FAMAF

Álgebra I

Período | 2022-II

Práctico 6

Ej. 1 Dar todos los números primos positivos menores que 100.

Ej. 2 Sea n un número natural, $n > 1$. El número n es un número primo si y solo si todos los primos positivos $p \leq \sqrt{n}$ no dividen a n.

Ej. 3 (Opcional) Sea n un número natural, $n > 1$, tal que $p \nmid n$ para todo número primo tal que $p \leq \sqrt[3]{n}$. Muestre que n debe ser un número primo ó el producto de dos primos.

Ej. 4 Determinar cuáles de los siguientes números son primos: $113, 123, 131, 151, 199, 503$.

Ej. 5 Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces $p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$

Ej. 6 Sean a, b, p números enteros, con p un número primo. Si $p \mid a \cdot b$ entonces $p \mid a$ ó $p \mid b$.

Ej. 7 Si p es un número primo y $p \mid a^n$, probar que $p^n | a^n$.

Ej. 8 Si $6 \mid a \cdot b \cdot c$ entonces $6 \mid a \cdot b$ ó $6 \mid b \cdot c$ ó $6 \mid c \cdot a$.

Ej. 9 Determinar todos los $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con a, b coprimos y c, d coprimos tales que

1. $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.
2. $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.
3. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Z}$.

Ej. 10 Si $\operatorname{mcd}(a, b) = p$ con p primo, hallar los posibles valores para

(a) $\operatorname{mcd}(a^2, b)$ (b) $\operatorname{mcd}(a^2, b^2)$ (c) $\operatorname{mcd}(a^3, b)$ (d) $\operatorname{mcd}(a^2, b^3)$

Ej. 11 Rehacer el Ejercicio 10, incisos (a), (c) y (d) del práctico 5, usando el hecho de que todo natural mayor a 1 tiene al menos un número primo que lo divide.

Ej. 12 Sea $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 2$ es un número primo. Mostrar que $\operatorname{mcd}(a + b, a^2 + b^2 - nab)$ es 1 o $n + 2$.
[Hint: Usar division de polinomios para descubrir que $a^2 + b^2 - nab = (a + b)(a - (n + 1)b) + (n + 2)b^2$]

Ej. 13 Mostar que todo primo positivo p divide a $k! \cdot \binom{p}{k}$ con $k = 1, 2, \ldots, p - 1$, y en consecuencia $p \mid \binom{p}{k}$.

Ej. 14 Sea p un número primo positivo. Probar que $\operatorname{mcd}(p, (p - 1)!) = 1$.

Ej. 15 Demostrar que: si $n > 2$ existe un p primo tal que $n < p < n!$

Ej. 16 Si $p \geq 5$ es un número primo, mostrar que $p^2 + 2$ es un número compuesto.
[Hint: Como p es primo, entonces p es de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$.]

Ej. 17 Si p es un número primo impar diferente de 5 probar que $p^2 - 1$ ó $p^2 + 1$ es divisible por 10.

Teorema Fundamental de la Aritmética

Ej. 18 Si $p \geq q \geq 5$ y p y q son ambos primos, probar que $24 \mid q^2 - 1$ y usar este hecho para deducir que $24 \mid p^2 - q^2$.

Ej. 19 Sea p un número natural tal que p, $p+2$ y $p+4$ son números primos impares. Demostrar que p debe ser el número 3; es decir, 3, 5 y 7 es la única terna de números naturales impares consecutivos que son primos.

Ej. 20 Sean a y b números naturales con una factorización en números primos positivos del tipo $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, donde $\alpha_i \geq 0$ y $\beta_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, s$. Entonces el máximo común divisor de a y b es

$$\operatorname{mcd}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min\{\alpha_s, \beta_s\}}.$$

Usar este resultado para deducir que $a \mid b$ si y solo si $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, \ldots, s$.

Ej. 21 Sean a y b números naturales mayores a 1. Demostrar que a y b son coprimos si y solo sus factorizaciones como producto de números primos positivos dada por el *Teorema Fundamental de la Aritmética* no tienen primos en común.

Ej. 22 Rehacer los Ejercicios 15, 17 y 19 del práctico 5 usando el *Teorema Fundamental de la Aritmética.*

Ej. 23 Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un número primo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

Ej. 24 Reinterpretar la *relación de equivalencia* del Ejercicio 22 del práctico 5 usando el *Teorema Fundamental de la Aritmética*, es decir, dados a y b en $\mathbb{Z}^*$, dar condiciones sobre su factorización en números primos para que esten relacionados.

Ej. 25 (Opcional) Sean p un número primo y $n \in \mathbb{N}$. Sea p^α la mayor potencia de p que divide a $n!$. Probar que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es la máxima potencia de p que divide a n.

Ej. 26 (Opcional) Determinar

(a) La máxima potencia de 3 que divide a 77!.
(b) La máxima potencia de 9 que divide a 77!.
(c) La máxima potencia de 20 que divide a 81!.
(d) La máxima potencia de 24 que divide a 81!.
(e) En cuántos ceros termina el desarrollo decimal de 81!.

Ej. 27 Hallar el menor múltiplo de 168 que es un cuadrado.

Ej. 28 Sea a un número natural mayor a 1 y sea $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ su factorización en números primos positivos distintos. Mostrar que a tiene exactamente $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1)$ divisores positivos.

Ej. 29 (Opcional) Encontrar una sucesión de 100 números naturales consecutivos tales que todos sean números compuestos. Generalizar a una sucesión de n naturales consecutivos.

Ej. 30 (Opcional) Probar que todo número n mayor que 11 es la suma de dos números compuestos.
[Hint: Razonar sobre si n es par ó impar. En el primer caso pensar en $n-4$ y en el segundo considerar a $n-9$]

Ej. 31 Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $n \in \mathbb{N}$, $6 \mid n$ y $15 \mid n$, entonces $n > 29$.
(b) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $n^2 = 24m^3$.
(c) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $2n^2 = 3m^2$.
(d) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{mcd}(n^2 - 1, n^3) = 1$.
(e) Si $n \in \mathbb{N}$ tiene una cantidad impar de divisores positivos entonces n es un *cuadrado*.

Versión para imprimir

1. Dar todos los números primos positivos menores que 100.

2. Sea n un número natural, $n > 1$. El número n es un número primo si y solo si todos los primos positivos $p \leq \sqrt{n}$ no dividen a n.

3. (Opcional) Sea n un número natural, $n > 1$, tal que $p \nmid n$ para todo número primo tal que $p \leq \sqrt[3]{n}$. Muestre que n debe ser un número primo ó el producto de dos primos.

4. Determinar cuáles de los siguientes números son primos: $113, 123, 131, 151, 199, 503$.

5. Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces $p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$

6. Sean a, b, p números enteros, con p un número primo. Si $p \mid a \cdot b$ entonces $p \mid a$ ó $p \mid b$.

7. Si p es un número primo y $p \mid a^n$, probar que $p^n | a^n$.

8. Si $6 \mid a \cdot b \cdot c$ entonces $6 \mid a \cdot b$ ó $6 \mid b \cdot c$ ó $6 \mid c \cdot a$.

9. Determinar todos los $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con a, b coprimos y c, d coprimos tales que

   (a) $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.
   (c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Z}$.

10. Si $\text{mcd}(a, b) = p$ con p primo, hallar los posibles valores para

    (a) $\text{mcd}(a^2, b)$
    (b) $\text{mcd}(a^2, b^2)$
    (c) $\text{mcd}(a^3, b)$
    (d) $\text{mcd}(a^2, b^3)$

11. Rehacer el Ejercicio 10, incisos (a), (c) y (d) del práctico 5, usando el hecho de que todo natural mayor a 1 tiene al menos un número primo que lo divide.

12. Sea $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\text{mcd}(a, b) = 1$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+2$ es un número primo. Mostrar que $\text{mcd}(a+b, a^2+b^2-nab)$ es 1 o $n+2$.
    [Hint: Usar division de polinomios para descubrir que $a^2 + b^2 - nab = (a+b)(a-(n+1)b) + (n+2)b^2$]

13. Mostar que todo primo positivo p divide a $k! \cdot \binom{p}{k}$ con $k = 1, 2, \ldots, p-1$, y en consecuencia $p \mid \binom{p}{k}$.

14. Sea p un número primo positivo. Probar que $\text{mcd}(p, (p-1)!) = 1$.

15. Demostrar que: si $n > 2$ existe un p primo tal que $n < p < n!$

16. Si $p \geq 5$ es un número primo, mostrar que $p^2 + 2$ es un número compuesto.
    [Hint: Como p es primo, entonces p es de la forma $6k+1$ ó $6k+5$.]

17. Si p es un número primo impar diferente de 5 probar que $p^2 - 1$ ó $p^2 + 1$ es divisible por 10.

18. Si $p \geq q \geq 5$ y p y q son ambos primos, probar que $24 \mid q^2 - 1$ y usar este hecho para deducir que $24 \mid p^2 - q^2$.

19. Sea p un número natural tal que p, $p+2$ y $p+4$ son números primos impares. Demostrar que p debe ser el número 3; es decir, 3, 5 y 7 es la única terna de números naturales impares consecutivos que son primos.

20. Sean a y b números naturales con una factorización en números primos positivos del tipo $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, donde $\alpha_i \geq 0$ y $\beta_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, s$. Entonces el máximo común divisor de a y b es
    $$\text{mcd}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min\{\alpha_s, \beta_s\}}.$$
    Usar este resultado para deducir que $a \mid b$ si y solo si $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, \ldots, s$.

21. Sean a y b números naturales mayores a 1. Demostrar que a y b son coprimos si y solo sus factorizaciones como producto de números primos positivos dada por el *Teorema Fundamental de la Aritmética* no tienen primos en común.

22. Rehacer los Ejercicios 15, 17 y 19 del práctico 5 usando el *Teorema Fundamental de la Aritmética.*

23. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un número primo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

24. Reinterpretar la *relación de equivalencia* del Ejercicio 22 del práctico 5 usando el *Teorema Fundamental de la Aritmética*, es decir, dados a y b en $\mathbb{Z}^*$, dar condiciones sobre su factorización en números primos para que esten relacionados.

25. (Opcional) Sean p un número primo y $n \in \mathbb{N}$. Sea p^α la mayor potencia de p que divide a $n!$. Probar que
    $$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$
    donde $m \in \mathbb{N}$ es la máxima potencia de p que divide a n.

26. (Opcional) Determinar

(a) La máxima potencia de 3 que divide a $77!$.
(b) La máxima potencia de 9 que divide a $77!$.
(c) La máxima potencia de 20 que divide a $81!$.
(d) La máxima potencia de 24 que divide a $81!$.
(e) En cuántos ceros termina el desarrollo decimal de $81!$.

27. Hallar el menor múltiplo de 168 que es un cuadrado.

28. Sea a un número natural mayor a 1 y sea $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ su factorización en números primos positivos distintos. Mostrar que a tiene exactamente $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1)$ divisores positivos.

29. (Opcional) Encontrar una sucesión de 100 números naturales consecutivos tales que todos sean números compuestos. Generalizar a una sucesión de n naturales consecutivos.

30. (Opcional) Probar que todo número n mayor que 11 es la suma de dos números compuestos.
[Hint: Razonar sobre si n es par ó impar. En el primer caso pensar en $n-4$ y en el segundo considerar a $n-9$]

31. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $n \in \mathbb{N}$, $6 \mid n$ y $15 \mid n$, entonces $n > 29$.
(b) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $n^2 = 24m^3$.
(c) Existen $n, m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $2n^2 = 3m^2$.
(d) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(n^2 - 1, n^3) = 1$.
(e) Si $n \in \mathbb{N}$ tiene una cantidad impar de divisores positivos entonces n es un *cuadrado*.