Álgebra I
Período | 2022-II
Práctico 3

Combinatoria - Problemas de Conteo

Ej. 1 Hay un grupo de 13 amigos los cuales son de Chubut o Jujuy. Mostrar que:

1. Deben haber por lo menos 7 que son de Jujuy o al menos 7 que son de Chubut.
2. Deben haber cuando menos 4 que son de Chubut o como mínimo 10 que son de Jujuy.

Ej. 2 ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes Argentinos que deben venir a la clases de Álgebra I para garantizar que hayan al menos 5 estudiantes de la misma jurisdicción? (Argentina está dividida en 24 jurisdicciones: 23 provincias y su distrito federal, la Ciudad Autónoma de Buenos Aires).

Ej. 3 Para resolver los siguientes problemas, es obligatorio usar el principio del palomar e intentar una segunda solución sin usar dicho resultado:

1. Cinco amigas ganaron algunos *tickets* compitiendo en los juegos del parque de diversiones. Ellas han decidido juntar todos los tickets para reclamar un premio y en total tienen 4044 tickets. ¿Por qué debe haber al menos una chica que haya ganado como mínimo 809 tickets?
2. Las mismas amigas de la aventura anterior fueron a otro parque donde los juegos son mas exigentes y hay mejores premios. Esta vez juntaron 2022 tickets. ¿Por qué deben haber al menos dos amigas tal que la suma de sus tickets es por lo menos 809 tickets?
   [Hint: Notar que se puede armar cinco posibles parejas de amigas tal que la suma de los tickets de todas estas parejas es 4044]
3. Las cinco amigas quieren participar en un nuevo juego del parque el cual consiste en sentarse en una mesa circular y el *croupier* reparte al azar 5 cinco tarjetas distintas cada una con un número del 1 al 5. El grupo de amigas gana si hay tres que esten sentadas juntas cuyos números sumen al menos 11. Todas ellas saben, con seguridad, que si juegan pueden conseguir sumar al menos un 10 bajo las condiciones del juego ¿Cómo lo saben?
   [Hint: Percatarse de que, no importa como se repartan las tarjetas, se puede formar 3 ternas de amigas sentadas juntas tal que la suma de todas las tarjetas es 29.]

Ej. 4 En las pasadas mesas de examenes de Febrero, 40 estudiantes han aprobado el examen de final de Álgebra III o de Análisis Matemático III. En Álgebra III, el número de aprobados fue de 20 estudiantes mientras que en Análisis Matemático III fue de 30. ¿Cuántos estudiantes aprobaron ambos examenes?

Ej. 5 Mostrar que hay veintitrés números en el conjunto $[\![0, 57]\!]$ que no son múltiplos de 5 ni de 2.

Ej. 6 Hermina, Irina y Janina les encanta el helado de chocolate en las variedades de: Alpino, Bariloche, Gianduia, al Rhum y Almendrado. Cada amiga quiere comprar un cucurucho de una bocha. Identificar el conjunto de las distintas compras que pueden hacer las tres amigas con un conjunto de funciones y con un producto cartesiano. Justificar apropiadamente su regla de identificación. ¿Cuántas compras posibles se pueden realizar?

Ej. 7 Karina está eligiendo el *outfit* para salir con sus amigas. Las única prendas limpias que tiene disponible son una pollera, un jean, una bermuda, una calza, una blusa, una chomba, una remera y una camisa. Identificar las distintas formas que tiene Karina para vestirse con elementos de un producto cartesiano ¿De cuántas maneras puede Karina vestirse? ¿Cómo cambia el problema si la musculosa favorita de Karina también está lista para usar?

Ej. 8 ¿Recuerda el ejercicio de las patentes de autos del práctico 1? ¿Cuántas de las nuevas matrículas automovilísticas Argentinas hay que se leen igual a su imagen cuando se reflejan verticalmente en un espejo(‡)? Si actualmente todas las chapas nuevas comienzan por la letra A, ¿cuántas patentes de la anterior pregunta hay que satisfagan esta nueva condición?

(‡) Este tipo de palabras son conocidas como *Ambigramas Naturales* con simetría vertical

Ej. 9 La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos. Sea A el conjunto de todos los números de 5 dígitos. Dar conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 tales que A esté en biyección con el producto cartesiano:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5.$$

¿Cuántos números de 5 dígitos hay? Así mismo, describir los siguientes conjuntos utilizando uniones y productos cartesianos de conjuntos y calcular su cardinal:

1. El conjunto de los números pares de 5 dígitos.
2. El conjunto de los números de 5 dígitos con sólo un 3.
3. El conjunto de los números capicúas de exactamente 5 dígitos.
4. El conjunto de los números capicúas de a lo sumo 5 dígitos.

Ej. 10 Hermina, Janina e Irina quieren comprar cada una 1 kilo de helado para llevar a casa con algunos de los sabores del Ejercicio 6. Para cada una de las siguientes situaciones, hacer una identificación con elementos de *conjuntos de partes* para justificar la respectiva afirmación:

1. Si Hermina debe comprar un poco de chocolate al Rhum entonces tiene dieciséis maneras de hacer la compra.
2. Si Janina no puede llevar chocolate al Rhum pero debe llevar algo de Chocolate Bariloche entonces tiene ocho opciones diferentes para comprar su kilo de helado.
3. Si Irina debe llevar un poco de Chocolate Alpino o Chocolate almendrado entonces tiene veinticuatro maneras de realizar la compra.

Realizar una segunda justificación de los resultados usando el *principio del complemento*.

Ej. 11 Se desea sacar el grupo de representantes de un salón entre Delfina, Evangelina, Fermina y Georgina. ¿Cuántos posibles grupos se pueden formar? Si la preceptora ha exigido que Georgina no integre dicha comisión, ¿cuántos posibles comités se pueden armar?

Ej. 12 Lina compró siete *Funko pop!'s* diferentes para iniciar una colección y está pensando en cómo ordenarlos en hilera en un estante. Hacer una identificación con *arreglos* o pares ordenados de arreglos para justificar las siguientes afirmaciones:

1. Lina puede organizar sus figuras en el estante de $7!$ maneras diferentes.
2. Si tres de las figuras son de Doc Brown, Marty McFly y Einstein, y estas deben ir juntas en el orden mencionado, entonces Lina tiene $5!$ opciones para ordenar sus figuras en el estante.
3. Si las tres figuras antes destacadas deben ir juntas pero no importa en que orden, entonces hay $5! \times 3!$ maneras diferentes de disponer las figuras en el estante.
4. Si las tres figuras de *Volver al Futuro* deben ir intercaladas entre el resto de las figuras de tal forma que no queden juntas cualesquier dos de las otras cuatro, entonces Lina tiene $4! \times 3!$ opciones de lucir sus nuevas figuras.

Ej. 13 En el espectáculo de una compañía de ballet hay tres bailarines y tres bailarinas. Mostrar que los seis integrantes del elenco pueden ubicarse en una hilera alternando bailarines y bailarinas de $2 \times 3! \times 3!$. Si a la anterior condición le añadimos que hay una bailarina que no quiere estar al lado de uno de los bailarines, entonces hay 32 formas diferentes para armar la hilera.

Ej. 14 Mostrar que diez personas pueden sentarse de 9! formas diferentes en una mesa circular. Además, si son cinco mujeres y cinco hombres, y nunca deben quedar dos hombres sentados juntos, justificar que el número de maneras de organizar a las personas en la mesa es de $4! \times 5!$. ¿Cómo cambia el resultado en la última situación si además entre las diez personas están Marina y Agustín y ellos deben sentarse juntos?

Ej. 15 Las amigas del ejercicio 6 han regresado a la Heladería para comprar otro kilo de helado con los cinco sabores ya antes mencionados. Para cada una de las siguientes situaciones, hacer una identificación con elementos de un conjunto de partes para justificar la respectiva afirmación:

1. Si Hermina solo puede elegir tres sabores de los cinco de su predilección, entonces tiene $\binom{5}{3}$ compras posibles.
2. Si Janina debe llevar chocolate Bariloche y otros dos sabores más, entonces puede hacer $\binom{4}{2}$ compras distintas.
3. Si Irina debe elegir tres sabores pero no puede llevar chocolate Alpino y al Rhum en el mismo kilo de Helado, entonces tiene 7 opciones de compra.

Ej. 16 ¿De cuántas maneras puede formarse un comité de cinco personas tomadas de un grupo de doce personas entre las cuales hay cinco profesores y siete estudiantes, si:

1. no hay restricciones en la selección?
2. el comité debe tener exactamente dos profesores?
3. el comité debe tener al menos tres profesores?
4. el profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?

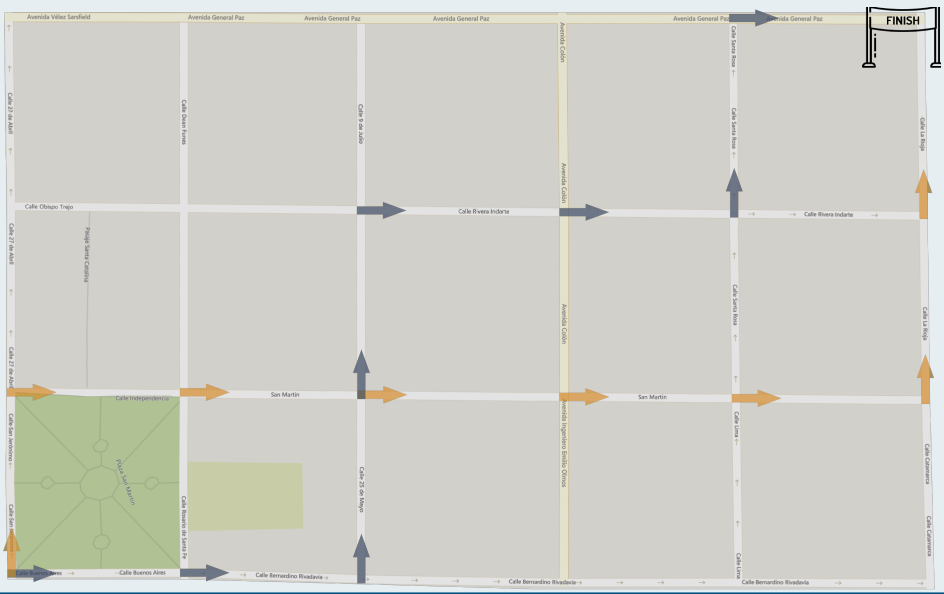
Ej. 17 Explique porqué hay $9! \times \binom{10}{7} \times 7!$ formas distintas de sentar diez mujeres y siete hombres en una mesa circular sin que hayan dos hombres sentados juntos.

Ej. 18 Resolver:

1. ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra: MATEMATICA?
2. ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?
3. Ídem con las palabras ALGEBRA y GEOMETRIA.

Ej. 19 Resolver

1. ¿Cuántos caminos diferentes en $\mathbb{R}^2$ hay entre $(0,0)$ y $(5,3)$ si cada camino se construye moviéndose una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba en cada paso?
2. ¿Cuántos caminos hay entre $(2,7)$ y $(7,10)$?
3. Deducir una fórmula general para hallar la cantidad de caminos entre $(0,0)$ y (m,n) con $m,n \in \mathbb{N}$.



Ej. 20 ¿Cuántos números de seis cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

Ej. 21 Con doce socios de un club se desea formar tres comisiones (disjuntas) llamadas Lista 1, Lista 2 y Lista 3 para que cada una visite un barrio de la ciudad. ¿Cuántas posibles ternas de listas pueden armarse? ¿Cómo cambia el problema si las listas no tienen nombre ("orden")?

Ej. 22 (Opcional) ¿Cuál es el cardinal del conjunto $\{(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{N}^6 : a+b+c+d+e+f = 26\}$?

Ej. 23 En la oficina A de una empresa trabajan 7 hombres y 5 mujeres. En la oficina B trabajan 11 hombres y 13 mujeres. Se quiere formar un equipo de 3 personas, en el cual haya al menos una persona de cada oficina. ¿Cuántos equipos diferentes se podrían formar si:

1. no hay otras restricciones?
2. el equipo deberá estar integrado por dos hombres y una mujer?
3. en el equipo hay al menos dos mujeres?
4. en el equipo hay al menos un hombre y una mujer?

Ej. 24 (Opcional) Resolver

1. En un club de cine han adquirido recientemente cinco diferentes películas argentinas. ¿De cuántas maneras se puede hacer una selección de cuatro películas donde una de estás será distinguida para abrir un festival de cine? ¿Cómo cambia el problema si en lugar de cinco películas se tiene n películas, y se debe elegir m películas $(1 \leq m \leq n)$ de las cuales una sola película será destacada?
2. Sea $n \geq 1$ un número entero. Probar la siguiente igualdad y usar la anterior situación para dar una *explicación combinatoria*:
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Ej. 25 Para $1 \leq k \leq n$ probar la siguiente igualdad y dar una interpretación combinatoria que la justifique:
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Ej. 26 Resolver:

1. En un grupo de n estudiantes, ¿de cuántas formas se puede hacer un comité de tamaño k que debe tener un subcomité de tamaño m?
2. Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar:
$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$
¿Pueda dar una interpretación combinatoria que explique la igualdad?

Ej. 27 (Opcional) [Identidad de Vandermonde]

1. El cine club ha comprado $p+q$ películas distintas: p asiáticas y q europeas. ¿De cuántas maneras se puede hacer una selección de m películas, con $m \leq p$ y $m \leq q$, si debe haber al menos k películas asiáticas $(1 < k < m)$?
2. Sean m, p y q números naturales, con $m \leq p$ y $m \leq q$. Probar la siguiente igualdad y usar la situación anterior para dar una interpretación combinatoria:
$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k}\binom{q}{m-k}$$

Ej. 28 (Opcional) Probar las siguientes identidades

1. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.
2. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.
3. $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$, $n \geq 1$.
4. $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$, $1 \leq r \leq n$.
5. $\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$.
6. $\binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2} + \ldots + \binom{2n}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$, $n \geq 2$.
7. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$, $n \geq 1$.
8. $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \geq 1$.
9. $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}$, $n \geq 4$.

¿De cuáles identidades puede dar una situación o interpretación combinatoria que las justifique?

Versión para imprimir

1. Hay un grupo de 13 amigos los cuales son de Chubut o Jujuy. Mostrar que:

    (a) Deben haber por lo menos 7 que son de Jujuy o al menos 7 que son de Chubut.
    (b) Deben haber cuando menos 4 que son de Chubut o como mínimo 10 que son de Jujuy.

2. ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes Argentinos que deben venir a la clases de Álgebra I para garantizar que hayan al menos 5 estudiantes de la misma jurisdicción? (Argentina está dividida en 24 jurisdicciones: 23 provincias y su distrito federal, la Ciudad Autónoma de Buenos Aires).

3. Para resolver los siguientes problemas, es obligatorio usar el principio del palomar e intentar una segunda solución sin usar dicho resultado:

    (a) Cinco amigas ganaron algunos *tickets* compitiendo en los juegos del parque de diversiones. Ellas han decidido juntar todos los tickets para reclamar un premio y en total tienen 4044 tickets. ¿Por qué debe haber al menos una chica que haya ganado como mínimo 809 tickets?
    (b) Las mismas amigas de la aventura anterior fueron a otro parque donde los juegos son mas exigentes y hay mejores premios. Esta vez juntaron 2022 tickets. ¿Por qué deben haber al menos dos amigas tal que la suma de sus tickets es por lo menos 809 tickets?
    [Hint: Notar que se puede armar cinco posibles parejas de amigas tal que la suma de los tickets de todas estas parejas es 4044]
    (c) Las cinco amigas quieren participar en un nuevo juego del parque el cual consiste en sentarse en una mesa circular y el *croupier* reparte al azar 5 cinco tarjetas distintas cada una con un número del 1 al 5. El grupo de amigas gana si hay tres que esten sentadas juntas cuyos números sumen al menos 11. Todas ellas saben, con seguridad, que si juegan pueden conseguir sumar al menos un 10 bajo las condiciones del juego ¿Cómo lo saben?
    [Hint: Percatarse de que, no importa como se repartan las tarjetas, se puede formar 3 ternas de amigas sentadas juntas tal que la suma de todas las tarjetas es 29.]

4. En las pasadas mesas de examenes de Febrero, 40 estudiantes han aprobado el examen de final de Álgebra III o de Análisis Matemático III. En Álgebra III, el número de aprobados fue de 20 estudiantes mientras que en Análisis Matemático III fue de 30. ¿Cuántos estudiantes aprobaron ambos examenes?

5. Mostrar que hay veintitrés números en el conjunto $[\![0, 57]\!]$ que no son múltiplos de 5 ni de 2.

6. Hermina, Irina y Janina les encanta el helado de chocolate en las variedades de: Alpino, Bariloche, Gianduia, al Rhum y Almendrado. Cada amiga quiere comprar un cucurucho de una bocha. Identificar el conjunto de las distintas compras que pueden hacer las tres amigas con un conjunto de funciones y con un producto cartesiano. Justificar apropiadamente su regla de identificación. ¿Cuántas compras posibles se pueden realizar?

7. Karina está eligiendo el *outfit* para salir con sus amigas. Las única prendas limpias que tiene disponible son una pollera, un jean, una bermuda, una calza, una blusa, una chomba, una remera y una camisa. Identificar las distintas formas que tiene Karina para vestirse con elementos de un producto cartesiano ¿De cuántas maneras puede Karina vestirse? ¿Cómo cambia el problema si la musculosa favorita de Karina también está lista para usar?

8. ¿Recuerda el ejercicio de las patentes de autos del práctico 1? ¿Cuántas de las nuevas matrículas automovilísticas Argentinas hay que se leen igual a su imagen cuando se reflejan verticalmente en un espejo(‡)? Si actualmente todas las chapas nuevas comienzan por la letra A, ¿cuántas patentes de la anterior pregunta hay que satisfagan esta nueva condición?

(‡) Este tipo de palabras son conocidas como *Ambigramas Naturales* con simetría vertical

9. La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos. Sea A el conjunto de todos los números de 5 dígitos. Dar conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 tales que A esté en biyección con el producto cartesiano:
$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5.$$
¿Cuántos números de 5 dígitos hay? Así mismo, describir los siguientes conjuntos utilizando uniones y productos cartesianos de conjuntos y calcular su cardinal:

    (a) El conjunto de los números pares de 5 dígitos.
    (b) El conjunto de los números de 5 dígitos con sólo un 3.
    (c) El conjunto de los números capicúas de exactamente 5 dígitos.
    (d) El conjunto de los números capicúas de a lo sumo 5 dígitos.

10. Hermina, Janina e Irina quieren comprar cada una 1 kilo de helado para llevar a casa con algunos de los sabores del Ejercicio 6. Para cada una de las siguientes situaciones, hacer una identificación con elementos de *conjuntos de partes* para justificar la respectiva afirmación:

    (a) Si Hermina debe comprar un poco de chocolate al Rhum entonces tiene dieciséis maneras de hacer la compra.
    (b) Si Janina no puede llevar chocolate al Rhum pero debe llevar algo de Chocolate Bariloche entonces tiene ocho opciones diferentes para comprar su kilo de helado.
    (c) Si Irina debe llevar un poco de Chocolate Alpino o Chocolate almendrado entonces tiene veinticuatro maneras de realizar la compra.

    Realizar una segunda justificación de los resultados usando el *principio del complemento*.

11. Se desea sacar el grupo de representantes de un salón entre Delfina, Evangelina, Fermina y Georgina. ¿Cuántos posibles grupos se pueden formar? Si la preceptora ha exigido que Georgina no integre dicha comisión, ¿cuántos posibles comités se pueden armar?

12. Lina compró siete *Funko pop!'s* diferentes para iniciar una colección y está pensando en cómo ordenarlos en hilera en un estante. Hacer una identificación con *arreglos* o pares ordenados de arreglos para justificar las siguientes afirmaciones:

    (a) Lina puede organizar sus figuras en el estante de $7!$ maneras diferentes.
    (b) Si tres de las figuras son de Doc Brown, Marty McFly y Einstein, y estas deben ir juntas en el orden mencionado, entonces Lina tiene $5!$ opciones para ordenar sus figuras en el estante.
    (c) Si las tres figuras antes destacadas deben ir juntas pero no importa en que orden, entonces hay $5! \times 3!$ maneras diferentes de disponer las figuras en el estante.
    (d) Si las tres figuras de *Volver al Futuro* deben ir intercaladas entre el resto de las figuras de tal forma que no queden juntas cualesquier dos de las otras cuatro, entonces Lina tiene $4! \times 3!$ opciones de lucir sus nuevas figuras.

13. En el espectáculo de una compañía de ballet hay tres bailarines y tres bailarinas. Mostrar que los seis integrantes del elenco pueden ubicarse en una hilera alternando bailarines y bailarinas de $2 \times 3! \times 3!$. Si a la anterior condición le añadimos que hay una bailarina que no quiere estar al lado de uno de los bailarines, entonces hay 32 formas diferentes para armar la hilera.

14. Mostrar que diez personas pueden sentarse de $9!$ formas diferentes en una mesa circular. Además, si son cinco mujeres y cinco hombres, y nunca deben quedar dos hombres sentados juntos, justificar que el número de maneras de organizar a las personas en la mesa es de $4! \times 5!$. ¿Cómo cambia el resultado en la última situación si además entre las diez personas están Marina y Agustín y ellos deben sentarse juntos?

15. Las amigas del ejercicio 6 han regresado a la Heladería para comprar otro kilo de helado con los cinco sabores ya antes mencionados. Para cada una de las siguientes situaciones, hacer una identificación con elementos de un conjunto de partes para justificar la respectiva afirmación:

    (a) Si Hermina solo puede elegir tres sabores de los cinco de su predilección, entonces tiene $\binom{5}{3}$ compras posibles.
    (b) Si Janina debe llevar chocolate Bariloche y otros dos sabores más, entonces puede hacer $\binom{4}{2}$ compras distintas.
    (c) Si Irina debe elegir tres sabores pero no puede llevar chocolate Alpino y al Rhum en el mismo kilo de Helado, entonces tiene 7 opciones de compra.

16. ¿De cuántas maneras puede formarse un comité de cinco personas tomadas de un grupo de doce personas entre las cuales hay cinco profesores y siete estudiantes, si:

    (a) no hay restricciones en la selección?
    (b) el comité debe tener exactamente dos profesores?
    (c) el comité debe tener al menos tres profesores?
    (d) el profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?

17. Explique porqué hay $9! \times \binom{10}{7} \times 7!$ formas distintas de sentar diez mujeres y siete hombres en una mesa circular sin que hayan dos hombres sentados juntos.

18. Resolver:

    (a) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra: MATEMATICA?
    (b) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?
    (c) Ídem con las palabras ALGEBRA y GEOMETRIA.

19. Resolver

    (a) ¿Cuántos caminos diferentes en $\mathbb{R}^2$ hay entre $(0,0)$ y $(5,3)$ si cada camino se construye moviéndose una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba en cada paso?
    (b) ¿Cuántos caminos hay entre $(2,7)$ y $(7,10)$?
    (c) Deducir una fórmula general para hallar la cantidad de caminos entre $(0,0)$ y (m,n) con $m, n \in \mathbb{N}$.

20. ¿Cuántos números de seis cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

21. Con doce socios de un club se desea formar tres comisiones (disjuntas) llamadas Lista 1, Lista 2 y Lista 3 para que cada una visite un barrio de la ciudad. ¿Cuántas posibles ternas de listas pueden armarse? ¿Cómo cambia el problema si las listas no tienen nombre ("orden")?

22. (Opcional) ¿Cuál es el cardinal del conjunto $\{(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{N}^6 : a+b+c+d+e+f = 26\}$?

23. En la oficina A de una empresa trabajan 7 hombres y 5 mujeres. En la oficina B trabajan 11 hombres y 13 mujeres. Se quiere formar un equipo de 3 personas, en el cual haya al menos una persona de cada oficina. ¿Cuántos equipos diferentes se podrían formar si:

    (a) no hay otras restricciones?
    (b) el equipo deberá estar integrado por dos hombres y una mujer?
    (c) en el equipo hay al menos dos mujeres?
    (d) en el equipo hay al menos un hombre y una mujer?

24. (Opcional) Resolver

(a) En un club de cine han adquirido recientemente cinco diferentes películas argentinas. ¿De cuántas maneras se puede hacer una selección de cuatro películas donde una de estás será distinguida para abrir un festival de cine? ¿Cómo cambia el problema si en lugar de cinco películas se tiene n películas, y se debe elegir m películas $(1 \leq m \leq n)$ de las cuales una sola película será destacada?

(b) Sea $n \geq 1$ un número entero. Probar la siguiente igualdad y usar la anterior situación para dar una *explicación combinatoria*:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

25. Para $1 \leq k \leq n$ probar la siguiente igualdad y dar una interpretación combinatoria que la justifique:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

26. Resolver:

(a) En un grupo de n estudiantes, ¿de cuántas formas se puede hacer un comité de tamaño k que debe tener un subcomité de tamaño m?

(b) Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

¿Pueda dar una interpretación combinatoria que explique la igualdad?

27. (Opcional) [Identidad de Vandermonde]

(a) El cine club ha comprado $p+q$ películas distintas: p asiáticas y q europeas. ¿De cuántas maneras se puede hacer una selección de m películas, con $m \leq p$ y $m \leq q$, si debe haber al menos k películas asiáticas $(1 < k < m)$?

(b) Sean m, p y q números naturales, con $m \leq p$ y $m \leq q$. Probar la siguiente igualdad y usar la situación anterior para dar una interpretación combinatoria:

$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k}\binom{q}{m-k}$$

28. (Opcional) Probar las siguientes identidades

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$

(c) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$, $n \geq 1$.

(d) $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$, $1 \leq r \leq n$.

(e) $\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$.

(f) $\binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2} + \ldots + \binom{2n}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$, $n \geq 2$.

(g) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$, $n \geq 1$.

(h) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \geq 1$.

(i) $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}$, $n \geq 4$.

¿De cuáles identidades puede dar una situación o interpretación combinatoria que las justifique?