Álgebra I
Período | 2022-II
Práctico 1

FAMAF

Ej. 1 Aladino encontró tres cofres en una cueva. Uno de estos cofres tiene las indicaciones para llegar al cuarto de la lámpara mágica, mientras que los otros dos tienen trampas que causan una muerte instantánea y dolorosa. Cada uno de estos cofres tiene un mensaje:

- Cofre 1: *"Hay una trampa en este cofre"*
- Cofre 2: *"Hay una trampa en este cofre"*
- Cofre 3: *"No hay una trampa en el cofre 2"*

Si tan solo uno de los mensajes es verdadero, ¿por qué debería Aladino abrir el Cofre 1? Justificar.

Ej. 2 Habiendo superado el desafio anterior, Aladino encontró una nueva habitación; esta vez con dos cofres. Uno de los cofres tiene la inscripción: *"Uno de estos dos cofres contiene una lámpara mágica"* mientras que en el otro cofre está escrita la frase *"El otro cofre tiene una trampa mortal"*. El espíritu guardián de la cueva ha alertado a Aladino diciendo: *"Cada uno de estos cofres contiene, o bien la lámpara, o bien una trampa mortal"* y cierra asegurando: *"Las dos advertencias son ambas verdaderas o son ambas falsas"*. ¿Puede Aladino elegir un cofre y encontrar un tesoro? En caso de poder hacerlo ¿Cuál cofre debería abrir?

Ej. 3 Aladino tiene en frente de tres puertas. Detrás de una de las puertas está la salida de la cueva por la cual puede escapar con la lámpara mágica y detrás de las dos puertas restantes le espera la muerte. En cada una de las puertas hay una inscripción:

- Puerta 1: *"La salida de la cueva está detrás de esta puerta"*
- Puerta 2: *"La salida no está detrás de esta puerta"*
- Puerta 3: *"La salida no está detrás de la puerta 2"*

Aladino, habiendo llegado tan lejos y superando los desafíos hasta ese punto, no quiere usar la lámpara para escapar. Es así que Aladino recuerda las últimas recomendaciones del guardián: *"Al menos uno de los mensajes en las puertas dice la verdad, y al menos uno de estos no es cierto."* ¿Por qué debería Aladino salir por la puerta 3? Justificar apropiadamente.

Ej. 4 Cuatro amigos han sido señalados como sospechosos de ser único autor de un homicidio. Ellos han declarado lo siguiente ante las autoridades:

- Milena: *"Baltazar lo hizo"*
- Baltazar: *"Leandro lo hizo"*
- Martina: *"Yo no lo hice"*
- Leandro: *"Baltazar está mintiendo"*

Si los detectives han llegado a la conclusión que hay exactamente un sospechoso que dice la verdad. ¿Quién es el culpable?

Ej. 5 En una mesa están sentadas Avelina, Bernardina y Carmina. Cada una de ellas es, o bien una humana, o bien una mujer lobo, y han dicho lo siguiente:

- Avelina: *"Al menos una de nosotras es una mujer lobo"*
- Bernardina: *"Al menos una de nosotras es una humana"*
- Carmina: *"Exactamente dos de nosotras son mujeres lobos"*

Si las mujeres lobos siempre mienten mientras que los humanos siempre hablan con la verdad, ¿por qué Carmina es la única mujer lobo? Justificar apropiadamente.

Ej. 6 Gina tiene tres amigas llamadas Yésica, Cintia y Celeste. Ellas quieren reunirse a estudiar pero hay ciertas rencillas y preferencias entre este grupo de compañeras. Si Yésica va a la reunión, ella se sentirá molesta si Cintia está presente. Cintia va a la reunión de estudio solo si Celeste irá. Si Yésica no va, entonces Celeste no irá. Justifique apropiadamente porque Cintia no puede ser invitada a la reunión, y muestre que los únicos grupos de estudio posibles que incluyen a Gina son {Gina}, {Gina, Yésica}, {Gina, Yésica, Celeste}.

Ej. 7 Sea A el conjunto $\{1, a, \emptyset, \{b\}, \{\{2\}, \clubsuit\}, B, a, 1\}$ donde $B = \{5, 7\}$. Dar la lista de miembros del conjunto A ¿Cuántos elementos tiene A? ¿Cuáles miembros de A son explícitamente conjuntos? Dar dos ejemplos, no triviales, de subconjuntos A.

Ej. 8 Considerar el conjunto $A = \{p, \{p, q\}, q, \{r\}\}$. Explicar adecuadamente porque las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{r\} \in A$
2. $r \notin A$
3. $\{\{r\}\} \subseteq A$
4. $\{r\} \not\subseteq A$
5. $\{q, p\} \in A$
6. $\{\{p, q\}\} \subseteq A$
7. $\{p, q\} \subseteq A$
8. $\{\{p, q\}, r\} \not\subseteq A$
9. $\emptyset \in A$ es falso
10. $\emptyset \subseteq A$
11. $A \in A$ es falso
12. $A \subseteq A$.

Ej. 9 Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 3, 1, 2, 4\}$
2. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
3. $A = \{1, 3, 1, 3, 1\}$, $B = \{3, 1\}$
4. $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$.
5. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 12 = 0\}$, $B = \{2, 3, 4\}$
6. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$, $B = \{a, b, c\}$
7. $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$
8. $A = \{n \in \mathbb{N} : n$ es múltiplo de 6 menor que $25\}$,
   $B = \{m \in \mathbb{N} : m$ es múltiplo de 3 menor que $27\}$
9. $A = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4h : h \in \mathbb{Z}\}$

Ej. 10 Sea $\mathcal{U}$ un *conjunto referencial* dado por $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ y sean $A = \{0, 2, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 8\}$ y $C = \{2, 3, 5, 7\}$ subconjuntos de $\mathcal{U}$. Hallar los conjuntos:

1. $A \cap C$
2. $B \cup C$
3. $A \cup B \cup C$
4. $(A \cap C) \cup B$
5. $A \cap (C \cup B)$
6. $A \cap B \cap C$
7. A^{c}, B^{c} y C^{c}
8. $B \setminus A$
9. $B \cap A^{\mathrm{c}}$
10. $A^{\mathrm{c}} \cup C^{\mathrm{c}}$
11. $(B \setminus A) \cap C$
12. $(B \cap C) \setminus A$

Ej. 11 Dados subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial $\mathcal{U}$, describir $(A \cup B \cup C)^{\mathrm{c}}$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^{\mathrm{c}}$ en términos de uniones y complementos. ¿Puede proponer una generalización del resultado obtenido?

Ej. 12 Sean A y B conjuntos arbitrarios de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Dar dos demostraciones de que A es la *unión disjunta* de $A \setminus B$ y $A \cap B$: en una mostrando la *doble contención* y en la otra haciendo uso de la *álgebra de conjuntos*.

Ej. 13 Sean A y B conjuntos arbitrarios de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar que $A \cup B$ es la unión disjunta de $A \setminus B$, $A \cap B$ y $B \setminus A$ usando solo *álgebra de conjuntos*. ¿Puede proponer un resultado análogo para la unión de tres conjuntos?

Ej. 14 Sean A y B subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Demostrar que las siguientes situaciones son equivalentes, mostrando que se cumplen las contenciones concernientes:

1. $A \subseteq B$
2. $A \cup B = B$
3. $A \cap B = A$
4. $A \setminus B = \emptyset$
5. $A^{\mathrm{c}} \cup B = \mathcal{U}$
6. $B^{\mathrm{c}} \subseteq A^{\mathrm{c}}$

¿Se sigue de este ejercicio que podemos definir la noción de *contenencia* en términos de la operación de unión de conjuntos? ¿Cuáles de las equivalencias puede probar usando álgebra de conjuntos?

Ej. 15 Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Dar dos demostraciones de que las siguientes situaciones son equivalentes, usando doble contención y álgebra de conjuntos respectivamente:

1. $A = B$
2. $A \cap B = A \cup B$
3. $A \setminus B = B \setminus A$
4. $A \setminus B \cup B \setminus A = \emptyset$
5. $A \cap C = B \cap C$ y
   $A \setminus C = B \setminus C$
6. $A \cap C = B \cap C$ y
   $A \cup C = B \cup C$

Ej. 16 Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Demostrar las siguientes identidades usando *álgebra de conjuntos*:

1. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
2. $(B \cap C) \setminus A = B \cap (C \setminus A)$
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
4. $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$
5. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
6. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

Ej. 17 Probar las siguientes afirmaciones con el método que mejor le parezca:

1. $A \subseteq \emptyset$ si y solo si $A = \emptyset$.
2. $A \cup B = \emptyset$ si y solo si $A = B = \emptyset$.
3. $A \cap B = A \cap C$ si y solo si $A \setminus B = A \setminus C$.
4. $A \cup B = A \cup C$ si y solo si $B \setminus A = C \setminus A$.
5. $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $A \setminus B = A$.
6. $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $(A \cup B) \setminus B = A$.
7. Supongamos que $A \cup B = D$. Entonces D es la unión es disjunta $A \uplus B$ si y solo si $D \setminus B = A$.
8. $A \uplus B = A \uplus C$ si y solo si $B = C$ y $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Ej. 18 Sea A el conjunto de amigas $\{\text{Delfina}, \text{Evangelina}, \text{Fermina}, \text{Georgina}\}$.

1. Describir un procedimiento para determinar el *conjunto de partes* de A, $\mathcal{P}(A)$, e implementarlo para escribir los dieciséis miembros de dicho conjunto.
2. Sea $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{P}(A) : \text{Georgina} \in B\}$. Explicar en sus propias palabras que representa el conjunto $\mathcal{G}$. ¿Qué parentezco tiene la familia de conjuntos $\mathcal{G}$ con el conjunto $\mathcal{P}(A \setminus \{\text{Georgina}\})$?
3. Sea $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}(A) : B \text{ tiene tres elementos}\}$ y $\mathcal{O} = \{B \in \mathcal{P}(A) : B \text{ tiene un elemento}\}$. ¿Cómo puede explicar que tengan la misma cantidad de elementos?
4. Proponer dos circunstancias cotidianas donde la familia de conjuntos $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{T}$ representen todos los posibles escenarios que se pueden presentar en las situaciones propuestas.

Ej. 19 Sean $A = \{\text{pollera}, \text{jean}, \text{bermuda}, \text{calza}\}$ y $B = \{\text{blusa}, \text{chomba}, \text{remera}, \text{camisa}\}$ conjuntos de prendas de vestir.

1. Describir un procedimiento para determinar el *producto cartesiano* de A por B, $A \times B$, e implementarlo para escribir los dieciséis elementos de dicho conjunto.
2. Proponer dos circunstancias cotidianas en las cuales el conjunto de parejas ordenadas $A \times B$ represente todos los posibles escenarios que se pueden dar en las situaciones planteadas.
3. Sea $\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{P}(A \cup B) : C \text{ tiene 2 elementos}\}$. La familia $\mathcal{D}$ tiene veintiocho subconjuntos de $A \cup B$. ¿Puede dar una explicación de por qué $\mathcal{D}$ tiene más elementos que $A \times B$? ¿Qué otras notorias diferencias hay entre $\mathcal{D}$ y $A \times B$, además de la cantidad de elementos?

Ej. 20 Desde comienzos del 2016, las patentes automovilísticas argentinas constan de siete caracteres: dos letras mayúsculas seguidas de tres dígitos de la numeración decimal y otras dos letras mayúsculas. Las letras son del alfabeto latino de 26 letras.

Si $N = \{0, 1, \ldots, 9\}$ es el conjunto de los diez dígitos del sistema decimal y $L = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$ es el conjunto de letras mayúsculas, entonces una patente argentina se puede *identificar* con un elemento del producto cartesiano $L \times L \times N \times N \times N \times L \times L$; la placa del ejemplo corresponde a la 7-upla $(A, G, 7, 5, 9, L, H)$.

1. Identificar con un producto cartesiano el grupo de patentes cuya parte numérica coincide con alguno de los números $\{067, 167, 367, 467, 967\}$. Justificar apropiadamente su regla de identifación. ¿Puede expresar el producto cartesiano propuesto como una unión disjunta de productos cartesianos?
2. La policía de la ciudad está buscando un auto sospechoso de un crimen. La única pista que tienen es que la patente reflejada verticalmente en un espejo se podía leer de izquierda a derecha y coincide con el número original. Por ejemplo, la patente anterior está libre de sospecha pues en un espejo se ve como H⅃ 957 GA, mientras que AH 808 HA es una de las patentes sospechosas. Emparejar las patentes sospechosas con los elementos de un producto cartesiano.
[Hint: Pensar en los conjuntos $M = \{0, 8\}$ y $S = \{\text{A}, \text{H}, \text{I}, \text{M}, \text{O}, \text{T}, \text{U}, \text{V}, \text{W}, \text{X}, \text{Y}\}$]

Ej. 21 Sean $D = \{\text{Chalileo, La Paz, Chical Co, Chacabuco, Conhelo}\}$ y $P = \{\text{Mendoza, La Pampa, San Luis}\}$. Estudiar cuáles de los siguientes conjuntos son *relaciones* de D en P y en tal caso graficarlos como un subconjunto de puntos en el producto cartesiano $D \times P$:

- $\mathcal{R}_1 = \{(\text{La Paz, Mendoza})\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(\text{Conhelo, La Pampa}), (\text{Conhelo, San Luis})\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(\text{Chalileo, San Luis}), (\text{La Paz, Mendoza}), (\text{Chical Co, Mendoza}), (\text{Chacabuco, Buenos Aires})\}$
- $\mathcal{R}_4 = \{(\text{Conhelo, La Pampa}), (\text{La Pampa, Chicalco}), (\text{Chalileo, La Pampa})\}$
- $\mathcal{R}_5 = \{(\text{Chalileo, San Luis}), (\text{Conhelo, San Luis}), (\text{La Paz, San Luis}), (\text{Chacabuco, San Luis})\}$
- $\mathcal{R}_6 = \{(\text{Chical Co, Mendoza}), (\text{La Paz, San Luis}), (\text{Chalileo, Mendoza}), (\text{Conhelo, San Luis})\}$
- $\mathcal{R}_7 = \{(\text{Chacabuco, San Luis}), (\text{Chalileo, La Pampa}), (\text{Chical Co, La Pampa}), (\text{Chalileo, Mendoza})\}$
- $\mathcal{R}_8 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_5 \cup \mathcal{R}_6 \cup \mathcal{R}_7$

Ej. 22 Sea $A = \{\text{Ana, Inés, Olga, Uma}\}$. Describir un procedimiento para determinar cuando una relación sobre el conjunto A es reflexiva (r), simétrica (s), antisimétrica (a), transitiva (t), de equivalencia o de orden, e implementarlo para verificar las siguientes afirmaciones, y además dibujar el respectivo grafo dirigido:

- $\mathcal{R}_1 = \{(\text{Ana, Ana}), (\text{Inés, Inés}), (\text{Olga, Olga}), (\text{Uma, Uma})\}$ es $r,\ s,\ a,\ t$
- $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{(\text{Ana, Inés}), (\text{Ana, Olga}), (\text{Olga, Ana})\}$ es $r,\ \neg s,\ \neg a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_3 = \{(\text{Inés, Uma}), (\text{Uma, Inés})\}$ es $\neg r,\ s,\ \neg a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_4 = \{(\text{Ana, Inés}), (\text{Inés, Olga}), (\text{Olga, Uma})\}$ es $\neg r,\ \neg s,\ a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_5 = \{(\text{Inés, Inés}), (\text{Olga, Olga}), (\text{Ana, Uma}), (\text{Inés, Olga}), (\text{Olga, Inés})\}$ es $\neg r,\ \neg s,\ \neg a,\ t$
- $\mathcal{R}_6 = \{(\text{Ana, Inés}), (\text{Ana, Olga}), (\text{Olga, Ana})\}$ es $\neg r,\ \neg s,\ \neg a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_7 = \{(\text{Uma, Uma}), (\text{Olga, Olga}), (\text{Ana, Ana})\}$ es $\neg r,\ s,\ a,\ t$
- $\mathcal{R}_8 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$ es $r,\ s,\ \neg a,\ t$
- $\mathcal{R}_9 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_4 \cup \{(\text{Ana, Olga}), (\text{Ana, Uma}), (\text{Inés, Uma})\}$ es $r,\ \neg s,\ a,\ t$

Ej. 23 Sea A un conjunto arbitrario. Describir todas las relaciones sobre A que son a la vez simétricas y antisimétricas, o de equivalencia y de orden.

Ej. 24 Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 11\}$ y considerar la relación sobre A dada por $m\mathcal{R}n$ si y solo si $m \cdot n$ es un *cuadrado perfecto*; es decir $\sqrt{m \cdot n} \in \mathbb{N}$. Escribir por extensión la relación, verificar que es una relación de equivalencia y hallar las ocho clases de equivalencia de la partición asociada.

Ej. 25 Considerar la relación sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ dada por $m\mathcal{R}n$ si y solo si $(m - \frac{19}{3})(n - \frac{20}{3}) > 0$. Mostrar que es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$ y dar todas las clases de equivalencia.

Ej. 26 Considerar el conjunto $A = \{\text{Amarillo, Azul, Rojo}\}$. Mostrar que se pueden definir cinco relaciones de equivalencia distintas sobre el conjunto A.

Ej. 27 Determinar si $\mathcal{R}$ es una *función* de A en B en los siguientes casos:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \,:\, a = 2b - 3\}$
4. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, a + b \text{ es un múltiplo de } 5\}$

Ej. 28 Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ o $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, determinar si son *inyectivas*, *sobreyectivas* o *biyectivas*:

1. $f(n) = n + 13$
2. $f(n) = n^2 - 17$
3. $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
4. $f(n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$
5. $g(m, n) = 2m - n$
6. $g(m, n) = m^2 - n^2$
7. $g(m, n) = |m| - |n|$
8. $g(m, n) = \sqrt{(m - n)^2}$

Práctico 1: Versión para imprimir

1. Aladino encontró tres cofres en una cueva. Uno de estos cofres tiene las indicaciones para llegar al cuarto de la lámpara mágica, mientras que los otros dos tienen trampas que causan una muerte instantánea y dolorosa. Cada uno de estos cofres tiene un mensaje:

   - Cofre 1: *"Hay una trampa en este cofre"*
   - Cofre 2: *"Hay una trampa en este cofre"*
   - Cofre 3: *"No hay una trampa en el cofre 2"*

   Si tan solo uno de los mensajes es verdadero, ¿por qué debería Aladino abrir el Cofre 1? Justificar.

2. Habiendo superado el desafio anterior, Aladino encontró una nueva habitación; esta vez con dos cofres. Uno de los cofres tiene la inscripción: *"Uno de estos dos cofres contiene una lámpara mágica"* mientras que en el otro cofre está escrita la frase *"El otro cofre tiene una trampa mortal"*. El espíritu guardián de la cueva ha alertado a Aladino diciendo: *"Cada uno de estos cofres contiene, o bien la lámpara, o bien una trampa mortal"* y cierra asegurando: *"Las dos advertencias son ambas verdaderas o son ambas falsas"*. ¿Puede Aladino elegir un cofre y encontrar un tesoro? En caso de poder hacerlo ¿Cuál cofre debería abrir?

3. Aladino tiene en frente de tres puertas. Detrás de una de las puertas está la salida de la cueva por la cual puede escapar con la lámpara mágica y detrás de las dos puertas restantes le espera la muerte. En cada una de las puertas hay una inscripción:

   - Puerta 1: *"La salida de la cueva está detrás de esta puerta"*
   - Puerta 2: *"La salida no está detrás de esta puerta"*
   - Puerta 3: *"La salida no está detrás de la puerta 2"*

   Aladino, habiendo llegado tan lejos y superando los desafíos hasta ese punto, no quiere usar la lámpara para escapar. Es así que Aladino recuerda las últimas recomendaciones del guardián: *"Al menos uno de los mensajes en las puertas dice la verdad, y al menos uno de estos no es cierto."* ¿Por qué debería Aladino salir por la puerta 3? Justificar apropiadamente.

4. Cuatro amigos han sido señalados como sospechosos de ser único autor de un homicidio. Ellos han declarado lo siguiente ante las autoridades:

   - Milena: *"Baltazar lo hizo"*
   - Baltazar: *"Leandro lo hizo"*
   - Martina: *"Yo no lo hice"*
   - Leandro: *"Baltazar está mintiendo"*

   Si los detectives han llegado a la conclusión que hay exactamente un sospechoso que dice la verdad. ¿Quién es el culpable?

5. En una mesa están sentadas Avelina, Bernardina y Carmina. Cada una de ellas es, o bien una humana, o bien una mujer lobo, y han dicho lo siguiente:

   - Avelina: *"Al menos una de nosotras es una mujer lobo"*
   - Bernardina: *"Al menos una de nosotras es una humana"*
   - Carmina: *"Exactamente dos de nosotras son mujeres lobos"*

   Si las mujeres lobos siempre mienten mientras que los humanos siempre hablan con la verdad, ¿por qué Carmina es la única mujer lobo? Justificar apropiadamente.

6. Gina tiene tres amigas llamadas Yésica, Cintia y Celeste. Ellas quieren reunirse a estudiar pero hay ciertas rencillas y preferencias entre este grupo de compañeras. Si Yésica va a la reunión, ella se sentirá molesta si Cintia está presente. Cintia va a la reunión de estudio solo si Celeste irá. Si Yésica no va, entonces Celeste no irá. Justifique apropiadamente porque Cintia no puede ser invitada a la reunión, y muestre que los únicos grupos de estudio posibles que incluyen a Gina son {Gina}, {Gina, Yésica}, {Gina, Yésica, Celeste}.

7. Sea A el conjunto $\{1, a, \emptyset, \{b\}, \{\{2\}, \clubsuit\}, B, a, 1\}$ donde $B = \{5, 7\}$. Dar la lista de miembros del conjunto A ¿Cuántos elementos tiene A? ¿Cuáles miembros de A son explícitamente conjuntos? Dar dos ejemplos, no triviales, de subconjuntos A.

8. Considerar el conjunto $A = \{p, \{p, q\}, q, \{r\}\}$. Explicar adecuadamente porque las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   (a) $\{r\} \in A$
   (b) $r \notin A$
   (c) $\{\{r\}\} \subseteq A$
   (d) $\{r\} \nsubseteq A$
   (e) $\{q, p\} \in A$
   (f) $\{\{p, q\}\} \subseteq A$
   (g) $\{p, q\} \subseteq A$
   (h) $\{\{p, q\}, r\} \nsubseteq A$
   (i) $\emptyset \in A$ es falso
   (j) $\emptyset \subseteq A$
   (k) $A \in A$ es falso
   (l) $A \subseteq A$.

9. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 3, 1, 2, 4\}$
   (b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
   (c) $A = \{1, 3, 1, 3, 1\}$, $B = \{3, 1\}$
   (d) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$.
   (e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 12 = 0\}$, $B = \{2, 3, 4\}$
   (f) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$, $B = \{a, b, c\}$
   (g) $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$
   (h) $A = \{n \in \mathbb{N} : n$ es múltiplo de 6 menor que $25\}$,
   $B = \{m \in \mathbb{N} : m$ es múltiplo de 3 menor que $27\}$
   (i) $A = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4h : h \in \mathbb{Z}\}$

10. Sea $\mathcal{U}$ un *conjunto referencial* dado por $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ y sean $A = \{0, 2, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 8\}$ y $C = \{2, 3, 5, 7\}$ subconjuntos de $\mathcal{U}$. Hallar los conjuntos:

(a) $A \cap C$
(b) $B \cup C$
(c) $A \cup B \cup C$
(d) $(A \cap C) \cup B$
(e) $A \cap (C \cup B)$
(f) $A \cap B \cap C$
(g) A^{c}, B^{c} y C^{c}
(h) $B \setminus A$
(i) $B \cap A^{\mathrm{c}}$
(j) $A^{\mathrm{c}} \cup C^{\mathrm{c}}$
(k) $(B \setminus A) \cap C$
(l) $(B \cap C) \setminus A$

11. Dados subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial $\mathcal{U}$, describir $(A \cup B \cup C)^{\mathrm{c}}$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^{\mathrm{c}}$ en términos de uniones y complementos. ¿Puede proponer una generalización del resultado obtenido?

12. Sean A y B conjuntos arbitrarios de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Dar dos demostraciones de que A es la *unión disjunta* de $A \setminus B$ y $A \cap B$: en una mostrando la *doble contención* y en la otra haciendo uso de la *álgebra de conjuntos*.

13. Sean A y B conjuntos arbitrarios de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar que $A \cup B$ es la unión disjunta de $A \setminus B$, $A \cap B$ y $B \setminus A$ usando solo *álgebra de conjuntos*. ¿Puede proponer un resultado análogo para la unión de tres conjuntos?

14. Sean A y B subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Demostrar que las siguientes situaciones son equivalentes, mostrando que se cumplen las contenciones concernientes:

(a) $A \subseteq B$
(b) $A \cup B = B$
(c) $A \cap B = A$
(d) $A \setminus B = \emptyset$
(e) $A^{\mathrm{c}} \cup B = \mathcal{U}$
(f) $B^{\mathrm{c}} \subseteq A^{\mathrm{c}}$

¿Se sigue de este ejercicio que podemos definir la noción de *contenencia* en términos de la operación de unión de conjuntos? ¿Cuáles de las equivalencias puede probar usando álgebra de conjuntos?

15. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Dar dos demostraciones de que las siguientes situaciones son equivalentes, usando doble contención y álgebra de conjuntos respectivamente:

(a) $A = B$
(b) $A \cap B = A \cup B$
(c) $A \setminus B = B \setminus A$
(d) $A \setminus B \cup B \setminus A = \emptyset$
(e) $A \cap C = B \cap C$ y $A \setminus C = B \setminus C$
(f) $A \cap C = B \cap C$ y $A \cup C = B \cup C$

16. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Demostrar las siguientes identidades usando *álgebra de conjuntos*:

(a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
(b) $(B \cap C) \setminus A = B \cap (C \setminus A)$
(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
(d) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$
(e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
(f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

17. Probar las siguientes afirmaciones con el método que mejor le parezca:

(a) $A \subseteq \emptyset$ si y solo si $A = \emptyset$.
(b) $A \cup B = \emptyset$ si y solo si $A = B = \emptyset$.
(c) $A \cap B = A \cap C$ si y solo si $A \setminus B = A \setminus C$.
(d) $A \cup B = A \cup C$ si y solo si $B \setminus A = C \setminus A$.
(e) $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $A \setminus B = A$.
(f) $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $(A \cup B) \setminus B = A$.
(g) Supongamos que $A \cup B = D$. Entonces D es la unión es disjunta $A \uplus B$ si y solo si $D \setminus B = A$.
(h) $A \uplus B = A \uplus C$ si y solo si $B = C$ y $A \cap B \cap C = \emptyset$.

18. Sea A el conjunto de amigas $\{\text{Delfina}, \text{Evangelina}, \text{Fermina}, \text{Georgina}\}$.

(a) Describir un procedimiento para determinar el *conjunto de partes* de A, $\mathcal{P}(A)$, e implementarlo para escribir los dieciséis miembros de dicho conjunto.
(b) Sea $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{P}(A) : \text{Georgina} \in B\}$. Explicar en sus propias palabras que representa el conjunto $\mathcal{G}$. ¿Qué parentezco tiene la familia de conjuntos $\mathcal{G}$ con el conjunto $\mathcal{P}(A \setminus \{\text{Georgina}\})$?
(c) Sea $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}(A) : B \text{ tiene tres elementos}\}$ y $\mathcal{O} = \{B \in \mathcal{P}(A) : B \text{ tiene un elemento}\}$. ¿Cómo puede explicar que tengan la misma cantidad de elementos?
(d) Proponer dos circunstancias cotidianas donde la familia de conjuntos $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{T}$ representen todos los posibles escenarios que se pueden presentar en las situaciones propuestas.

19. Sean $A = \{\text{pollera}, \text{jean}, \text{bermuda}, \text{calza}\}$ y $B = \{\text{blusa}, \text{chomba}, \text{remera}, \text{camisa}\}$ conjuntos de prendas de vestir.

(a) Describir un procedimiento para determinar el *producto cartesiano* de A por B, $A \times B$, e implementarlo para escribir los dieciséis pares ordenados de dicho conjunto.
(b) Proponer dos circunstancias cotidianas en las cuales el conjunto de parejas ordenadas $A \times B$ represente todos los posibles escenarios que se pueden dar en las situaciones planteadas.
(c) Sea $\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{P}(A \cup B) : C \text{ tiene 2 elementos}\}$. La familia $\mathcal{D}$ tiene veintiocho subconjuntos de $A \cup B$. ¿Puede dar una explicación de por qué $\mathcal{D}$ tiene más elementos que $A \times B$? ¿Qué otras notorias diferencias hay entre $\mathcal{D}$ y $A \times B$, además de la cantidad de elementos?

20. Desde comienzos del 2016, las patentes automovilísticas argentinas constan de siete caracteres: dos letras mayúsculas seguidas de tres dígitos de la numeración decimal y otras dos letras mayúsculas. Las letras son del alfabeto latino de 26 letras.

Si $N = \{0, 1, \ldots, 9\}$ es el conjunto de los diez dígitos del sistema decimal y $L = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$ es el conjunto de letras mayúsculas, entonces una patente argentina se puede *identificar* con un elemento del producto cartesiano $L \times L \times N \times N \times N \times L \times L$; la placa del ejemplo corresponde a la 7-upla $(A, G, 7, 5, 9, L, H)$.

(a) Identificar con un producto cartesiano el grupo de patentes cuya parte numérica coincide con alguno de los números $\{067, 167, 367, 467, 967\}$. Justificar apropiadamente su regla de identifación. ¿Puede expresar el producto cartesiano propuesto como una unión disjunta de productos cartesianos?

(b) La policía de la ciudad está buscando un auto sospechoso de un crimen. La única pista que tienen es que la patente reflejada verticalmente en un espejo se podía leer de izquierda a derecha y coincide con el número original. Por ejemplo, la patente anterior está libre de sospecha pues en un espejo se ve como Hꓛ ୧ƼΓ Ꭾ A, mientras que AH 808 HA es una de las patentes sospechosas. Emparejar las patentes sospechosas con los elementos de un producto cartesiano.
[Hint: Pensar en los conjuntos $M = \{0, 8\}$ y $S = \{\mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{I}, \mathrm{M}, \mathrm{O}, \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$]

21. Sean $D = \{$Chalileo, La Paz, Chical Co, Chacabuco, Conhelo$\}$ y $P = \{$Mendoza, La Pampa, San Luis$\}$. Estudiar cuáles de los siguientes conjuntos son *relaciones* de D en P y en tal caso graficarlos como un subconjunto de puntos en el producto cartesiano $D \times P$:

- $\mathcal{R}_1 = \{$(La Paz, Mendoza)$\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{$(Conhelo, La Pampa), (Conhelo, San Luis)$\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{$(Chalileo, San Luis), (La Paz, Mendoza), (Chical Co, Mendoza), (Chacabuco, Buenos Aires)$\}$
- $\mathcal{R}_4 = \{$(Conhelo, La Pampa), (La Pampa, Chicalco), (Chalileo, La Pampa)$\}$
- $\mathcal{R}_5 = \{$(Chalileo, San Luis), (Conhelo, San Luis), (La Paz, San Luis), (Chacabuco, San Luis)$\}$
- $\mathcal{R}_6 = \{$(Chical Co, Mendoza), (La Paz, San Luis), (Chalileo, Mendoza), (Conhelo, San Luis)$\}$
- $\mathcal{R}_7 = \{$(Chacabuco, San Luis), (Chalileo, La Pampa), (Chical Co, La Pampa), (Chalileo, Mendoza)$\}$
- $\mathcal{R}_8 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_5 \cup \mathcal{R}_6 \cup \mathcal{R}_7$

22. Sea $A = \{\mathrm{Ana}, \mathrm{Inés}, \mathrm{Olga}, \mathrm{Uma}\}$. Describir un procedimiento para determinar cuando una relación sobre el conjunto A es reflexiva (r), simétrica (s), antisimétrica (a), transitiva (t), de equivalencia o de orden, e implementarlo para verificar las siguientes afirmaciones, y además dibujar el respectivo grafo dirigido:

- $\mathcal{R}_1 = \{(\mathrm{Ana}, \mathrm{Ana}), (\mathrm{Inés}, \mathrm{Inés}), (\mathrm{Olga}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Uma}, \mathrm{Uma})\}$ es $r,\ s,\ a,\ t$
- $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{(\mathrm{Ana}, \mathrm{Inés}), (\mathrm{Ana}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Olga}, \mathrm{Ana})\}$ es $r,\ \neg s,\ \neg a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_3 = \{(\mathrm{Inés}, \mathrm{Uma}), (\mathrm{Uma}, \mathrm{Inés})\}$ es $\neg r,\ s,\ \neg a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_4 = \{(\mathrm{Ana}, \mathrm{Inés}), (\mathrm{Inés}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Olga}, \mathrm{Uma})\}$ es $\neg r,\ \neg s,\ a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_5 = \{(\mathrm{Inés}, \mathrm{Inés}), (\mathrm{Olga}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Ana}, \mathrm{Uma}), (\mathrm{Inés}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Olga}, \mathrm{Inés})\}$ es $\neg r,\ \neg s,\ \neg a,\ t$
- $\mathcal{R}_6 = \{(\mathrm{Ana}, \mathrm{Inés}), (\mathrm{Ana}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Olga}, \mathrm{Ana})\}$ es $\neg r,\ \neg s,\ \neg a,\ \neg t$
- $\mathcal{R}_7 = \{(\mathrm{Uma}, \mathrm{Uma}), (\mathrm{Olga}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Ana}, \mathrm{Ana})\}$ es $\neg r,\ s,\ a,\ t$
- $\mathcal{R}_8 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$ es $r,\ s,\ \neg a,\ t$
- $\mathcal{R}_9 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_4 \cup \{(\mathrm{Ana}, \mathrm{Olga}), (\mathrm{Ana}, \mathrm{Uma}), (\mathrm{Inés}, \mathrm{Uma})\}$ es $r,\ \neg s,\ a,\ t$

23. Sea A un conjunto arbitrario. Describir todas las relaciones sobre A que son a la vez simétricas y antisimétricas, o de equivalencia y de orden.

24. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 11\}$ y considerar la relación sobre A dada por $m\mathcal{R}n$ si y solo si $m \cdot n$ es un *cuadrado perfecto*; es decir $\sqrt{m \cdot n} \in \mathbb{N}$. Escribir por extensión la relación, verificar que es una relación de equivalencia y hallar las ocho clases de equivalencia de la partición asociada.

25. Considerar la relación sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ dada por $m\mathcal{R}n$ si y solo si $(m - \frac{19}{3})(n - \frac{20}{3}) > 0$. Mostrar que es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$ y dar todas las clases de equivalencia.

26. Considerar el conjunto $A = \{\mathrm{Amarillo}, \mathrm{Azul}, \mathrm{Rojo}\}$. Mostrar que se pueden definir cinco relaciones de equivalencia distintas sobre el conjunto A.

27. Determinar si $\mathcal{R}$ es una *función* de A en B en los siguientes casos:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
(c) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : a = 2b - 3\}$
(d) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \text{ es un múltiplo de } 5\}$

28. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ o $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, determinar si son *inyectivas*, *sobreyectivas* o *biyectivas*:

(a) $f(n) = n + 13$
(b) $f(n) = n^2 - 17$
(c) $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
(d) $f(n) = [\frac{n}{3}]$
(e) $g(m, n) = 2m - n$
(f) $g(m, n) = m^2 - n^2$
(g) $g(m, n) = |m| - |n|$
(h) $g(m, n) = \sqrt{(m - n)^2}$