Álgebra

Período | 2022-II

Práctico 8

Ej. 1 Escribir los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ y dibujarlos en el plano.

(a) $(3 + 2i)(3 - 2i)$
(b) $(2 + 3i)(5 + 7i)$
(c) $\left(\frac{115}{169} - \frac{276}{169}i\right)(5 + 12i)$
(d) $\dfrac{(1 + 4i)(1 - 4i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)}$
(e) $\dfrac{-137i}{37 + i} + \dfrac{-5 + 2i}{1 + 3i}$
(f) $\dfrac{-85}{(13 + 16i)(1 + 3i)}$
(g) $i^{13} - i^9 + 1$
(h) $i^{2023} - i^{2022} + i^{2021}$
(i) $(1 - i)^4$
(j) $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{i}}$
(k) $(2i - 1)^2 \left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right)$
(l) $\left(\frac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$

Ej. 2 Sean z, z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$. Probar que:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$
(b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
(c) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
(d) $|\overline{z}| = |z|$
(e) $z\overline{z} = |z|^2$
(f) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$
(g) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
(h) $|z| \geq |\mathfrak{Re}(z)|$ y $|z| \geq |\mathfrak{Im}(z)|$
(i) $z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$.
(j) $z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$.
(k) Si z es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $\overline{z}$ también lo es.

Ej. 3 (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se da si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Ej. 4 Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|$$

Ej. 5 Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Si z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.
(b) Si z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.

Ej. 6 (Opcional) Simplificar las siguientes expresiones:

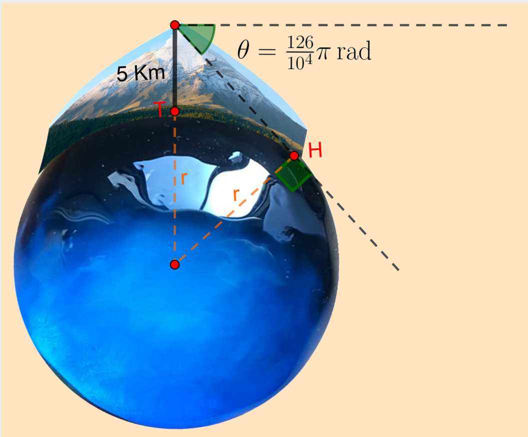
(a) $\arccos(\cos(2\pi))$
(b) $\sin(\arcsin(\sin(-\pi/6)) + \pi)$
(c) $\arctan(\tan(5\pi/4))$
(d) $\cos(\arcsin(12/13) + \arcsin(4/5))$
(e) $\arcsin(4/5) + \arccos(1/\sqrt{50})$
(f) $\arctan(\sqrt{2}) - \arctan(1/\sqrt{2})$

Ej. 7 (Opcional) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(a) $\tan(x) = \cos(x)$
(b) $\sin(x) - \cos(x) = \frac{1}{2}$
(c) $2\cos^2(x) + \sin(x) = 1$
(d) $\arctan(28/x) = \arcsin(1/(12 - x))$
(e) $\arcsin(x) = \arctan(2x)$
(f) $2\arcsin(x) = \arcsin(3x/4)$

Ej. 8 (Opcional) Abril y Pedro están haciendo mediciones con dos *teodolitos electrónicos* comprados por la FaMAF. Ambos quieren usar dichos instrumentos para dar la altura aproximada de uno de los *quebrachos blancos* de ciudad universitaria. Para hacer esto, Abril ha calibrado su teodolito a una altura de $(\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3})$ metros y ha medido un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{6}$ rad con respecto al punto más alto del árbol. Posteriormente, Pedro ha caminado desde la posición de Abril hacía el árbol unos $(4\sqrt{3}+1)$ metros sobre la misma línea recta que forma Abril con el Árbol. Él ha graduado su teodolito a la misma altura del instrumento usado por Abril y ha medido un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{4}$ rad con respecto al mismo punto en el árbol considerado en las mediciones de Abril. ¿Cuál es la altura aproximada del árbol?

Ej. 9 (Opcional) Un observador está en la cima de una montaña la cual tiene una altura de 5 kilometros sobre el nivel del mar. Desde allí mide un ángulo de depresión $\frac{126}{10^4}\pi$ radianes al horizonte del océano. Estimar el radio de la Tierra.



Ej. 10 (Opcional) [Space Math @ NASA: "Solving Trigonometric Equations"] Astrónomos quieren encontrar regiones de formación estelar jóvenes en el *Brazo Espiral de Perseo* de la *Vía Láctea*. Ellos pueden solo obtener imagenes ópticas de objetos dentro de 10000 años luz del Sol. Si el Brazo Espiral de Perseo está localizado a 35000 años luz del centro de la Vía Láctea y la distancia del Sol al centro galáctico es 27000 años luz, ¿cuáles son los dos ángulos de longitud galácticos, θ_1 y θ_2, en los cuales ellos pueden buscar para encontrar estos objetos?

Ej. 11 Determinar el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

(a) $65+72i$

(b) $\sqrt{3}-i$

(c) $-1+i$

(d) $-1-\sqrt{3}i$

(e) $\cos(\frac{7}{4}\pi)+i\sin(\frac{1}{4}\pi)$

(f) $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$,

(g) $z = \dfrac{i}{-2-2i}$,

(h) $z = (\sqrt{3}-i)^6$.

(i) $(1+\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{-1}$, $0 \le \theta < \pi$.

(j) $\sin(\theta) - i\sin(\theta)$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$.

El valor de sin y cos de algunos ángulos puede expresarse en términos de la operación *raíz cuadrada* y las cuatro *operaciones aritméticas elementales*. Tales ángulos están relacionados con *ángulos centrales* de polígonos regulares que pueden construirse con *regla y compas* (ver Teorema de Gauss-Wantzel). Se puede consultar algunos de estos valores en Wikipedia: Trigonometric constants expressed in real radicals.

Ej. 12 Dibujar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = z\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z = 1\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3\,\mathrm{Re}(z) - 1 = 2\,\mathrm{Im}(z)\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-i|\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z}-i| = 2\}$

(f) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z-3|}{|z+3|} = 2\}$

(g) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| + |z-3| = 10\}$

(h) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \bar{z}^2 = 2\}$

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \le \mathrm{Re}(z) \le 1 \text{ y } |z| \le 2\}$

(j) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 \le |z-1+i| \le 3\}$

(k) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Arg}(z-i)| < \pi/6\}$

(l) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Arg}(iz+1)| = \pi/3\}$

Ej. 13 Sea z un complejo no nulo. Recordar que se define el *argumento principal* de z, denotado por $\mathrm{Arg}(z)$, como el único ángulo θ en el intervalo $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Recordar también que, dado $n \in \mathbb{N}$, se define la *raíz n-ésima principal* de z, denotada por $\sqrt[n]{z}$, como el número complejo $\sqrt[n]{|z|}(\cos(\mathrm{Arg}(z)/n) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)/n))$. Dar ejemplos de que no necesariamente es verdad que $\sqrt[n]{zw}$ es igual a $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$.

Ej. 14 Probar, usando *completación del cuadrado*, que las soluciones de la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b, c son números complejos y $a \neq 0$ son dadas por la *fórmula cuadrática*: $z = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

Ej. 15 Resolver las siguientes ecuaciones escribiendo cada una de las soluciones en la forma polar $r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, y en forma cartesiana $a + bi$, con a, $b \in \mathbb{R}$, sin que a y b estén escritos en términos de senos y cosenos.

(a) $z^2 = 1 - i$
(b) $2z^2 + 2z + 13 = 0$
(c) $2z^2 - (2+5i)z - 2 + i = 0$
(d) $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$
(e) $z^2 = 4 - 3i$
(f) $z^3 = 8i$
(g) $z^3 = -i + 1$.
(h) $z^4 - 6 - 6i = 0$
(i) $z^4 + 3z^2 + 9 = 0$
(j) $z^4 + iz^2 + 2 = 0$
(k) $z^4 + z^2 + 1 = 0$
(l) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$.

[Hint: Notar $\sin(\frac{1}{12}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi)$, $\sin(\frac{1}{8}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})$]

Ej. 16 Dar todas las soluciones de la ecuación $z^4 + (-4+2i)z^2 - 1 = 0$ en forma cartesiana

Ej. 17 Sea c un número real en el intervalo $[-1, 1]$. Mostrar que las soluciones de la ecuación $z^2 - 2cz + 1 = 0$ tienen módulo 1.

Ej. 18 Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

(a) $iz + 2\overline{z} = 1 + 2i$
(b) $z = \overline{z}^3$
(c) $iz^2 + \overline{z}z^{-1} = 0$
(d) $\overline{z}^4 + |z|z^2(1-i) = 0$
(e) $\sqrt{z^2} = -z$
(f) $\sqrt{z/\overline{z}} = z/|z|$.

Ej. 19 (Opcional)

(a) Sea θ un ángulo y $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función que a un punto $p = (x, y)$ le asigna el punto $\mathcal{R}(p)$ que es la rotación de p al rededor del origen con ángulo θ. Si $p = (x, y)$, verificar que la fórmula de la función $\mathcal{R}$ está dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y).$$

(b) ¿Qué significado tiene multiplicar complejos? Sea $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Mostrar que multiplicar un número complejo w por z es rotar a w en el *plano complejo* un ángulo θ al rededor del origen.

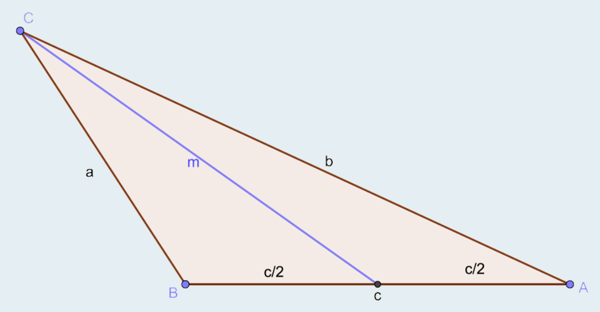
Ej. 20 (Opcional) Usando las herramientas algebraicas que ofrecen los números complejos junto con su módulo, demostrar los siguientes resultados de Geometría plana:

1. (Ley de Coseno o Teorema de Al-Kāshī) Sean w y z números complejos en el *plano complejo* los cuales forman un triángulo con el origen del plano, o. Entonces

$$|w - z|^2 \text{ es igual a } |w|^2 + |z|^2 - 2|w||z|\cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo del triángulo formado por los segmentos $\overline{ow}$ y $\overline{oz}$.

2. (Teorema de Apolonio) En todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.



$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m^2$$

Versión para imprimir

1. Escribir los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ y dibujarlos en el plano.

   (a) $(3+2i)(3-2i)$
   (b) $(2+3i)(5+7i)$
   (c) $\left(\frac{115}{169} - \frac{276}{169}i\right)(5+12i)$
   (d) $\frac{(1+4i)(1-4i)}{(2-5i)(2+5i)}$
   (e) $\frac{-137i}{37+i} + \frac{-5+2i}{1+3i}$
   (f) $\frac{-85}{(13+16i)(1+3i)}$
   (g) $i^{13} - i^9 + 1$
   (h) $i^{2023} - i^{2022} + i^{2021}$
   (i) $(1-i)^4$
   (j) $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{i}}$
   (k) $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right)$
   (l) $\left(\frac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$

2. Sean z, z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$. Probar que:

   (a) $\overline{\overline{z}} = z$
   (b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   (c) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$
   (d) $|\overline{z}| = |z|$
   (e) $z\overline{z} = |z|^2$
   (f) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$
   (g) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
   (h) $|z| \geq |\mathfrak{Re}(z)|$ y $|z| \geq |\mathfrak{Im}(z)|$
   (i) $z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$.
   (j) $z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$.
   (k) Si z es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $\overline{z}$ también lo es.

3. (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w+z| \leq |w| + |z|,$$

   y la igualdad se da si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

4. Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|$$

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) Si z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.
   (b) Si z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces $z_1 = z_2 = 0$.

6. (Opcional) Simplificar las siguientes expresiones:

   (a) $\arccos(\cos(2\pi))$
   (b) $\sin(\arcsin(\sin(-\pi/6)) + \pi)$
   (c) $\arctan(\tan(5\pi/4))$
   (d) $\cos(\arcsin(12/13) + \arcsin(4/5))$
   (e) $\arcsin(4/5) + \arccos(1/\sqrt{50})$
   (f) $\arctan(\sqrt{2}) - \arctan(1/\sqrt{2})$

7. (Opcional) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   (a) $\tan(x) = \cos(x)$
   (b) $\sin(x) - \cos(x) = \frac{1}{2}$
   (c) $2\cos^2(x) + \sin(x) = 1$
   (d) $\arctan(28/x) = \arcsin(1/(12-x))$
   (e) $\arcsin(x) = \arctan(2x)$
   (f) $2\arcsin(x) = \arcsin(3x/4)$

8. (Opcional) Abril y Pedro están haciendo mediciones con dos *teodolitos electrónicos* comprados por la FaMAF. Ambos quieren usar dichos instrumentos para dar la altura aproximada de uno de los *quebrachos blancos* de ciudad universitaria. Para hacer esto, Abril ha calibrado su teodolito a una altura de $(\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3})$ metros y ha medido un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{6}$ rad con respecto al punto más alto del árbol. Posteriormente, Pedro ha caminado desde la posición de Abril hacía el árbol unos $(4\sqrt{3}+1)$ metros sobre la misma línea recta que forma Abril con el Árbol. Él ha graduado su teodolito a la misma altura del instrumento usado por Abril y ha medido un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{4}$ rad con respecto al mismo punto en el árbol considerado en las mediciones de Abril. ¿Cuál es la altura aproximada del árbol?

9. (Opcional) Un observador está en la cima de una montaña la cual tiene una altura de 5 kilometros sobre el nivel del mar. Desde allí mide un ángulo de depresión $\frac{126}{10^4}\pi$ radianes al horizonte del océano. Estimar el radio de la Tierra.

10. (Opcional) [Space Math @ NASA: "Solving Trigonometric Equations"] Astrónomos quieren encontrar regiones de formación estelar jóvenes en el *Brazo Espiral de Perseo* de la *Vía Láctea*. Ellos pueden solo obtener imagenes ópticas de objetos dentro de 10000 años luz del Sol. Si el Brazo Espiral de Perseo está localizado a 35000 años luz del centro de la Vía Láctea y la distancia del Sol al centro galáctico es 27000 años luz, ¿cuáles son los dos ángulos de longitud galácticos, θ_1 y θ_2, en los cuales ellos pueden buscar para encontrar estos objetos?

11. Determinar el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

(a) $65+72i$
(b) $\sqrt{3}-i$
(c) $-1+i$
(d) $-1-\sqrt{3}i$
(e) $\cos(\frac{7}{4}\pi)+i\sin(\frac{1}{4}\pi)$
(f) $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$,
(g) $z=\dfrac{i}{-2-2i}$,
(h) $z=(\sqrt{3}-i)^6$.
(i) $(1+\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{-1}$, $0\le\theta<\pi$.
(j) $\sin(\theta)-i\sin(\theta)$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5\pi}{2}$.

El valor de sin y cos de algunos ángulos puede expresarse en términos de la operación *raíz cuadrada* y las cuatro *operaciones aritméticas elementales*. Tales ángulos están relacionados con *ángulos centrales* de polígonos regulares que pueden construirse con *regla y compas* (ver Teorema de Gauss-Wantzel). Se puede consultar algunos de estos valores en Wikipedia: Trigonometric constants expressed in real radicals.

12. Dibujar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

(a) $\{z\in\mathbb{C}\mid\bar{z}=z\}$
(b) $\{z\in\mathbb{C}\mid\bar{z}z=1\}$
(c) $\{z\in\mathbb{C}\mid 3\operatorname{Re}(z)-1=2\operatorname{Im}(z)\}$
(d) $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|=|z-i|\}$
(e) $\{z\in\mathbb{C}\mid |\bar{z}-i|=2\}$
(f) $\{z\in\mathbb{C}\mid \frac{|z-3|}{|z+3|}=2\}$
(g) $\{z\in\mathbb{C}\mid |z+3|+|z-3|=10\}$
(h) $\{z\in\mathbb{C}\mid z^2+\bar{z}^2=2\}$
(i) $\{z\in\mathbb{C}\mid -1\le\operatorname{Re}(z)\le 1 \text{ y } |z|\le 2\}$
(j) $\{z\in\mathbb{C}\mid 2\le|z-1+i|\le 3\}$
(k) $\{z\in\mathbb{C}\mid |\operatorname{Arg}(z-i)|<\pi/6\}$
(l) $\{z\in\mathbb{C}\mid |\operatorname{Arg}(iz+1)|=\pi/3\}$

13. Sea z un complejo no nulo. Recordar que se define el *argumento principal* de z, denotado por $\operatorname{Arg}(z)$, como el único ángulo θ en el intervalo $(-\pi,\pi]$ tal que $z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$. Recordar también que, dado $n\in\mathbb{N}$, se define la *raíz n-ésima principal* de z, denotada por $\sqrt[n]{z}$, como el número complejo $\sqrt[n]{|z|}(\cos(\operatorname{Arg}(z)/n)+i\sin(\operatorname{Arg}(z)/n))$. Dar ejemplos de que no necesariamente es verdad que $\sqrt[n]{zw}$ es igual a $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$.

14. Probar, usando *completación del cuadrado*, que las soluciones de la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a,b,c son números complejos y $a\neq 0$ son dadas por la *fórmula cuadrática*: $z=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/(2a)$.

15. Resolver las siguientes ecuaciones escribiendo cada una de las soluciones en la forma polar $r\,(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$, con $\theta\in[0,2\pi)$, y en forma cartesiana $a+bi$, con $a,\,b\in\mathbb{R}$, sin que a y b estén escritos en términos de senos y cosenos.

(a) $z^2=1-i$
(b) $2z^2+2z+13=0$
(c) $2z^2-(2+5i)z-2+i=0$
(d) $z^2-4iz-4-2i=0$
(e) $z^2=4-3i$
(f) $z^3=8i$
(g) $z^3=-i+1.$
(h) $z^4-6-6i=0$
(i) $z^4+3z^2+9=0$
(j) $z^4+iz^2+2=0$
(k) $z^4+z^2+1=0$
(l) $z^{12}+z^6+1=0.$

[Hint: Notar $\sin(\frac{1}{12}\pi)=\sin(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{4}\pi)$, $\sin(\frac{1}{8}\pi)=\sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})$]

16. Dar todas las soluciones de la ecuación $z^4+(-4+2i)z^2-1=0$ en forma cartesiana

17. Sea c un número real en el intervalo $[-1,1]$. Mostrar que las soluciones de la ecuación $z^2-2cz+1=0$ tienen módulo 1.

18. Encontrar todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que

(a) $iz+2\bar{z}=1+2i$
(b) $z=\bar{z}^3$
(c) $iz^2+\bar{z}z^{-1}=0$
(d) $\bar{z}^4+|z|z^2(1-i)=0$
(e) $\sqrt{z^2}=-z$
(f) $\sqrt{z/\bar{z}}=z/|z|$.

19. (Opcional)

(a) Sea θ un ángulo y $\mathcal{R}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la función que a un punto $p=(x,y)$ le asigna el punto $\mathcal{R}(p)$ que es la rotación de p al rededor del origen con ángulo θ. Si $p=(x,y)$, verificar que la fórmula de la función $\mathcal{R}$ está dada por

$$\mathcal{R}(x,y)=(\cos(\theta)x-\sin(\theta)y,\sin(\theta)x+\cos(\theta)y).$$

(b) ¿Qué significado tiene multiplicar complejos? Sea $z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$. Mostrar que multiplicar un número complejo w por z es rotar a w en el *plano complejo* un ángulo θ al rededor del origen.

20. (Opcional) Usando las herramientas algebraicas que ofrecen los números complejos junto con su módulo, demostrar los siguientes resultados de Geometría plana:

(a) (Ley de Coseno o Teorema de Al-Kāshī) Sean w y z números complejos en el *plano complejo* los cuales forman un triángulo con el origen del plano, o. Entonces

$$|w-z|^2 \text{ es igual a } |w|^2+|z|^2-2|w||z|\cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo del triángulo formado por los segmentos $\overline{ow}$ y $\overline{oz}$.

(b) (Teorema de Apolonio) En todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.