. Determinar los enteros n tales que

(a) $9n^2 + 6$ es divisible por $3n - 1$
(b) $2n^2 - n + 1$ es divisible por $2n + 1$
(c) $30n^2 - 47n + 16$ es divisible por $2n - 3$
(d) $3n^2 + 2n + 1$ es divisible por $15n + 7$

15. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto arbitrario de 20 números enteros. Probar que hay al menos dos elementos de $\mathcal{A}$ cuya diferencia es divisible por 19.

16. Sean a_1, a_2, $a_3, \dots, a_n$ números enteros. Probar que existen índices i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$ tales que

$$n \mid \sum_{k=i}^{j} a_k$$

. [Hint: Considerar los restos en la división por n de los n números a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.]

17. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$, sin usar (directamente) inducción:

(a) $\dbinom{2n+2}{3}$ es par y $\dbinom{4n-1}{3}$ es un número impar.
[Hint: Si $m = \binom{2n+2}{3}$, notar que $2 \mid 3m$ luego m no puede ser impar]

(b) Para todo $k \in \{0,1,2,3\}$, $\dbinom{8n+k}{4}$ es par y para todo $j \in \{4,5,6,7\}$, $\dbinom{8n+j}{4}$ es impar.

(c) $n!$ divide a $2^n \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$.

(d) $(3!)^n$ divide a $(3n)!$

(e) $n!$ siempre divide a cualquier producto de n enteros consecutivos.

(f) El *coeficiente binomial central* $\dbinom{2n}{n}$ es un número par.
[Hint: Regla de Pascal y simetría del triángulo de Pascal]

(g) $\dbinom{2n}{n}$ es divisible por $n + 1$.
[Hint: probar que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$ y observar que $\binom{2n}{n} = (2n+2)\binom{2n}{n} - (2n+1)\binom{2n}{n}$].

(h) Si $n > 1$ y $k \in \{1,2,4\}$, entonces $\dbinom{3n}{k}$ es divisible por 3.
[Para $k = 5$ también es cierto y lo veremos en el próximo práctico]

18. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar los siguiente resultados:

(a) Si $a \neq b$, entonces $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) Si n es un número natural impar y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n + b^n$.
(c) Si n es un número natural par y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n - b^n$.

19. (Opcional) Sean n, m y a números naturales, $a \neq 1$. Probar que si r es el resto de la división de n por m, entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$.

20. (Opcional)

(a) Sea n una potencia de 3. Probar que $n \mid 2^n + 1$
(b) Probar que si a y b son enteros, entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3 en lugar de 7? ¿Para 5?