Álgebra I
Período | 2022-II
Práctico 1

Ej. 1 Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números.

1. 13 y 21
2. 233 y 377
3. 31 y 38.
4. 29 y 50.

Ej. 2 Sean a, b, c enteros tales que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$ y $c \mid (a + b)$. Mostrar que $\operatorname{mcd}(c, a) = 1$ y $\operatorname{mcd}(c, b) = 1$.

Ej. 3 Sea $a \in \mathbb{Z}$. Mostrar que

(a) a es impar si y solo si $\operatorname{mcd}(a, 2) = 1$.

(b) a no es múltiplo de 3 si y solo si $\operatorname{mcd}(a^2 - 1, 3) = 3$

Ej. 4 Probar que si $\operatorname{mcd}(a, 4) = 2$ y $\operatorname{mcd}(b, 4) = 2$ entonces $\operatorname{mcd}(a + b, 4) = 4$.

Ej. 5 Demostrar las siguientes *propiedades fundamentales del máximo común divisor*:

(a) Si d es un divisor positivo común de a y b, entonces

$$\operatorname{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}\operatorname{mcd}(a, b).$$

(b) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son no nulos, entonces $\dfrac{a}{\operatorname{mcd}(a, b)}$ y $\dfrac{b}{\operatorname{mcd}(a, b)}$ son *coprimos*.

(c) Si a, b, c enteros con a y b no ambos nulos y $c > 0$, entonces

$$\operatorname{mcd}(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot \operatorname{mcd}(a, b).$$

(d) Si $a \mid b \cdot c$, entonces $a \mid \operatorname{mcd}(a, b) \operatorname{mcd}(a, c)$.

Ej. 6 (*Propiedades de los coprimos*) Sean a y b *coprimos*. Probar

(a) Si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
(b) Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
(c) Si $c \mid a$ entonces b y c también son coprimos.
(d) $\operatorname{mcd}(a \cdot c, b)$ es igual a $\operatorname{mcd}(c, b)$.
(e) $\operatorname{mcd}(a \cdot b, c)$ es igual a $\operatorname{mcd}(a, c) \cdot \operatorname{mcd}(b, c)$.
(f) Si c es coprimo con a, entonces $b \cdot c$ es coprimo con a.
(g) Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene $\operatorname{mcd}(a^m, b^n) = 1$

Ej. 7 Sean a, b y n números enteros con a y b coprimos, y $n > 0$. Mostrar que:

(a) $\operatorname{mcd}(2a + 3, 4a + 5) = 1$.
(b) $\operatorname{mcd}(2a + 1, 9a + 4) = 1$.
(c) $\operatorname{mcd}(5a + 2, 7a + 3) = 1$.
(d) $\operatorname{mcd}(6a + 3, 6a + 5) = 1$.
(e) $\operatorname{mcd}(5a + 8, 7a + 3) = 1$ ó 41
(f) $\operatorname{mcd}(7a - 3b, 2a - b) = 1$
(g) $\operatorname{mcd}(a + 2b, 2a + b) = 1$ ó 3.
(h) $\operatorname{mcd}(a + b, a - b) = 1$ ó 2.
(i) $\operatorname{mcd}(2^n + 7^n, 2^n - 7^n) = 1$.
(j) $\operatorname{mcd}(2^n + 5^{n+1}, 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9.

Ej. 8 (Opcional) Sean a, b, w, x, y, z números enteros con a y b no ambos nulos. Supongamos que $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ y $w \cdot z - y \cdot x = 1$. Mostrar que

$$\operatorname{mcd}(w \cdot a + x \cdot b, y \cdot a + z \cdot b) = d.$$

Ej. 9 Sean a y b enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 2$. Probar que $\text{mcd}(7a + 3b, 4a - 5b) = 2$ ó 94.

Ej. 10 Sean a y b números enteros coprimos. Mostrar:

(a) $\text{mcd}(2a + 1, \frac{1}{2}a(a + 1)) = 1$.
(b) $\text{mcd}(a^2 - a + 1, a + 1) = 1$ ó 3.
(c) $\text{mcd}(a + b, ab) = 1$
(d) $\text{mcd}(a + b, a^2b^3) = 1$.
(e) $\text{mcd}(a^2 + b^2, a + b) = 1$ ó 2.
(f) $\text{mcd}(a^2 + 2, a^3 + 1) = 1$, 3 ó 9.
(g) $\text{mcd}(2a^2 + 3a - 1, 5a + 6) = 1$ ó 43.
(h) $\text{mcd}(2a^2 + 6a - 4, 2a^2 + 4a - 3) = 1$.

Ej. 11 Sean a y b enteros no ambos nulos y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\text{mcd}(a^n, b^n) = (\text{mcd}(a, b))^n$$

Ej. 12 (Opcional) Sean a y b enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 5$. Probar que $\text{mcd}(a^n + b^n, a^{n-1}b) = 5^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
[Hint: Notar que si f y g son coprimos, entonces $f^n + g^n$ y $f^{n-1}g$ también son coprimos.]

Ej. 13 (Opcional) Sean a y b enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 5$. Probar que $\text{mcd}(5a - 10b, ab) = 25$ ó 50. Dar ejemplos de a y b donde se obtenga cada posible resultado.
[Hint: Una forma de hacer el ejercicio es notando que si a es par entonces b debe ser impar.]

Ej. 14 Probar que

(a) El producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

(b) El producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

(c) Si a es un entero impar, entonces $24 \mid a(a^2 - 1)$.

(d) (Opcional) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}$ es un entero.(†)

(†) En los próximos prácticos revisitaremos este resultado teniendo nuevas herramientas.

Ej. 15 Sean a y b números naturales, coprimos y tales que $a \cdot b$ es un *número cuadrado*. Demostrar que a y b deben ser ambos *números cuadrados*.
[Hint: Si $a \cdot b = n^2$, verificar que $a = (\text{mcd}(a, n))^2$]

Ej. 16 Usar el Ejercicio 15 para mostrar que el producto de dos enteros consecutivos no nulos nunca es un *número cuadrado*, e intentar una segunda prueba sin usar directamente dicho resultado

Ej. 17 Sean a y b enteros no nulos y sea n un número natural. Si $a^n \mid b^n$, demostrar que $a \mid b$.
[Hint: Una forma de resolver el ejercicio es mostrando $|a| = \text{mcd}(a, b)$. Notar que $|a^n| = \text{mcd}(a^n, b^n)$ y recordar el Práctico 2 - Ejercicio 8, incisos 3 y 4.]

Ej. 18 Sean a y n números naturales. Si $\sqrt[n]{a}$ es un número *racional*, entonces $\sqrt[n]{a}$ debe ser un **número natural**.

Ej. 19 Probar que $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{47}$ y $\sqrt[4]{k}$ con $k \in [\![17, 80]\!]$ son números irracionales.
[Hint: Notar que $2^2 < 6 < 3^2$ y $3^3 < 47 < 4^3$]

Ej. 20 Mostrar que para todo $n \geq 2$, $\sqrt[n]{n}$ es un número irracional.
[Hint: Recordar/Probar que $2^n > n > 1$ y recordar el Práctico 2 - Ejercicio 8, inciso 1.]

Ej. 21 (Opcional) Sea n un número natural tal que la cifra de sus *unidades* es 2, 3, 7 u 8. Demostrar que n no tiene *raíz cuadrada exacta*(‡).

(‡) En los próximos prácticos revisitaremos este resultado teniendo nuevas herramientas.

Ej. 22 Considerar la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definida por

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* : a \cdot b \text{ es un } \textit{número cuadrado}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}^*$.
[Hint: Se puede usar el Ejercicio 18 para verificar que $\mathcal{R}$ satisface *transitividad*.]

Ej. 23 (Opcional) Sean n, m y a números naturales, $a \neq 1$. Demostrar que $\operatorname{mcd}(a^n - 1,\, a^m - 1) = a^{\operatorname{mcd}(n,m)} - 1$.
[Hint: Recordar Práctico 4 - Ejercicio 19]

Ej. 24 Calcular el *mínimo común múltiplo* de los siguientes pares de números

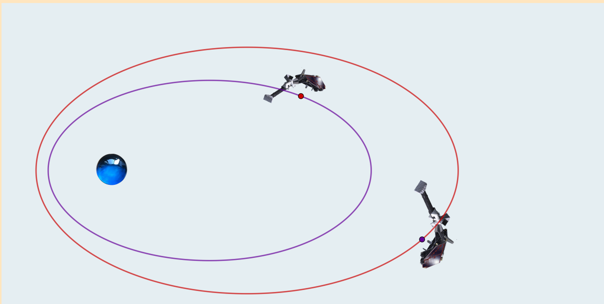
(a) 2 y 5 (b) 7 y 13. (c) 12 y 15. (d) 10 y 6.

Ej. 25 Completar y demostrar:

(a) Si $a \in \mathbb{Z}$ no nulo, entonces $\operatorname{mcm}(a, a) = \dots$
(b) Si $a,\, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\operatorname{mcm}(a, b) = b$ si y sólo si ...
(c) Si $a,\, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcm}(a, b)$ si y sólo si ...

Ej. 26 (Opcional) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\operatorname{mcd}(a + b, \operatorname{mcm}(a, b)) = \operatorname{mcd}(a, b)$.
[Hint: Se puede obtener una demostración usando el Ejercicio 10 - (c)]

Ej. 27 (Opcional) [Space Math @ NASA: "A Problem in Satellite Synchrony"] La Misión THEMIS ha lanzado dos satelites que orbitan la Tierra en el mismo plano para studiar el campo electromagnético de la Tierra. El Satélite más cercano al planeta tiene un período de cuatro horas y el segundo satélite tiene un período de ocho horas. Mirando a la Tierra desde el *Polo Norte*, suponer que los satélites comenzaron a orbitar juntos en la misma longitud de 100° oeste. ¿Después de cuantas horas ambos satélites estarán de nuevo en la misma longitud?



Ej. 28 Encontrar todas las soluciones enteras de las ecuaciones:

(a) $233x + 377y = 0$ (b) $13x + 21y = 3$ (c) $6x + 10y = 4$ (d) $50x + 29y = 1$

Ej. 29 El grupo de Ciencia de Materiales de FaMAF ha adquirido recientemente una máquina para ayudar a un viejo dispositivo en la realización de análisis de aleaciones. Durante un proceso que dura exactamente un minuto, el nuevo artefacto es capaz de realizar 50 testeos mientras que la vieja máquina realiza tan solo 29 testeos y cada tanto se debe dejar descansar un rato a criterio del operario. Si ambas máquinas han realizado 2022 análisis y la vieja máquina no ha trabajado más de 30 minutos ¿Cuántos análisis realizó la nueva adquisición del grupo?

Versión para imprimir

1. Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números.

   (a) 13 y 21
   (b) 233 y 377
   (c) 31 y 38.
   (d) 29 y 50.

2. Sean a, b, c enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 1$ y $c \mid (a + b)$. Mostrar que $\text{mcd}(c, a) = 1$ y $\text{mcd}(c, b) = 1$.

3. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Mostrar que

   (a) a es impar si y solo si $\text{mcd}(a, 2) = 1$.
   (b) a no es múltiplo de 3 si y solo si $\text{mcd}(a^2 - 1, 3) = 3$

4. Probar que si $\text{mcd}(a, 4) = 2$ y $\text{mcd}(b, 4) = 2$ entonces $\text{mcd}(a + b, 4) = 4$.

5. Demostrar las siguientes *propiedades fundamentales del máximo común divisor*:

   (a) Si d es un divisor positivo común de a y b, entonces
   $$\text{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}\text{mcd}(a, b).$$
   (b) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son no nulos, entonces $\dfrac{a}{\text{mcd}(a, b)}$ y $\dfrac{b}{\text{mcd}(a, b)}$ son *coprimos*.
   (c) Si a, b, c enteros con a y b no ambos nulos y $c > 0$, entonces
   $$\text{mcd}(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot \text{mcd}(a, b).$$
   (d) Si $a \mid b \cdot c$, entonces $a \mid \text{mcd}(a, b)\,\text{mcd}(a, c)$.

6. (*Propiedades de los coprimos*) Sean a y b *coprimos*. Probar

   (a) Si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
   (b) Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
   (c) Si $c \mid a$ entonces b y c también son coprimos.
   (d) $\text{mcd}(a \cdot c, b)$ es igual a $\text{mcd}(c, b)$.
   (e) $\text{mcd}(a \cdot b, c)$ es igual a $\text{mcd}(a, c) \cdot \text{mcd}(b, c)$.
   (f) Si c es coprimo con a, entonces $b \cdot c$ es coprimo con a.
   (g) Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene $\text{mcd}(a^m, b^n) = 1$

7. Sean a, b y n números enteros con a y b coprimos, y $n > 0$. Mostrar que:

   (a) $\text{mcd}(2a + 3, 4a + 5) = 1$.
   (b) $\text{mcd}(2a + 1, 9a + 4) = 1$.
   (c) $\text{mcd}(5a + 2, 7a + 3) = 1$.
   (d) $\text{mcd}(6a + 3, 6a + 5) = 1$.
   (e) $\text{mcd}(5a + 8, 7a + 3) = 1$ ó 41
   (f) $\text{mcd}(7a - 3b, 2a - b) = 1$
   (g) $\text{mcd}(a + 2b, 2a + b) = 1$ ó 3.
   (h) $\text{mcd}(a + b, a - b) = 1$ ó 2.
   (i) $\text{mcd}(2^n + 7^n, 2^n - 7^n) = 1$.
   (j) $\text{mcd}(2^n + 5^{n+1}, 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9.

8. (Opcional) Sean a, b, w, x, y, z números enteros con a y b no ambos nulos. Supongamos que $\text{mcd}(a, b) = d$ y $w \cdot z - y \cdot x = 1$. Mostrar que
   $$\text{mcd}(w \cdot a + x \cdot b, y \cdot a + z \cdot b) = d.$$

9. Sean a y b enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 2$. Probar que $\text{mcd}(7a + 3b, 4a - 5b) = 2$ ó 94.

10. Sean a y b números enteros coprimos. Mostrar:

    (a) $\text{mcd}(2a + 1, \frac{1}{2}a(a + 1)) = 1$.
    (b) $\text{mcd}(a^2 - a + 1, a + 1) = 1$ ó 3.
    (c) $\text{mcd}(a + b, ab) = 1$
    (d) $\text{mcd}(a + b, a^2b^3) = 1$.
    (e) $\text{mcd}(a^2 + b^2, a + b) = 1$ ó 2.
    (f) $\text{mcd}(a^2 + 2, a^3 + 1) = 1$, 3 ó 9.
    (g) $\text{mcd}(2a^2 + 3a - 1, 5a + 6) = 1$ ó 43.
    (h) $\text{mcd}(2a^2 + 6a - 4, 2a^2 + 4a - 3) = 1$.

11. Sean a y b enteros no ambos nulos y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces
    $$\text{mcd}(a^n, b^n) = (\text{mcd}(a, b))^n$$

12. (Opcional) Sean a y b enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 5$. Probar que $\text{mcd}(a^n + b^n, a^{n-1}b) = 5^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
    [Hint: Notar que si f y g son coprimos, entonces $f^n + g^n$ y $f^{n-1}g$ también son coprimos.]

13. (Opcional) Sean a y b enteros tales que $\text{mcd}(a, b) = 5$. Probar que $\text{mcd}(5a - 10b, ab) = 25$ ó 50. Dar ejemplos de a y b donde se obtenga cada posible resultado.
    [Hint: Una forma de hacer el ejercicio es notando que si a es par entonces b debe ser impar.]

14. Probar que

(a) El producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

(b) El producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

(c) Si a es un entero impar, entonces $24 \mid a(a^2-1)$.

(d) (Opcional) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}$ es un entero.(†)

(†) En los próximos prácticos revisitaremos este resultado teniendo nuevas herramientas.

15. Sean a y b números naturales, coprimos y tales que $a \cdot b$ es un *número cuadrado*. Demostrar que a y b deben ser ambos *números cuadrados*.
[Hint: Si $a \cdot b = n^2$, verificar que $a = (\mathrm{mcd}(a,n))^2$]

16. Usar el Ejercicio 15 para mostrar que el producto de dos enteros consecutivos no nulos nunca es un *número cuadrado*, e intentar una segunda prueba sin usar directamente dicho resultado

17. Sean a y b enteros no nulos y sea n un número natural. Si $a^n \mid b^n$, demostrar que $a \mid b$.
[Hint: Una forma de resolver el ejercicio es mostrando $|a| = \mathrm{mcd}(a,b)$. Notar que $|a^n| = \mathrm{mcd}(a^n, b^n)$ y recordar el Práctico 2 - Ejercicio 8, incisos 3 y 4.]

18. Sean a y n números naturales. Si $\sqrt[n]{a}$ es un número *racional*, entonces $\sqrt[n]{a}$ debe ser un **número natural**.

19. Probar que $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{47}$ y $\sqrt[4]{k}$ con $k \in [\![17, 80]\!]$ son números irracionales.
[Hint: Notar que $2^2 < 6 < 3^2$ y $3^3 < 47 < 4^3$]

20. Mostrar que para todo $n \geq 2$, $\sqrt[n]{n}$ es un número irracional.
[Hint: Recordar/Probar que $2^n > n > 1$ y recordar el Práctico 2 - Ejercicio 8, inciso 1.]

21. (Opcional) Sea n un número natural tal que la cifra de sus *unidades* es 2, 3, 7 u 8. Demostrar que n no tiene *raíz cuadrada exacta*(‡).

(‡) En los próximos prácticos revisitaremos este resultado teniendo nuevas herramientas.

22. Considerar la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definida por

$$\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* : a \cdot b \text{ es un } \textit{número cuadrado}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}^*$.
[Hint: Se puede usar el Ejercicio 18 para verificar que $\mathcal{R}$ satisface *transitividad*.]

23. (Opcional) Sean n, m y a números naturales, $a \neq 1$. Demostrar que $\mathrm{mcd}(a^n - 1,\, a^m - 1) = a^{\mathrm{mcd}(n,m)} - 1$.
[Hint: Recordar Práctico 4 - Ejercicio 19]

24. Calcular el *mínimo común múltiplo* de los siguientes pares de números

(a) 2 y 5 (b) 7 y 13. (c) 12 y 15. (d) 10 y 6.

25. Completar y demostrar:

(a) Si $a \in \mathbb{Z}$ no nulo, entonces $\mathrm{mcm}(a,a) = \ldots$
(b) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\mathrm{mcm}(a,b) = b$ si y sólo si ...
(c) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcm}(a,b)$ si y sólo si ...

26. (Opcional) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\mathrm{mcd}(a+b, \mathrm{mcm}(a,b)) = \mathrm{mcd}(a,b)$.
[Hint: Se puede obtener una demostración usando el Ejercicio 10 - (c)]

27. (Opcional) [Space Math @ NASA: "A Problem in Satellite Synchrony"] La Misión THEMIS ha lanzado dos satelites que orbitan la Tierra en el mismo plano para studiar el campo electromagnético de la Tierra. El Satélite más cercano al planeta tiene un período de cuatro horas y el segundo satélite tiene un período de ocho horas. Mirando a la Tierra desde el *Polo Norte*, suponer que los satélites comenzaron a orbitar juntos en la misma longitud de 100° oeste. ¿Después de cuantas horas ambos satélites estarán de nuevo en la misma longitud?

28. Encontrar todas las soluciones enteras de las ecuaciones:

(a) $233x + 377y = 0$ (b) $13x + 21y = 3$ (c) $6x + 10y = 4$ (d) $50x + 29y = 1$

29. El grupo de Ciencia de Materiales de FaMAF ha adquirido recientemente una máquina para ayudar a un viejo dispositivo en la realización de análisis de aleaciones. Durante un proceso que dura exactamente un minuto, el nuevo artefacto es capaz de realizar 50 testeos mientras que la vieja máquina realiza tan solo 29 testeos y cada tanto se debe dejar descansar un rato a criterio del operario. Si ambas máquinas han realizado 2022 análisis y la vieja máquina no ha trabajado más de 30 minutos ¿Cuántos análisis realizó la nueva adquísición del grupo?