Álgebra I
Período | 2022-II
Práctico 2

Ej. 1 Decir cuáles de los siguientes subconjuntos X de $\mathbb{R}$ son inductivos. Justificar.

1. $X = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.
2. $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$ y X infinito.
3. $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$, X infinito con $1 \in X$.
4. $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$.

Ej. 2 Demostrar las *propiedades de la potenciación* de números reales; es decir, dado $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo x e y en $\mathbb{R}$ se cumple:

1. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
2. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
3. $(x^m)^n = x^{n \cdot m}$

Ej. 3 Calcular/transformar en una expresión equivalente con menos términos (no es necesario hacer inducción):

1. $2^{n+1} - 2^n$
2. $(2^2)^n + (2^n)^2$
3. $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$
4. $-(-1)^{n+1}$

Ej. 4 Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos y $\mathcal{P}([\![1,3]\!])$ el conjunto de partes del conjunto $\{1,2,3\}$. Calcular las siguientes expresiones dando un resultado simplificado en aquellos casos donde sea posible:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \sqrt{a_i}$
2. $\displaystyle\sum_{B \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])} 1$
3. $\displaystyle\sum_{j=2019}^{2022} (a_{j+1} - a_j)$
4. $\displaystyle\sum_{11 \leq k \leq 14} (k-10) \cdot a_{13}$
5. $\displaystyle\prod_{n=-1}^{3} a_{n+2}^5$
6. $\displaystyle\prod_{m=1}^{4} m \cdot a_{7m+3}$
7. $\displaystyle\prod_{k=2019}^{2022} \frac{a_{k+1}}{a_k}$
8. $\displaystyle\prod_{B \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])} a_{19}$
9. $\displaystyle\sum_{B \in \mathcal{P}([\![1,3]\!]) \setminus \{\emptyset\}} \left(\prod_{n \in B} \frac{1}{n} \right)$

Ej. 5 Para cada una de las siguientes sucesiones dar los tres primeros términos de la sucesión, la expresión del término $(k+1)$-ésimo, y mostrar, usando el principio de inducción, que cada una de las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es igual a la respectiva sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que le sigue:

1. $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$
2. $b_n = 3^n - 3^{n-1} - 1$, $n \in \mathbb{N}$
3. $a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $n \geq 2$
4. $b_n = \frac{(n-1)n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$
5. $a_1 = 1$, $a_n = 2^n - a_{n-1}$, $n \geq 2$
6. $b_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$, $n \in \mathbb{N}$
7. $a_1 = 1$, $a_n = (\sqrt{a_{n-1}} - n)^2$, $n \geq 2$
8. $b_n = \left(\frac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$
9. $a_1 = 1$, $a_n = n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i$, $n \geq 2$
10. $b_n = 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$
11. $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot a_i$, $n \geq 2$
12. $b_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$

INDUCCIÓN

Ej. 6 Hallar una fórmula explícita (no recursiva) para el término general de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez:

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$, $n \in \mathbb{N}$
2. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 5^n$, $n \in \mathbb{N}$
3. $a_1 = -5$, $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 3$, $n \in \mathbb{N}$
4. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$, $n \in \mathbb{N}$

Ej. 7 Demostrar por inducción que las siguientes igualdades se verifican para todo $n \in \mathbb{N}$:

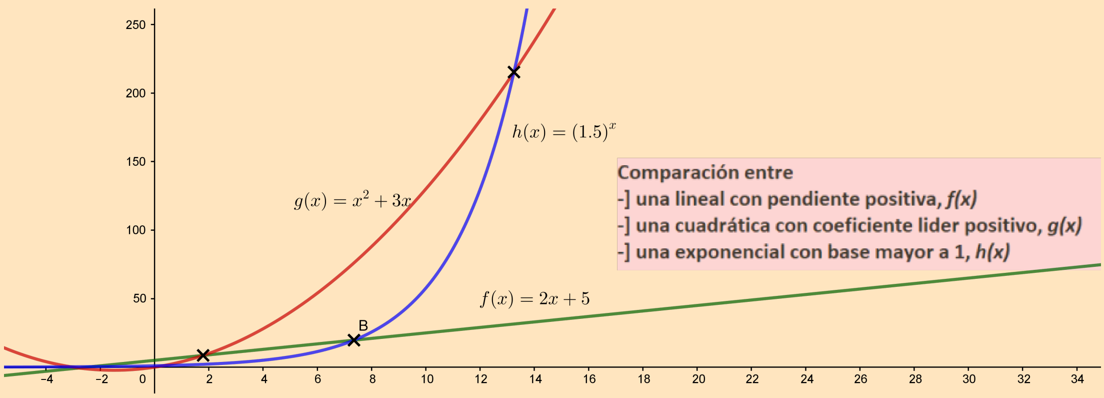
1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{2k+1} = \frac{a^{2n+3} - a}{a^2 - 1}$, $a \neq \pm 1$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{3}{4}\left(3^n(2n-1) + 1\right)$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Ej. 8 Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean x e y números reales. Demostrar los siguientes resultados, usando inducción solo en los casos que considere necesario:

1. Si x e y son números reales no negativos y $n \geq 2$ entonces $x < y$ si y solo si $x^n < y^n$.
2. x es un real negativo si y solo si x^{2n+1} es un real negativo.
3. $x^{2n+1} = y^{2n+1}$ si y solo si $x = y$.
4. $x^{2n} = y^{2n}$ si y solo si $x^2 = y^2$, equivalentemente $x = y$ o $x = -y$.

Ej. 9 Sea n un número natural. Probar las siguientes desigualdades usando el *principio de inducción corrida* e intentar una segunda demostración sin usar inducción:

1. Si $n > 2$ entonces $5n - 1 < \frac{5}{7}n^3$.
2. Si $n > 3$ entonces $2n + 4 < n^2$.
3. Si $n > 5$ entonces $n^2 + 3n + 5 < 2^n$
4. Si $n > 6$ entonces $3^n < n!$
5. $2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$
6. Si $n \geq 2$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$
7. Si $n \geq 2$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$



Ej. 10 (Opcional) Para cada una de las siguientes sucesiones recursivas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, usar inducción para verificar la desigualdades dadas, y sin usar inducción deducir que son *sucesiones estrictamente decrecientes*:

1. Sean $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n+3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a_n > \frac{1}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Sean $a_1 = 6$ y $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a_n > 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Sean $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a_n > \sqrt{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (Babilonia, Siglo XVII a.e.c)

Ej. 11 Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean a, $b_1, \ldots, b_n$ en $\mathbb{R}$, con todos los b_i's no nulos. Probar por inducción:

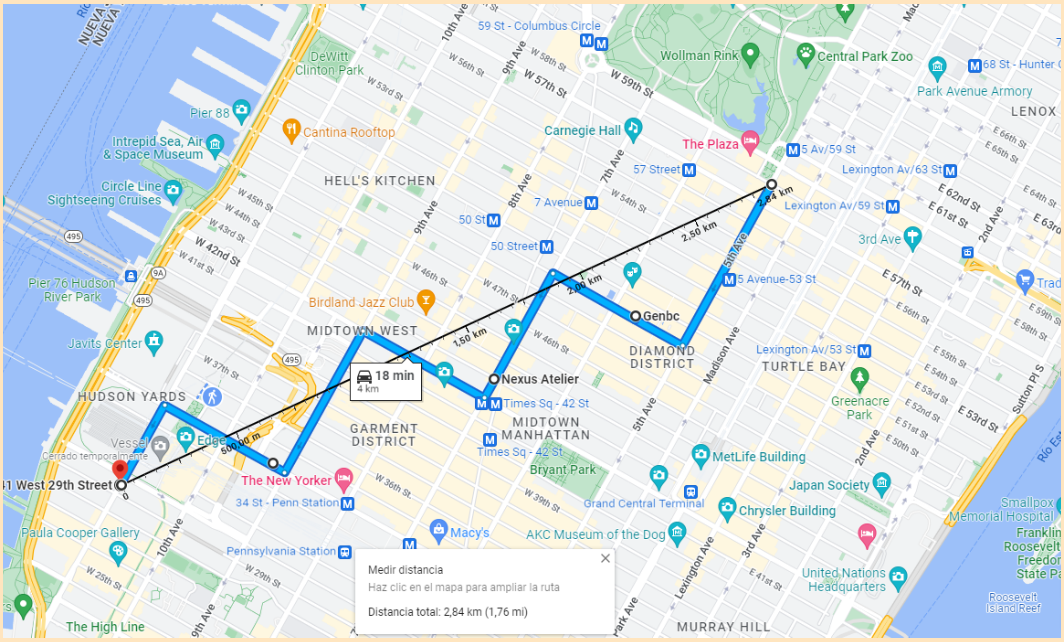
1. (Desigualdad de Bernoulli) Si $-1 \leq a$ entonces $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$
2. (Desigualdad opuesta de Bernoulli) Si $-1 \leq a \leq 0$ entonces $(1+a)^n \leq \frac{1}{1-n\cdot a}$
3. (Norma Euclidiana vs. Norma de Manhattan) $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} \leq |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$
4. (Desigualdad triangular) $|b_1 + b_2 + \ldots + b_n| \leq |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$ y la igualdad se da si y solo si todos los $b_i's$ tienen el mismo signo.
5. (*Media Aritmética* v s. *Media Geométrica* I) Supongamos que todos los b_i's son positivos y que el producto de todos estos es igual a 1. Entonces $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n$, donde la igualdad se da si y solo si $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$.
6. (*Media Aritmética* vs. *Media Geométrica* II) Supongamos que todos los b_i's son positivos. Se define la *media aritmética* de estos como

$$\mathrm{MA}_n(b_1, \ldots, b_n) = \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}$$

   y su *media geométrica* como

$$\mathrm{MG}_n(b_1, \ldots, b_n) = \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}$$

   Demostrar que $\mathrm{MA}_n(b_1, ..., b_n) \geq \mathrm{MG}_n(b_1, ..., b_n)$, la igualdad se da si y solo si $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.



Norma Euclidiana vs. Norma de Manhattan

Ej. 12 Sea n un número entero. Probar, usando inducción(‡), las siguientes afirmaciones:

1. $7^n - 1$ es múltiplo de 6
2. $3^n + 7^n - 2$ es múltiplo de 8
3. $5^n - 2^n - 3^n$ es múltiplo de 6
4. $4^n + 6n - 1$ es múltiplo de 9
5. $n(n+1)$ y $n(3n+1)$ son múltiplos de 2
6. $n(n^2+5)$ es múltiplo de 6

‡ Cuando desarrollemos más herramientas en el curso, podremos probar estos resultados de forma más sencilla.

Ej. 13 Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y sean A, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar:

1. $A \setminus (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2) \cup \ldots \cup (A \setminus B_n)$.
2. $(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)^{\mathrm{c}} = B_1^{\mathrm{c}} \cap B_2^{\mathrm{c}} \cap \ldots \cap B_n^{\mathrm{c}}$.
3. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \emptyset$ si y solo si $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = \emptyset$.

Ej. 14 Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia, escribir los primeros diez términos de la sucesión, proponer una fórmula explícita y mostrar su validez:

1. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ con $n \geq 3$.
2. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ con $n \geq 3$.
3. $a_1 = -3$, $a_2 = 6$, y si $n \geq 3$, $a_n = \begin{cases} -a_{n-1} - 3, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} + 9, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Ej. 15 (Opcional) Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida por recurrencia:

$$u_1 = K_1, \qquad u_2 = K_2, \qquad u_n + \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2} = 0, \text{ con } n \in \mathbb{N}, n \geq 3,$$

donde α y β son números reales. Considerar la ecuación en x

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

llamada *ecuación característica de la sucesión*. Sean p y q las dos soluciones de dicha ecuación y supongamos que son números reales no nulos y distintos. Usar *inducción fuerte* para demostrar que una fórmula explícita de la sucesión es

$$u_n = ap^n + bq^n,$$

donde

$$\begin{cases} a = & (K_1 q^2 - K_2 q)/(pq(q-p)) \\ b = & -(K_1 p^2 - K_2 p)/(pq(q-p)) \end{cases}$$

[Hint: Para verificar que la fómula vale para $n = 1$ y $n = 2$ se necesitan los valores explícitos de a y b. En el paso inductivo no hace falta usar los valores de a y b dados, solo necesita usar que p y q son soluciones de la ecuación $x^2 + \alpha x + \beta = 0$; y así $p^2 = -\alpha p - \beta$ y $q^2 = -\alpha q - \beta$.]

Ej. 16 La fórmula dada para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia fue obtenida usando el Ejercicio 15. De la misma manera como en el mencionado ejercicio, hacer/repetir la demostración de la respectiva fórmula usando *inducción fuerte*:

1. Si $u_1 = 5$, $u_2 = 13$ y $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$, con $n \geq 3$, entonces $u_k = 2^k + 3^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
2. Si $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$, con $n \geq 3$, entonces $u_k = 2^k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
3. Si $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ y $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, con $n \geq 3$, entonces $u_k = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}.(\Phi)$

(Φ) Esta sucesión recibe el nombre de *sucesión de Fibonacci* y el número $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ es llamado la *divina proporción*

Ej. 17 (Opcional) Para cada una de las siguientes sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, demostrar la respectiva afirmación:

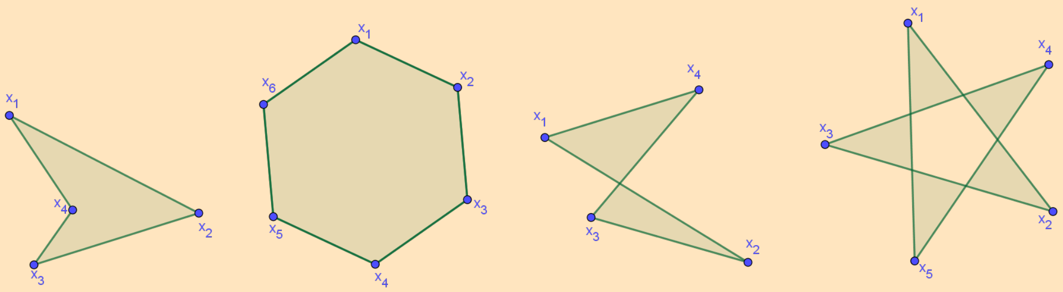
1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, n número impar, $a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ es un número entero múltiplo de 4.
2. Si $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ con $n \geq 3$, entonces a_k es un múltiplo de 3 para todo $k \geq 2$.
3. Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ con $n \geq 3$, entonces $a_k > \sqrt{k!k}$ para todo $k \geq 4$.
4. Si $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - n + 4$ con $n \geq 3$, entonces $a_k \geq k$ para todo $k \geq 3$.

Ej. 18

[A. Boyd 1972: "Gossip problem"] Hay un grupo de n amigos y cada uno sabe un chisme que ningún otro conoce. Entre ellos, conversan mucho por teléfono y cuando dos de ellos chusmean, entonces se comparten todos los chismes que cada uno sabe hasta ese momento. Demostrar que si $n \geq 4$ entonces con $2n-4$ llamadas telefónicas es posible que todos los amigos se enteren de todos los chismes (de hecho, puede demostrarse que $2n-4$ es el mínimo número de conversaciones necesarias para este fin)

(1948) Norman Rockwell: *The Gossips*

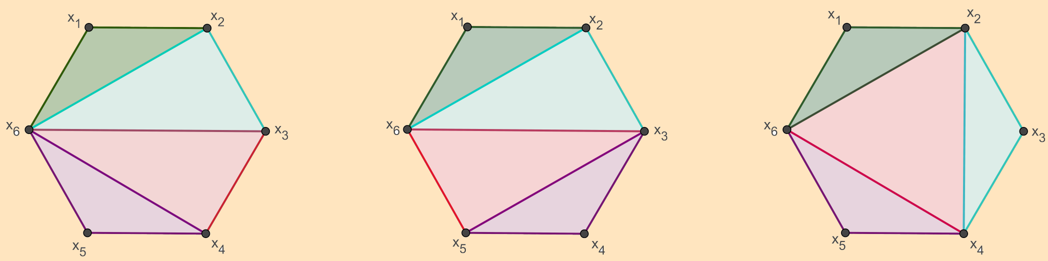
Ej. 19 (Opcional) Un *polígono de n lados* es una figura geométrica plana determinada por n puntos distintos, ciclícamente ordenados, llamados *vértices*, tal que cada terna de puntos consecutivos son no colineales, y un conjunto de segmentos que unen cada par de puntos consecutivos llamados *lados*.
El polígono se dice *simple* si todo par de lados no *consecutivos* del polígono no se intersecan. Cuando el polígono es simple puede demostrarse que dicha figura *separa* el plano (euclídeo) en dos regiones: una acotada por el polígono y otra no acotada, llamadas respectivamente el *interior* y el *exterior* del polígono (**Teorema de la Curva de Jordan [poligonal]**)
Se define por *diagonal* de un polígono a cualquier segmento que una dos vértices no consecutivos. Cuando el polígono es simple podemos hablar de las *diagonales interiores* del polígono: son aquellas diagonales que están contenidas en el interior del polígono; descartando los extremos de la diagonal, y también se puede definir la noción de *ángulos interiores*.



Las dos primeras figuras son ejemplos de polígonos simples y las dos restantes son polígonos no simples.

Un teorema muy conocido sobre polígonos afirma que todo polígono simple con más de tres lados tiene al menos una diagonal interior. La ventaja de tener una diagonal interior, es que está divide al polígono simple en dos polígonos simples con una menor cantidad de lados. Usar este hecho para demostrar: Sea $\mathcal{P}$ un polígono simple de n lados, entonces:

1. La suma de los ángulos interiores de $\mathcal{P}$ es $(n-2)\pi$,
2. El polígono $\mathcal{P}$ tiene al menos $n-3$ diagonales interiores,
3. $\mathcal{P}$ puede ser particionado en $n-2$ triángulos cuyos vértices son vértices del polígono.



Algunas triangulaciones de un hexágono regular

Ej. 20 Imaginemos la siguiente situación. A un salón vacío ingresan n personas, una por vez. Cada vez que ingresa una persona, saluda con un apretón de manos a las personas que ya se encontraban dentro. Llamemos a_n a la cantidad acumulada de apretones de mano que se dieron cuando la n-ésima persona terminó de saludar.

1. ¿Cuántos nuevos apretones de mano se efectúan cuando entra al salón una persona más?
2. Expresar a_{n+1} en términos de a_n.
3. Deducir una fórmula para a_n y demostrarla por inducción.

Ej. 21 (Opcional) [G. Pólya 1954] Sea $P(n)$ la fórmula *"En cualquier conjunto de n chicas, todas tienen ojos del mismo color"* y considerar la siguiente demostración por inducción de que $P(n)$ es verdadera para todo natural n.

1. $P(1)$ es verdadera ya que hay una sola chica.
2. Asumamos $P(k)$ es verdadera para algún $k \geq 1$ y demostremos que $P(k+1)$ debe ser verdadera.
   Consideremos un conjunto de $k+1$ chicas y nombrémoslas de la siguiente manera:

$$c_1, c_2, \cdots, c_k, c_{k+1}.$$

- El conjunto $A = \{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$ tiene k chicas y, por lo tanto, todas deben tener el mismo color de ojos (digamos marrón).
- Similarmente, el conjunto $B = \{c_2, c_3, \cdots, c_{k+1}\}$ también tiene k chicas y, por lo tanto, todas deben tener el mismo color de ojos.
- Los conjuntos A y B tienen miembros en común (concretamente, las chicas $c_2, c_3, \cdots, c_k$) y por lo tanto todas las chicas del conjunto B también tienen ojos de color marrón.
- Así pues, todas las $k+1$ chicas originales tienen ojos del mismo color.

3. Por el principio de inducción, $P(n)$ es verdadera para todo natural n.

Encontrar cual es el error en esta demostración por inducción.

Ej. 22 (Opcional) Dado $n \in \mathbb{N}$, recordar que denotaremos por $[\![1, n]\!]$ al conjunto de los números naturales desde el 1 hasta n. Si $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ es el conjunto de partes de $[\![1, n]\!]$, demostrar que

$$\sum_{A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}} \left(\prod_{a \in A} \frac{1}{a} \right) = n.$$

Ej. 23 Demostrar que en todo triángulo, debe haber un ángulo que mide por lo menos $\frac{\pi}{3}$ y otro que mide como máximo $\frac{\pi}{3}$

Ej. 24 Tres muy buenas amigas se han juntado a tomar mate. Cada una ha aportado algo de dinero y entre las tres tienen \$2022 pesos.

1. Mostrar que alguna de ellas debió aportar por lo menos \$674 pesos, y las que menos dieron, no dieron más de \$674 pesos.

2. Probar que deben haber dos amigas cuyos aportes suman como mínimo \$1348 pesos.
   [Hint: Piense en las dos amigas que más aportaron y cuanto pudo haber aportado la amiga restante]

Ej. 25 Sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Mostrar que debe existir un intervalo abierto $(c, d) \subseteq (a, b)$ tal que (c, d) no tiene números enteros.

Versión para imprimir

1. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos X de $\mathbb{R}$ son inductivos. Justificar.

   (a) $X = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.
   (b) $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$ y X infinito.
   (c) $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$, X infinito con $1 \in X$.
   (d) $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$.

2. Demostrar las *propiedades de la potenciación* de números reales; es decir, dado $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo x e y en $\mathbb{R}$ se cumple:

   (a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
   (b) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
   (c) $(x^m)^n = x^{n \cdot m}$

3. Calcular/transformar en una expresión equivalente con menos términos (no es necesario hacer inducción):

   (a) $2^{n+1} - 2^n$
   (b) $(2^2)^n + (2^n)^2$
   (c) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$
   (d) $-(-1)^{n+1}$

4. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos y $\mathcal{P}([\![1,3]\!])$ el conjunto de partes del conjunto $\{1,2,3\}$. Calcular las siguientes expresiones dando un resultado simplificado en aquellos casos donde sea posible:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \sqrt{a_i}$
   (b) $\displaystyle\sum_{B\in\mathcal{P}([\![1,3]\!])} 1$
   (c) $\displaystyle\sum_{j=2019}^{2022} (a_{j+1} - a_j)$
   (d) $\displaystyle\sum_{11\leq k\leq 14} (k-10) \cdot a_{13}$
   (e) $\displaystyle\prod_{n=-1}^{3} a_{n+2}^5$
   (f) $\displaystyle\prod_{m=1}^{4} m \cdot a_{7m+3}$
   (g) $\displaystyle\prod_{k=2019}^{2022} \frac{a_{k+1}}{a_k}$
   (h) $\displaystyle\prod_{B\in\mathcal{P}([\![1,3]\!])} a_{19}$
   (i) $\displaystyle\sum_{B\in\mathcal{P}([\![1,3]\!])\setminus\{\emptyset\}} \left(\prod_{n\in B} \frac{1}{n}\right)$

5. Para cada una de las siguientes sucesiones dar los tres primeros términos de la sucesión, la expresión del término $(k+1)$-ésimo, y mostrar, usando el principio de inducción, que cada una de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a la respectiva sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que le sigue:

   (a) $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$
   (b) $b_n = 3^n - 3^{n-1} - 1$, $n \in \mathbb{N}$
   (c) $a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $n \geq 2$
   (d) $b_n = \frac{(n-1)n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$
   (e) $a_1 = 1$, $a_n = 2^n - a_{n-1}$, $n \geq 2$
   (f) $b_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$, $n \in \mathbb{N}$
   (g) $a_1 = 1$, $a_n = (\sqrt{a_{n-1}} - n)^2$, $n \geq 2$
   (h) $b_n = \left(\frac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$
   (i) $a_1 = 1$, $a_n = n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i$, $n \geq 2$
   (j) $b_n = 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$
   (k) $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot a_i$, $n \geq 2$
   (l) $b_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$

6. Hallar una fórmula explícita (no recursiva) para el término general de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez:

   (a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$, $n \in \mathbb{N}$
   (b) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 5^n$, $n \in \mathbb{N}$
   (c) $a_1 = -5$, $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 3$, $n \in \mathbb{N}$
   (d) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$, $n \in \mathbb{N}$

7. Demostrar por inducción que las siguientes igualdades se verifican para todo $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{2k+1} = \frac{a^{2n+3} - a}{a^2 - 1}$, $a \neq \pm 1$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$
   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$
   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
   (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$
   (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{3}{4}\left(3^n(2n-1) + 1\right)$
   (j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

8. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean x e y números reales. Demostrar los siguientes resultados, usando inducción solo en los casos que considere necesario:

(a) Si x e y son números reales no negativos y $n \geq 2$ entonces $x < y$ si y solo si $x^n < y^n$.
(b) x es un real negativo si y solo si x^{2n+1} es un real negativo.
(c) $x^{2n+1} = y^{2n+1}$ si y solo si $x = y$.
(d) $x^{2n} = y^{2n}$ si y solo si $x^2 = y^2$, equivalentemente $x = y$ o $x = -y$.

9. Sea n un número natural. Probar las siguientes desigualdades usando el *principio de inducción corrida* e intentar una segunda demostración sin usar inducción:

(a) Si $n > 2$ entonces $5n - 1 < \frac{5}{7}n^3$.
(b) Si $n > 3$ entonces $2n + 4 < n^2$.
(c) Si $n > 5$ entonces $n^2 + 3n + 5 < 2^n$
(d) Si $n > 6$ entonces $3^n < n!$
(e) $2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$
(f) Si $n \geq 2$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$
(g) Si $n \geq 2$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

10. (Opcional) Para cada una de las siguientes sucesiones recursivas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, usar inducción para verificar la desigualdades dadas, y sin usar inducción deducir que son *sucesiones estrictamente decrecientes*:

(a) Sean $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n+3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a_n > \frac{1}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) Sean $a_1 = 6$ y $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a_n > 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(c) Sean $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a_n > \sqrt{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (Babilonia, Siglo XVII a.e.c)

11. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean a, $b_1, \ldots, b_n$ en $\mathbb{R}$, con todos los b_i's no nulos. Probar por inducción:

(a) (Desigualdad de Bernoulli) Si $-1 \leq a$ entonces $(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a$
(b) (Desigualdad opuesta de Bernoulli) Si $-1 \leq a \leq 0$ entonces $(1 + a)^n \leq \frac{1}{1-n\cdot a}$
(c) (Norma Euclidiana vs. Norma de Manhattan) $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} \leq |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$
(d) (Desigualdad triangular) $|b_1 + b_2 + \ldots + b_n| \leq |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$ y la igualdad se da si y solo si todos los $b_i's$ tienen el mismo signo.
(e) (*Media Aritmética* v s. *Media Geométrica* I) Supongamos que todos los b_i's son positivos y que el producto de todos estos es igual a 1. Entonces $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n$, donde la igualdad se da si y solo si $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$.
(f) (*Media Aritmética* vs. *Media Geométrica* II) Supongamos que todos los b_i's son positivos. Se define la *media aritmética* de estos como
$$\mathrm{MA}_n(b_1, \ldots, b_n) = \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}$$
y su *media geométrica* como
$$\mathrm{MG}_n(b_1, \ldots, b_n) = \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}$$
Demostrar que $\mathrm{MA}_n(b_1, ..., b_n) \geq \mathrm{MG}_n(b_1, ..., b_n)$, la igualdad se da si y solo si $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

12. Sea n un número entero. Probar, usando inducción(‡), las siguientes afirmaciones:

(a) $7^n - 1$ es múltiplo de 6
(b) $3^n + 7^n - 2$ es múltiplo de 8
(c) $5^n - 2^n - 3^n$ es múltiplo de 6
(d) $4^n + 6n - 1$ es múltiplo de 9
(e) $n(n + 1)$ y $n(3n + 1)$ son múltiplos de 2
(f) $n(n^2 + 5)$ es múltiplo de 6

‡ Cuando desarrollemos más herramientas en el curso, podremos probar estos resultados de forma más sencilla.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y sean A, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar:

(a) $A \setminus (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2) \cup \ldots \cup (A \setminus B_n)$.
(b) $(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)^{\mathrm{C}} = B_1^{\mathrm{C}} \cap B_2^{\mathrm{C}} \cap \ldots \cap B_n^{\mathrm{C}}$.
(c) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \emptyset$ si y solo si $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = \emptyset$.

14. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia, escribir los primeros diez términos de la sucesión, proponer una fórmula explícita y mostrar su validez:

(a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ con $n \geq 3$.
(b) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ con $n \geq 3$.
(c) $a_1 = -3$, $a_2 = 6$, y si $n \geq 3$, $a_n = \begin{cases} -a_{n-1} - 3, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} + 9, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

15. (Opcional) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida por recurrencia:
$$u_1 = K_1, \qquad u_2 = K_2, \qquad u_n + \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2} = 0, \text{ con } n \in \mathbb{N}, n \geq 3,$$
donde α y β son números reales. Considerar la ecuación en x
$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

llamada *ecuación característica de la sucesión.* Sean p y q las dos soluciones de dicha ecuación y supongamos que son números reales no nulos y distintos. Usar *inducción fuerte* para demostrar que una fórmula explícita de la sucesión es

$$u_n = ap^n + bq^n,$$

donde

$$\begin{cases} a = & (K_1q^2 - K_2q)/(pq(q-p)) \\ b = & -(K_1p^2 - K_2p)/(pq(q-p)) \end{cases}$$

[Hint: Para verificar que la fómula vale para $n = 1$ y $n = 2$ se necesitan los valores explícitos de a y b. En el paso inductivo no hace falta usar los valores de a y b dados, solo necesita usar que p y q son soluciones de la ecuación $x^2 + \alpha x + \beta = 0$; y así $p^2 = -\alpha p - \beta$ y $q^2 = -\alpha q - \beta$.]

16. La fórmula dada para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia fue obtenida usando el Ejercicio 15. De la misma manera como en el mencionado ejercicio, hacer/repetir la demostración de la respectiva fórmula usando *inducción fuerte*:

    (a) Si $u_1 = 5$, $u_2 = 13$ y $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$, con $n \geq 3$, entonces $u_k = 2^k + 3^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

    (b) Si $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$, con $n \geq 3$, entonces $u_k = 2^k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

    (c) Si $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ y $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, con $n \geq 3$, entonces $u_k = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}.(\Phi)$

(Φ) Esta sucesión recibe el nombre de *sucesión de Fibonacci* y el número $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ es llamado la *divina proporción*

17. (Opcional) Para cada una de las siguientes sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, demostrar la respectiva afirmación:

    (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, n número impar, $a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ es un número entero múltiplo de 4.

    (b) Si $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ con $n \geq 3$, entonces a_k es un múltiplo de 3 para todo $k \geq 2$.

    (c) Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ con $n \geq 3$, entonces $a_k > \sqrt{k!k}$ para todo $k \geq 4$.

    (d) Si $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - n + 4$ con $n \geq 3$, entonces $a_k \geq k$ para todo $k \geq 3$.

18. [A. Boyd 1972: "Gossip problem"] Hay un grupo de n amigos y cada uno sabe un chisme que ningún otro conoce. Entre ellos, conversan mucho por teléfono y cuando dos de ellos chusmean, entonces se comparten todos los chismes que cada uno sabe hasta ese momento. Demostrar que si $n \geq 4$ entonces con $2n - 4$ llamadas telefónicas es posible que todos los amigos se enteren de todos los chismes (de hecho, puede demostrarse que $2n - 4$ es el mínimo número de conversaciones necesarias para este fin)

19. (Opcional) Un *polígono de n lados* es una figura geométrica plana determinada por n puntos distintos, cíclicamente ordenados, llamados *vértices*, tal que cada terna de puntos consecutivos son no colineales, y un conjunto de segmentos que unen cada par de puntos consecutivos llamados *lados*.
    El polígono se dice *simple* si todo par de lados no *consecutivos* del polígono no se intersecan. Cuando el polígono es simple puede demostrarse que dicha figura *separa* el plano (euclídeo) en dos regiones: una acotada por el polígono y otra no acotada, llamadas respectivamente el *interior* y el *exterior* del polígono (**Teorema de la Curva de Jordan [poligonal]**)

    Se define por *diagonal* de un polígono a cualquier segmento que una dos vértices no consecutivos. Cuando el polígono es simple podemos hablar de las *diagonales interiores* del polígono: son aquellas diagonales que están contenidas en el interior del polígono; descartando los extremos de la diagonal, y también se puede definir la noción de *ángulos interiores.*

    Un teorema muy conocido sobre polígonos afirma que todo polígono simple con más de tres lados tiene al menos una diagonal interior. La ventaja de tener una diagonal interior, es que está divide al polígono simple en dos polígonos simples con una menor cantidad de lados. Usar este hecho para demostrar: Sea $\mathcal{P}$ un polígono simple de n lados, entonces:

    (a) La suma de los ángulos interiores de $\mathcal{P}$ es $(n-2)\pi$,
    (b) El polígono $\mathcal{P}$ tiene al menos $n - 3$ diagonales interiores,
    (c) $\mathcal{P}$ puede ser particionado en $n - 2$ triángulos cuyos vértices son vértices del polígono.

20. Imaginemos la siguiente situación. A un salón vacío ingresan n personas, una por vez. Cada vez que ingresa una persona, saluda con un apretón de manos a las personas que ya se encontraban dentro. Llamemos a_n a la cantidad acumulada de apretones de mano que se dieron cuando la n-ésima persona terminó de saludar.

    (a) ¿Cuántos nuevos apretones de mano se efectúan cuando entra al salón una persona más?
    (b) Expresar a_{n+1} en términos de a_n.
    (c) Deducir una fórmula para a_n y demostrarla por inducción.

21. (Opcional) [G. Pólya 1954] Sea $P(n)$ la fórmula *"En cualquier conjunto de n chicas, todas tienen ojos del mismo color"* y considerar la siguiente demostración por inducción de que $P(n)$ es verdadera para todo natural n.

    (a) $P(1)$ es verdadera ya que hay una sola chica.
    (b) Asumamos $P(k)$ es verdadera para algún $k \geq 1$ y demostremos que $P(k+1)$ debe ser verdadera.
    Consideremos un conjunto de $k+1$ chicas y nombrémoslas de la siguiente manera:

    $$c_1, c_2, \cdots, c_k, c_{k+1}.$$

    - El conjunto $A = \{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$ tiene k chicas y, por lo tanto, todas deben tener el mismo color de ojos (digamos marrón).

- Similarmente, el conjunto $B = \{c_2, c_3, \cdots, c_{k+1}\}$ también tiene k chicas y, por lo tanto, todas deben tener el mismo color de ojos.
- Los conjuntos A y B tienen miembros en común (concretamente, las chicas $c_2, c_3, \cdots, c_k$) y por lo tanto todas las chicas del conjunto B también tienen ojos de color marrón.
- Así pues, todas las $k+1$ chicas originales tienen ojos del mismo color.

(c) Por el principio de inducción, $P(n)$ es verdadera para todo natural n.

Encontrar cual es el error en esta demostración por inducción.

22. (Opcional) Dado $n \in \mathbb{N}$, recordar que denotaremos por $[\![1, n]\!]$ al conjunto de los números naturales desde el 1 hasta n. Si $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ es el conjunto de partes de $[\![1, n]\!]$, demostrar que

$$\sum_{A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus \{\emptyset\}} \left(\prod_{a \in A} \frac{1}{a} \right) = n.$$

23. Demostrar que en todo triángulo, debe haber un ángulo que mide por lo menos $\frac{\pi}{3}$ y otro que mide como máximo $\frac{\pi}{3}$

24. Tres muy buenas amigas se han juntado a tomar mate. Cada una ha aportado algo de dinero y entre las tres tienen \$2022 pesos.

    (a) Mostrar que alguna de ellas debió aportar por lo menos \$674 pesos, y las que menos dieron, no dieron más de \$674 pesos.

    (b) Probar que deben haber dos amigas cuyos aportes suman como mínimo \$1348 pesos.
    [Hint: Piense en las dos amigas que más aportaron y cuanto pudo haber aportado la amiga restante]

25. Sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Mostrar que debe existir un intervalo abierto $(c, d) \subseteq (a, b)$ tal que (c, d) no tiene números enteros.