FAMAF

Álgebra I
Período 2022-II
Práctico Opcional

Ej. 1 Demostrar las siguientes afirmaciones a partir de los axiomas y propiedades básicas de los números reales, donde a, b y c son números reales:

(a) $0+0=0$ y $1\cdot 1=1$.
(b) $a\cdot 0=0$
(c) $a\cdot b=0$ sii $a=0$ o $b=0$
(d) $-(-a)=a$
(e) $(-1)\cdot b=-b$
(f) $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$
(g) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$
(h) $(-1)^{-1}=-1$
(i) Si a y b no son cero, entonces $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$
(j) Si $a\neq 0$, entonces $a^{-1}\neq 0$.
(k) Si $a+b=a+c$, entonces $b=c$.

Ej. 2 Sean a, b, c y d números reales, con b y d diferentes de cero. Recordar que la notación $\frac{a}{b}$ denota al número real ab^{-1}. Demostrar las siguientes afirmaciones a partir de los axiomas y propiedades básicas de los números reales:

(a) $\dfrac{0}{b}=0$.
(b) $\dfrac{a}{1}=a$.
(c) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ sii $ad=bc$.
(d) $-\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$.
(e) $\dfrac{a\cdot d}{b\cdot d}=\dfrac{a}{b}$.
(f) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.
(g) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{b}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$
(h) $\left(\dfrac{b}{d}\right)^{-1}=\dfrac{d}{b}$.
(i) $\dfrac{a}{\frac{b}{d}}=\dfrac{ad}{b}$.

Ej. 3 Sean a y b en $\mathbb{R}$. Verificar el resultado de los siguientes productos, llamados *productos notables*, y memorizarlos:

(a) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$
(b) $(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
(c) $(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$
(d) $(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3$

Ej. 4 Sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$. Demostrar los siguientes resultados relacionados con los axiomas de orden:

(a) $0<1$ y $-1<0$.
(b) Si $a\neq 0$, entonces $a>0$ sii $\dfrac{1}{a}>0$
(c) Si a y b son positivos, entonces $a<b$ si y solo si $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$.
(d) $a\cdot b>0$ sii $a>0$ y $b>0$, o $a<0$ y $b<0$.
(e) $a\cdot b<0$ sii a y b tienen *signo* distinto.
(f) Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$.
(g) Si $0<a<b$ y $0<c<d$, entonces $0<a\cdot c<b\cdot d$.
(h) Si $a\neq 0$, entonces a^2 es positivo.
(i) Si a y b son positivos, entonces $a<b$ sii $a^2<b^2$
(j) No existe un número real x tal que $x^2=-1$.
(k) $a^2+b^2=0$ sii $a=0$ y $b=0$.

Ej. 5 Sean a, b y c en $\mathbb{R}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $x^2=x$
(b) Si $b\cdot c=a$, entonces $c=\dfrac{a}{b}$
(c) $a<b$ si y solo si $a^2<b^2$.
(d) $a\cdot b<a\cdot c$ si y solo si $b<c$.
(e) Si $b\cdot c<a$, entonces $c<\dfrac{a}{b}$
(f) Si $a^2<b^2$, entonces $a<b$.
(g) $\sqrt[2]{a^2}=a$.
(h) Existen $x,y\in\mathbb{R}$ tales que $\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.
(i) Si a y b no son cero y cumplen que $a+b=1$, entonces $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)=1$.

Números Reales

Ej. 6 Analizar la validez de la siguiente demostración.

Teorema: Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = 0$.

Demostración: $a^2 = a^2 \therefore a^2 - a^2 = a^2 - a^2 \therefore (a-a)(a+a) = a(a-a) \therefore a + a = a \therefore a = 0$.

Ej. 7 Analizar la validez de la siguiente demostración.

Teorema: Todo número real es positivo.

Demostración: $0 < 1 \therefore 0 \cdot a < 1 \cdot a \therefore 0 < a$.

Ej. 8 Sean a y b números reales, con $a < b$, y sea $c = \frac{a+b}{2}$ el cual es llamado el *punto medio* entre a y b. Mostrar que $a < c < b$. Más generalmente, sea t un real tal que $0 < t < 1$, demostrar que $a < t \cdot b + (1-t) \cdot a < b$ y mejor aún, si x es cualquier número real entre a y b; i.e. $a < x < b$, demostrar que debe existir un $s \in \mathbb{R}$ tal que $0 < s < 1$ y $x = s \cdot b + (1-s) \cdot a$.

Ej. 9 Sean a, b y c números reales, con a positivo y $b \neq c$. Entre los siguientes pares de números, determinar cuál es el más grande o para que valores puede decidir que alguno es más grande:

(a) a^2 y $a \cdot (a+1)$.

(b) b^2 y $(b-1) \cdot (b+1)$.

(c) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ y $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$

(d) $\frac{1}{2}b^2 + 2$ y $\frac{3}{2}b - 2$.

(e) $\frac{b^2+c^2}{2}$ y $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

(f) $\frac{1}{(a+1)^2}$ y $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$.

(g) $\sqrt[2]{a} + \frac{1}{\sqrt[2]{a+1}}$ y $\sqrt[2]{a+1}$.

(h) $\frac{a}{a+1}$ y $\frac{a}{\sqrt[2]{a^2+1}}$.

(i) $\frac{a}{\sqrt[2]{a^2+1}}$ y 1.

Ej. 10 Resolver las siguientes *inecuaciones*:

(a) $x^2 + 7 > 7$

(b) $x^2 > 4$

(c) $x^2 - 2x + 5 > 3$

(d) $(x-13)(x-17) > 12$

(e) $\frac{1}{x} > 1$

(f) $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

(g) $\frac{2}{x-3} > 1$

(h) $|x^2 + 1| > 5$

(i) $|x+1| > 2$

(j) $|x-5| \geq 3$

(k) $\frac{x-1}{x+1} > 0$

(l) $|x||x-5| \geq 6$

Ej. 11 Sean a, b y c números reales, con a y b positivos. Demostrar que:

(a) $\frac{a}{b} \geq 4 - \frac{4b}{a}$

(b) $\sqrt[2]{a^2+1} < a + \frac{1}{2a}$

(c) Si $c \geq -1$, entonces $(1+c)^2 \geq 1 + 2 \cdot c$.

(d) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[2]{a \cdot b}$

(e) Si $a > 1$ y $b > 1$, entonces $a \cdot b > 1$

(f) Si $a \cdot b = 1$, entonces $a + b \geq 2$

Ej. 12 (Opcional) Sean u, v y w números reales positivos. Mostrar que

(a) $(u+v) \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) \geq 4$

(b) $(u+v+w) \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) \geq 9$

¿Puede proponer una generalización de este resultado y probarla?
[Hint: Una forma de encarar el ejercicio es mostrando que $(u+v) \cdot \left(u^{-1} + v^{-1}\right)$ es igual a $2 + \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$ y usar el Ejercicio 11 - inciso (f).]

Ej. 13 (Opcional) [Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz en el plano] Probar que para todo a, b,c y d en $\mathbb{R}$ se satisface

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Ej. 14 (Opcional) Sean a, b y c números reales positivos. Probar:

1. $a^3 + a^0 \geq a^2 + a^1$
2. $\left(\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{b} + \frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)^2 \geq 8$
   [Hint: Una forma de hacerlo es tieniendo en cuenta el Ejercicio 11 - Inciso (f)]
3. Si $a \leq b \leq c$ y $abc = 1$, entonces $a + b + c \geq 3$.
   Teniendo en cuenta Ejercicio 11 - Inciso (f) ¿puede generalizar el resultado y probarlo?
   [Hint: Notar que $a \leq 1$ y $1 \leq c$ y por tanto $ac + 1 \leq a + c$. Ejercicio 11 - Inciso (f) es muy útil.]
4. $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.
5. Si $a + b + c = 1$, entonces $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$
   [Hint: Verificar que $(1-a)(1-b)(1-c) = abc(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1)$ y usar Ejercicio 12]

Ej. 15 (Opcional) Sean a y b en $\mathbb{R}$ tales que $a^3 + b^3 = 4$ y $ab = \frac{2}{3}$. Encontrar el valor de $a + b$
[Hint: Verificar que $a^3 + b^3$ es igual a $(a+b)^3 - 3ab(a+b)$.]

Ej. 16 Sean a y b reales no nulos. Entonces

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} < \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Ej. 17 Resolver las siguientes *inecuaciones*

(a) $|x-1| + |x+2| = 3$

(b) $|x+1| + |x-1| = x+4$

(c) $|x-1| + |x+1| < 1$

(d) $|5x-1| \leq |3x-2|$.

(e) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leq 1$

(f) $\dfrac{x}{||x|-2|} \leq \dfrac{x-1}{|x-3|}$

(g) $0 \leq 3x - 2 < |x^2 - x|$

(h) $\sqrt{x} \leq x + 1$

(i) $\sqrt{x-1} \leq x - 3$

Ej. 18 (Opcional) Sean a y b números reales tales que $|a| < 1$ y $|b| < 1$. Probar que $|a+b| < |ab+1|$

Ej. 19 (Opcional) Sean n y m números naturales. Mostrar que $\left|\sqrt{2} - \dfrac{m}{n}\right| > \dfrac{1}{2n(m+n)}$

Ej. 20 (Opcional) Sea a en $\mathbb{R}$ tal que $|a| < 3$. Entonces $|a^2 - 2a - 15|$ pierde contra $8|a+3|$.

Ej. 21 (Opcional) Probar que para todo a y b en $\mathbb{R}$ se cumple

$$\left|\sqrt[2]{a} - \sqrt[2]{b}\right| \leq \sqrt[2]{|a-b|} \leq \sqrt[2]{|a|} + \sqrt[2]{|b|}.$$

Ej. 22 (Opcional) Sean a y b números reales mayores a 1. Mostrar que $\sqrt[2]{a-1} + \sqrt[2]{b-1} \leq \sqrt[2]{ab}$

Versión para imprimir

1. Demostrar las siguientes afirmaciones a partir de los axiomas y propiedades básicas de los números reales, donde a, b y c son números reales:

   (a) $0+0=0$ y $1\cdot 1=1$.
   (b) $a\cdot 0=0$
   (c) $a\cdot b=0$ sii $a=0$ o $b=0$
   (d) $-(-a)=a$
   (e) $(-1)\cdot b=-b$
   (f) $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$
   (g) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$
   (h) $(-1)^{-1}=-1$
   (i) Si a y b no son cero, entonces $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$
   (j) Si $a\neq 0$, entonces $a^{-1}\neq 0$.
   (k) Si $a+b=a+c$, entonces $b=c$.

2. Sean a, b, c y d números reales, con b y d diferentes de cero. Recordar que la notación $\frac{a}{b}$ denota al número real ab^{-1}. Demostrar las siguientes afirmaciones a partir de los axiomas y propiedades básicas de los números reales:

   (a) $\dfrac{0}{b}=0.$
   (b) $\dfrac{a}{1}=a.$
   (c) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ sii $ad=bc$.
   (d) $-\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}.$
   (e) $\dfrac{a\cdot d}{b\cdot d}=\dfrac{a}{b}.$
   (f) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}.$
   (g) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{b}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$
   (h) $\left(\dfrac{b}{d}\right)^{-1}=\dfrac{d}{b}.$
   (i) $\dfrac{a}{\frac{b}{d}}=\dfrac{ad}{b}.$

3. Sean a y b en $\mathbb{R}$. Verificar el resultado de los siguientes productos, llamados *productos notables*, y memorizarlos:

   (a) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$
   (b) $(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
   (c) $(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$
   (d) $(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3$

4. Sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$. Demostrar los siguientes resultados relacionados con los axiomas de orden:

   (a) $0<1$ y $-1<0$.
   (b) Si $a\neq 0$, entonces $a>0$ sii $\dfrac{1}{a}>0$
   (c) Si a y b son positivos, entonces $a<b$ si y solo si $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$.
   (d) $a\cdot b>0$ sii $a>0$ y $b>0$, o $a<0$ y $b<0$.
   (e) $a\cdot b<0$ sii a y b tienen *signo* distinto.
   (f) Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$.
   (g) Si $0<a<b$ y $0<c<d$, entonces $0<a\cdot c<b\cdot d$.
   (h) Si $a\neq 0$, entonces a^2 es positivo.
   (i) Si a y b son positivos, entonces $a<b$ sii $a^2<b^2$
   (j) No existe un número real x tal que $x^2=-1$.
   (k) $a^2+b^2=0$ sii $a=0$ y $b=0$.

5. Sean a, b y c en $\mathbb{R}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) Existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $x^2=x$
   (b) Si $b\cdot c=a$, entonces $c=\dfrac{a}{b}$
   (c) $a<b$ si y solo si $a^2<b^2$.
   (d) $a\cdot b<a\cdot c$ si y solo si $b<c$.
   (e) Si $b\cdot c<a$, entonces $c<\dfrac{a}{b}$
   (f) Si $a^2<b^2$, entonces $a<b$.
   (g) $\sqrt[2]{a^2}=a$.
   (h) Existen $x, y\in\mathbb{R}$ tales que $\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.
   (i) Si a y b no son cero y cumplen que $a+b=1$, entonces $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)=1.$

6. Analizar la validez de la siguiente demostración.

   Teorema: *Si $a\in\mathbb{R}$, entonces $a=0$.*
   Demostración: $a^2=a^2 \therefore a^2-a^2=a^2-a^2 \therefore (a-a)(a+a)=a(a-a) \therefore a+a=a \therefore a=0.$

7. Analizar la validez de la siguiente demostración.

   Teorema: *Todo número real es positivo.*
   Demostración: $0<1 \therefore 0\cdot a<1\cdot a \therefore 0<a.$

8. Sean a y b números reales, con $a<b$, y sea $c=\frac{a+b}{2}$ el cual es llamado el *punto medio* entre a y b. Mostrar que $a<c<b$. Más generalmente, sea t un real tal que $0<t<1$, demostrar que $a<t\cdot b+(1-t)\cdot a<b$ y mejor aún, si x es cualquier número real entre a y b; i.e. $a<x<b$, demostrar que debe existir un $s\in\mathbb{R}$ tal que $0<s<1$ y $x=s\cdot b+(1-s)\cdot a$.

9. Sean a, b y c números reales, con a positivo y $b\neq c$. Entre los siguientes pares de números, determinar cuál es el más grande o para que valores puede decidir que alguno es más grande:

   (a) a^2 y $a\cdot(a+1)$.
   (b) b^2 y $(b-1)\cdot(b+1)$.
   (c) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ y $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$
   (d) $\dfrac{1}{2}b^2+2$ y $\dfrac{3}{2}b-2$.
   (e) $\dfrac{b^2+c^2}{2}$ y $\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2$

(f) $\frac{1}{(a+1)^2}$ y $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$.

(g) $\sqrt[2]{a}+\frac{1}{\sqrt[2]{a+1}}$ y $\sqrt[2]{a+1}$.

(h) $\frac{a}{a+1}$ y $\frac{a}{\sqrt[2]{a^2+1}}$.

(i) $\frac{a}{\sqrt[2]{a^2+1}}$ y 1.

10. Resolver las siguientes *inecuaciones*:

(a) $x^2+7>7$

(b) $x^2>4$

(c) $x^2-2x+5>3$

(d) $(x-13)(x-17)>12$

(e) $\frac{1}{x}>1$

(f) $x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2$

(g) $\frac{2}{x-3}>1$

(h) $|x^2+1|>5$

(i) $|x+1|>2$

(j) $|x-5|\geq 3$

(k) $\frac{x-1}{x+1}>0$

(l) $|x||x-5|\geq 6$

11. Sean a, b y c números reales, con a y b positivos. Demostrar que:

(a) $\frac{a}{b}\geq 4-\frac{4b}{a}$

(b) $\sqrt[2]{a^2+1}<a+\frac{1}{2a}$

(c) Si $c\geq -1$, entonces $(1+c)^2\geq 1+2\cdot c$.

(d) $\frac{a+b}{2}\geq \sqrt[2]{a\cdot b}$

(e) Si $a>1$ y $b>1$, entonces $a\cdot b>1$

(f) Si $a\cdot b=1$, entonces $a+b\geq 2$

12. (Opcional) Sean u, v y w números reales positivos. Mostrar que

(a) $(u+v)\cdot\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\geq 4$

(b) $(u+v+w)\cdot\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)\geq 9$

¿Puede proponer una generalización de este resultado y probarla?
[Hint: Una forma de encarar el ejercicio es mostrando que $(u+v)\cdot\left(u^{-1}+v^{-1}\right)$ es igual a $2+\frac{u}{v}+\frac{v}{u}$ y usar el Ejercicio 11 - inciso (f).]

13. (Opcional) [Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz en el plano] Probar que para todo a, b,c y d en $\mathbb{R}$ se satisface

$$(ac+bd)^2\leq(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

14. (Opcional) Sean a, b y c números reales positivos. Probar:

(a) $a^3+a^0\geq a^2+a^1$

(b) $\left(\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{b}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)^2\geq 8$
[Hint: Una forma de hacerlo es tieniendo en cuenta el Ejercicio 11 - Inciso (f)]

(c) Si $a\leq b\leq c$ y $abc=1$, entonces $a+b+c\geq 3$.
Teniendo en cuenta Ejercicio 11 - Inciso (f) ¿puede generalizar el resultado y probarlo?
[Hint: Notar que $a\leq 1$ y $1\leq c$ y por tanto $ac+1\leq a+c$. Ejercicio 11 - Inciso (f) es muy útil.]

(d) $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$.

(e) Si $a+b+c=1$, entonces $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$
[Hint: Verificar que $(1-a)(1-b)(1-c)=abc(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1)$ y usar Ejercicio 12]

15. (Opcional) Sean a y b en $\mathbb{R}$ tales que $a^3+b^3=4$ y $ab=\frac{2}{3}$. Encontrar el valor de $a+b$
[Hint: Verificar que a^3+b^3 es igual a $(a+b)^3-3ab(a+b)$.]

16. Sean a y b reales no nulos. Entonces

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}<\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

17. Resolver las siguientes *inecuaciones*

(a) $|x-1|+|x+2|=3$

(b) $|x+1|+|x-1|=x+4$

(c) $|x-1|+|x+1|<1$

(d) $|5x-1|\leq|3x-2|$.

(e) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$

(f) $\frac{x}{||x|-2|}\leq\frac{x-1}{|x-3|}$

(g) $0\leq 3x-2<|x^2-x|$

(h) $\sqrt{x}\leq x+1$

(i) $\sqrt{x-1}\leq x-3$

18. (Opcional) Sean a y b números reales tales que $|a|<1$ y $|b|<1$. Probar que $|a+b|<|ab+1|$

19. (Opcional) Sean n y m números naturales. Mostrar que $\left|\sqrt{2}-\frac{m}{n}\right|>\frac{1}{2n(m+n)}$

20. (Opcional) Sea a en $\mathbb{R}$ tal que $|a|<3$. Entonces $|a^2-2a-15|$ pierde contra $8|a+3|$.

21. (Opcional) Probar que para todo a y b en $\mathbb{R}$ se cumple

$$\left|\sqrt[2]{a}-\sqrt[2]{b}\right|\leq\sqrt[2]{|a-b|}\leq\sqrt[2]{|a|}+\sqrt[2]{|b|}.$$

22. (Opcional) Sean a y b números reales mayores a 1. Mostrar que $\sqrt[2]{a-1}+\sqrt[2]{b-1}\leq\sqrt[2]{ab}$