Geometría Superior

Período | 2023-I

Práctico 1

Ej. 1 Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(u,v) = \left(u^2 e^{2v}, u+v^2\right)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $(\mathrm{d}f)_{(3,0)}$. Escribir la aproximación afín de f en $(3,0)$ y usarla para aproximar $f(3.1, 0.2)$.

Ej. 2

- Sea $u_o \in \mathbb{R}^m$ y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(p) = u_o$. Mostrar que $(\mathrm{d}g)_p$ es la transformación lineal nula.
- Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Mostrar que $(\mathrm{d}f)_p = f$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Ej. 3 Mostrar que si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, entonces $(\mathrm{d}f)_p(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_0 f(\alpha(t))$ para cualquier curva α con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Ej. 4 [Teorema de la función homogénea de Euler] Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función homogénea de orden k. Pruebe que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$.

Ej. 5 Sean $\mathbf{det}:\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{tr}:\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ las funciones *determinante* y *traza*, respectivamente. Mostrar que

$$(\mathrm{d}\,\mathbf{det})_X Y = \langle \mathbf{cof}(X), Y\rangle = \mathbf{tr}(\mathbf{cof}(X)^t Y) = \mathbf{tr}(\mathbf{adj}(X)Y),$$

donde $\mathbf{cof}(X)$ es la *matriz de cofactores* de X y $\mathbf{adj}(X)$ es la *matriz adjunta* de X.
[Hint: Usar la Expansión de Laplace del determinante]

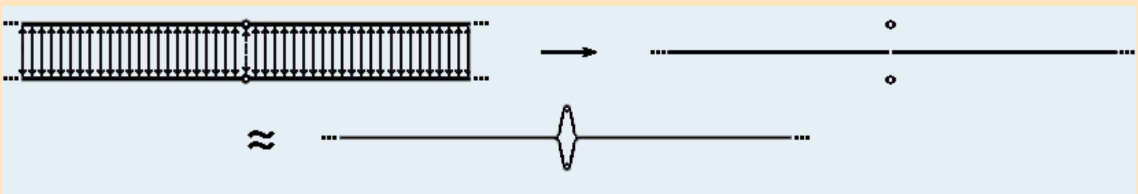
Ej. 6 [Derivando nuevamente el determinante]: Mostrar que $(\mathrm{d}\,\mathbf{det})_{\mathrm{id}} Y = \mathbf{tr}(Y)$ para toda matrix Y de orden $n \times n$ y deducir que para toda matriz invertible X (es decir, $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$), se tiene

$$(\mathrm{d}\,\mathbf{det})_X Y = \mathbf{det}(X)\mathbf{tr}(X^{-1}Y)$$

.

Ej. 7

- Mostrar que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ no es un espacio topológico localmente euclídeo.
- Sea X el cociente $(\mathbb{R} \times \{0,1\})/\sim$ de dos copias de $\mathbb{R}$, donde $(x,0) \sim (x,1)$ para $x \neq 0$ (y cada punto está relacionado consigo mismo, por supuesto). Mostrar que X es un espacio topológico tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$, pero no es Hausdorff.



Ej. 8 Mostrar que para todo punto p de una variedad diferenciable de dimensión n existe un sistema coordenado (U,ϕ) tal que $\phi(p) = 0$ y $\phi(U) = \mathbb{R}^n$.

Ej. 9 Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función $\mathcal{C}^\infty$. Dotar el gráfico de f

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

con una estructura de variedad diferenciable.

Ej. 10 Sean $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ y $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ atlas C^∞ de variedades diferenciables M y N respectivamente. Mostrar que la familia $\{(U_\alpha \times V_\beta, (\phi_\alpha, \psi_\beta))\}$ es un atlas de $M \times N$, y por lo tanto $M \times N$ es una variedad diferenciable llamada *variedad producto*.

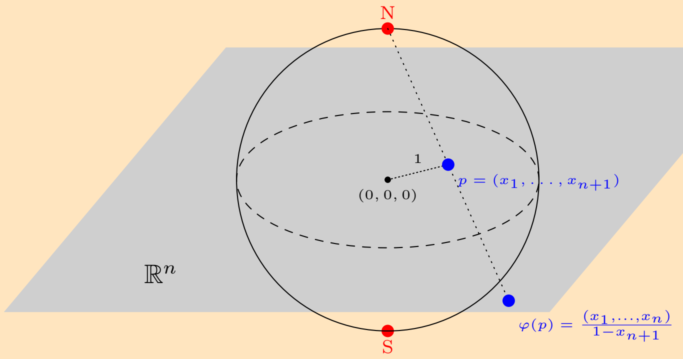
Ej. 11 Identificando $\mathbb{R}^2$ con los números complejos $\mathbb{C}$, se puede pensar al cíclulo unidad $\mathbb{S}^1$ como un subconjunto del plano complejo. Una *función ángulo* sobre un subconjunto $A \subseteq \mathbb{S}^1$ es una función continua $\theta : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tal que $\exp(i\theta(z)) = z$ para todo $z \in U$.
Sea $U \subseteq \mathbb{S}^1$ un conjunto abierto. Mostrar que existe una función ángulo sobre U si y solo si $U \neq \mathbb{S}^1$, y mostrar también que si $\theta : U \neq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es una función ángulo, entonces (U, θ) es una carta suave para $\mathbb{S}^1$ con su estructura suave estándar.

Ej. 12 Sea M una variedad compacta y conexa. ¿Puede ser M cubierta por una sola carta?

Ej. 13 Sea M el *cilindro infinito*; $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Cubrir a M con una sola carta.

Ej. 14

- Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Mostrar que las estructuras diferenciables que contienen las cartas "casquetes" y las cartas "estereográficas" coinciden.



- Mostrar que $\mathbb{S}^2$ con la estructura diferenciable dada en el punto anterior es difeomorfa a $(M, \mathcal{F})$, donde M es la compactificación de los números complejos $\mathbb{C}$ por el punto ∞, y $\mathcal{F}$ es la estructura diferenciable que contiene las cartas (U, ϕ) y (V, ψ), donde $U = \mathbb{C}$, $\phi = \mathrm{id}$, $V = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, y $\psi(z) = 1/z$ si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\psi(\infty) = 0$ (hemos identificado $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera usual).

Ej. 15 Considerar el cociente $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\sim$ dado por por la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{S}^2$ definida por $x \sim x$ o $x \sim -x$. Mostrar que existe una única estructura diferenciable en $\mathbb{RP}^2$ tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local.

Ej. 16 Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ dada por $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Considerar en el cociente $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ la única estructura diferenciable tal que la proyección es un difeomorfismo local. Mostrar que $\mathbb{T}^2$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ provisto de la estructura diferenciable producto.

Ej. 17 Considerar en $\mathbb{R}$ las estructuras diferenciables $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ que contienen respectivamente los sistemas coordenados $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$. Mostrar que son difeomorfas pero $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$.

Ej. 18 Sean $m, n \in N$, con $m < n$, y sea $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ el subconjunto de las matrices $M(m \times n, \mathbb{R})$ de rango igual a m. Dar a $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ una estructura de variedad diferenciable.

Ej. 19 Considerar en $\mathbb{C}$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim e^{i2k\pi/3}x$, $k = 0, 1, 2$. Mostrar que $\mathbb{C}/\sim$ es localmente euclídeo de dimensión 2, que admite estructura diferenciable, pero que no admite ninguna estructura diferenciable tal que la proyección sea un difeomorfismo local.

Ej. 20 Sea $M_1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable producto, y sea M_2 la variedad diferenciable del Ejercicio 13. ¿Puede probar que M_1 y M_2 son difeomorfas?

Ej. 21 Mostrar que el cilindro $C = \mathbb{R}^2/\sim$, donde $z \sim z + 2k\pi e_1$, con k entero, admite una única estructura diferenciable tal que la proyección canónica es un difemorfismo local. Probar que es difeomorfo a cada una de las siguientes variedades diferenciables:

- la variedad producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,
- $\mathbb{R}^2 - \{0\}$,
- la superficie de $\mathbb{R}^3$ cuya construcción es análoga a la de la banda de Moebius a partir de una cinta, pero dando una vuelta entera, en vez de media vuelta, antes de pegar.

Ej. 22 Dar estructura de variedad diferenciable a los siguientes conjuntos:

- el conjunto de todos los prismas en $\mathbb{R}^3$ de lados paralelos a los ejes y con volumen unitario,
- el conjunto de todos los planos punteados orientados en $\mathbb{R}^3$,
- el conjunto de todas las rectas orientadas en el plano.

Versión para imprimir

1. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(u,v)=\left(u^2e^{2v},u+v^2\right)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $(\mathrm{d}f)_{(3,0)}$. Escribir la aproximación afín de f en $(3,0)$ y usarla para aproximar $f(3.1,0.2)$.

2.
   - Sea $u_o\in\mathbb{R}^m$ y $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ definida por $g(p)=u_o$. Mostrar que $(\mathrm{d}g)_p$ es la transformación lineal nula.
   - Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Mostrar que $(\mathrm{d}f)_p=f$ para todo $p\in\mathbb{R}^n$.

3. Mostrar que si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, entonces $(\mathrm{d}f)_p(v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_0 f(\alpha(t))$ para cualquier curva α con $\alpha(0)=p$ y $\alpha'(0)=v$.

4. [Teorema de la función homogénea de Euler] Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función homogénea de orden k. Pruebe que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf$.

5. Sean $\mathbf{det}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ y $\mathbf{tr}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ las funciones *determinante* y *traza*, respectivamente. Mostrar que
$$(\mathrm{d}\,\mathbf{det})_XY=\langle\mathbf{cof}(X),Y\rangle=\mathbf{tr}(\mathbf{cof}(X)^tY)=\mathbf{tr}(\mathbf{adj}(X)Y),$$
donde $\mathbf{cof}(X)$ es la *matriz de cofactores* de X y $\mathbf{adj}(X)$ es la *matriz adjunta* de X.
[Hint: Usar la Expansión de Laplace del determinante]

6. [Derivando nuevamente el determinante]: Mostrar que $(\mathrm{d}\,\mathbf{det})_{\mathrm{id}}Y=\mathbf{tr}(Y)$ para toda matrix Y de orden $n\times n$ y deducir que para toda matriz invertible X (es decir, $X\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$), se tiene
$$(\mathrm{d}\,\mathbf{det})_XY=\mathbf{det}(X)\mathbf{tr}(X^{-1}Y)$$
.

7.
   - Mostrar que $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}$ no es un espacio topológico localmente euclídeo.
   - Sea X el cociente $(\mathbb{R}\times\{0,1\})/\sim$ de dos copias de $\mathbb{R}$, donde $(x,0)\sim(x,1)$ para $x<0$ (y cada punto está relacionado consigo mismo, por supuesto). Mostrar que X es un espacio topológico tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$, pero no es Hausdorff.

8. Mostrar que para todo punto p de una variedad diferenciable de dimensión n existe un sistema coordenado (U,ϕ) tal que $\phi(p)=0$ y $\phi(U)=\mathbb{R}^n$.

9. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f:U\to\mathbb{R}^m$ una función $\mathcal{C}^\infty$. Dotar el gráfico de f
$$\Gamma(f):=\{(x,f(x)):x\in U\}$$
con una estructura de variedad diferenciable.

10. Sean $\{U_\alpha,\phi_\alpha\}$ y $\{V_\beta,\psi_\beta\}$ atlas C^∞ de variedades diferenciables M y N respectivamente. Mostrar que la familia $\{(U_\alpha\times V_\beta,(\phi_\alpha,\psi_\beta))\}$ es un atlas de $M\times N$, y por lo tanto $M\times N$ es una variedad diferenciable llamada *variedad producto*.

11. Identificando $\mathbb{R}^2$ con los números complejos $\mathbb{C}$, se puede pensar al cículo unidad $\mathbb{S}^1$ como un subconjunto del plano complejo. Una *función ángulo* sobre un subconjunto $A\subseteq\mathbb{S}^1$ es una función continua $\theta:A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ tal que $\exp(i\theta(z))=z$ para todo $z\in U$.

    Sea $U\subseteq\mathbb{S}^1$ un conjunto abierto. Mostrar que existe una función ángulo sobre U si y solo si $U\neq\mathbb{S}^1$, y mostrar también que si $\theta:U\neq\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ es una función ángulo, entonces (U,θ) es una carta suave para $\mathbb{S}^1$ con su estructura suave estándar.

12. Sea M una variedad compacta y conexa. ¿Puede ser M cubierta por una sola carta?

13. Sea M el *cilindro infinito*; $M:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=1\}$. Cubrir a M con una sola carta.

14.
    - Sea $\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\|x\|=1\}$. Mostrar que las estructuras diferenciables que contienen las cartas "casquetes" y las cartas "estereográficas" coinciden.
    - Mostrar que $\mathbb{S}^2$ con la estructura diferenciable dada en el punto anterior es difeomorfa a $(M,\mathcal{F})$, donde M es la compactificación de los números complejos $\mathbb{C}$ por el punto ∞, y $\mathcal{F}$ es la estructura diferenciable que contiene las cartas (U,ϕ) y (V,ψ), donde $U=\mathbb{C}$, $\phi=\mathrm{id}$, $V=(\mathbb{C}-\{0\})\cup\{\infty\}$, y $\psi(z)=1/z$ si $z\in\mathbb{C}-\{0\}$, $\psi(\infty)=0$ (hemos identificado $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera usual).

15. Considerar el cociente $\mathbb{RP}^2=\mathbb{S}^2/\sim$ dado por por la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{S}^2$ definida por $x\sim x$ o $x\sim -x$. Mostrar que existe una única estructura diferenciable en $\mathbb{RP}^2$ tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local.

16. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ dada por $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Considerar en el cociente $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ la única estructura diferenciable tal que la proyección es un difeomorfismo local. Mostrar que $\mathbb{T}^2$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ provisto de la estructura diferenciable producto.

17. Considerar en $\mathbb{R}$ las estructuras diferenciables $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ que contienen respectivamente los sistemas coordenados ($\mathbb{R}$, id) y $(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$. Mostrar que son difeomorfas pero $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$.

18. Sean $m, n \in N$, con $m < n$, y sea $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ el subconjunto de las matrices $M(m \times n, \mathbb{R})$ de rango igual a m. Dar a $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ una estructura de variedad diferenciable.

19. Considerar en $\mathbb{C}$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim e^{i2k\pi/3}x$, $k = 0, 1, 2$. Mostrar que $\mathbb{C}/\sim$ es localmente euclídeo de dimensión 2, que admite estructura diferenciable, pero que no admite ninguna estructura diferenciable tal que la proyección sea un difeomorfismo local.

20. Sea $M_1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable producto, y sea M_2 la variedad diferenciable del Ejercicio 13. ¿Puede probar que M_1 y M_2 son difeomorfas?

21. Mostrar que el cilindro $C = \mathbb{R}^2/\sim$, donde $z \sim z + 2k\pi e_1$, con k entero, admite una única estructura diferenciable tal que la proyección canónica es un difemorfismo local. Probar que es difeomorfo a cada una de las siguientes variedades diferenciables:

    - la variedad producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,
    - $\mathbb{R}^2 - \{0\}$,
    - la superficie de $\mathbb{R}^3$ cuya construcción es análoga a la de la banda de Moebius a partir de una cinta, pero dando una vuelta entera, en vez de media vuelta, antes de pegar.

22. Dar estructura de variedad diferenciable a los siguientes conjuntos:

    - el conjunto de todos los prismas en $\mathbb{R}^3$ de lados paralelos a los ejes y con volumen unitario,
    - el conjunto de todos los planos punteados orientados en $\mathbb{R}^3$,
    - el conjunto de todas las rectas orientadas en el plano.