Geometría Superior

Período | 2023-I

Práctico 2

Ej. 1 Sea M una variedad diferenciable, I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\gamma : I \to M$ una curva diferenciable. La velocidad de γ en el instante $t \in I$, que se denota por $\gamma'(t)$, es por definición el vector tangente que satisface $\gamma'(t)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_0 f(\gamma(t+s))$ para toda función diferenciable definida en un entorno abierto de $\gamma(t)$ en M.

- Mostrar que efectivamente $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
- Probar que $\gamma'(t) = (\mathrm{d}\gamma)_t \left(\frac{\partial}{\partial s}\big|_t\right) \in T_{\gamma(t)}M$, donde $\frac{\partial}{\partial s}\big|_t \in T_t\mathbb{R}$ es el vector tangente a $\mathbb{R}$ en t asociado al sistema coordenado canónico $(\mathbb{R}, \mathrm{id} = s)$.
- Mostrar que si $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ es un sistema coordenado de M alrededor de $\gamma(0)$ y $(\phi \circ \gamma)(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ para t próximos a cero, entonces

$$\gamma'(0) = \sum_{n=1}^{n} r_i'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(0)}.$$

- Mostrar que para todo $p \in M$ y todo $v \in T_pM$ se cumple que $v = \sigma'(0)$ para alguna curva diferenciable σ en M con $\sigma(0) = p$.

Ej. 2 Sea π la proyección canónica de $\mathbb{S}^2$ al proyectivo $\mathbb{RP}^2$. Mostrar que la función $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ está bien definida por $f(\pi(x,y,z)) = x^6yz$ y es diferenciable. Probar que $v(f) = 0$ para todo $v \in T_{\pi(1,0,0)}\mathbb{RP}^2$.

Ej. 3 Sean M y N variedades diferenciables, y sean $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas. Considerar en $M \times N$ la estructura diferenciable producto.

- Mostrar que una función f de una variedad diferenciable en $M \times N$ es diferenciable si y sólo si $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.
- Fijamos $p \in M$ y $q \in N$. Se definen $i_q : M \to M \times N$ por $i_q(p') = (p', q)$, e i_p análogamente.

  Se definen también las aplicaciones $F : T_pM \times T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$ por

$$F(X,Y)(f) = X(f \circ i_q) + Y(f \circ i_p),$$

  y $G : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$ por

$$G(v) = (d\pi_1(v), d\pi_2(v)).$$

  Mostrar que el conjunto de llegada de F es de hecho $T_{(p,q)}(M \times N)$. Probar que $G \circ F = \mathrm{id}_{T_pM \times T_qN}$ y deducir de allí que F y G son isomorfimos.

Ej. 4 Sea $\left(\mathbb{R}^3, \mathrm{id} = (x,y,z)\right)$ el sistema coordenado canónico de $\mathbb{R}^3$. Encontrar otro sistema coordenado $\left(\mathbb{R}^3, \phi = (\xi, \eta, \zeta)\right)$ con $x = \xi$ pero tal que $\frac{\partial}{\partial x}\big|_0 \neq \frac{\partial}{\partial \xi}\Big|_0$. De hecho, usualmente abusamos de la notación no escribiendo a cuál sistema coordenado corresponde un vector tangente coordenado dado. Cuando eso no está claro por el contexto, como en este caso, conviene indicarlo, por ejemplo con un supraíndice,

$$\left.\frac{\partial^{\mathrm{id}}}{\partial x}\right|_0, \qquad \left.\frac{\partial^{\phi}}{\partial \xi}\right|_0.$$

Ej. 5

- Sean M, N variedades suaves y $F : M \to N$ una función suave, con M conexa. Probar que $(\mathrm{d}F)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es la transformación nula para todo $p \in M$ si y solo si F es una función constante.
- Sea M variedad suave y $f \in \mathbf{C}^\infty(M)$. Probar que un *máximo local* de f es un *punto crítico* de f; es decir $(\mathrm{d}f)_p$ es la transformación nula.

Ej. 6 Para cada uno de los vectores tangentes del plano, dar su representación en términos de coordenadas polares en el semiplano derecho, $\{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

- $X|_p = x \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + y \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$
- $Y|_p = x \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - y \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$
- $Z|_p = (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$

Ej. 7 Sea M el semiplano superior $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ con coordenadas canónicas (x, y) y sea $\psi : M \to (0, \infty) \times (0, \pi)$ el sistema coordenado tal que $\psi^{-1}(r, \theta) = (r \cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)$. Escribir el vector tangente $r \frac{\partial}{\partial r}$ en la base canónica $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$.

Ej. 8 $X_p = (v^2 - u^2) \frac{\partial}{\partial u}\Big|_p - 2uv \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p$ el cual está escrito en términos de las cordenadas de la proyección estereográfica desde el polo sur s. Escribir a X_p en términos de las coordenadas de la proyección estereográfica desde el polo norte n.

Ej. 9 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Mostrar que $F : V \to T_pV,\ F(v)(f) = \frac{d}{dt}\big|_0 f(p + tv)$ para $f \in \mathbf{C}^\infty(p)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, V y T_pV son naturalmente isomorfos.

Ej. 10 Mostrar que la inclusión $\imath : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ es suave. Dado $p \in \mathbb{S}^2$ con segunda coordenada negativa, hallar la matriz de $(\mathrm{d}\imath)_p$ con respecto a las bases $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$, donde $\phi_2^- = (u, v)$.

Ej. 11 Considerar en la esfera $\mathbb{S}^n$ la estructura diferenciable usual. Sea $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión y sea $p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ con $p_{n+1} > 0$.

- Considerar en la esfera el sistema coordenado $\left(U^+_{n+1}, \phi^+_{n+1} = (x_1, \ldots, x_n)\right)$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$ el sistema coordenado usual. Hallar la matriz de $(\mathrm{d}i)_p$ en las bases asociadas a esos sistemas coordenados.
- Mostrar que el espacio tangente a la esfera en p es el ortogonal a p. Más precisamente:

$$(\mathrm{d}i)_p (T_pS^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p : \sum_{i=1}^{n+1} a_i p_i = 0,\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Ej. 12 (Opcional) Sea $\mathbb{S}^3$ vista como la esfera unidad de $\mathbb{C}^2$ y sea $\mathbb{S}^2$ vista como la *esfera de Riemann* (la compactificación de $\mathbb{C}$). Considerar la *fibración de Hopf* $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ dada por $f(z_1, z_2) = z_2/z_1$. Probar que π es diferenciable y calcular la diferencial en los puntos $(1, 0)$, $(\imath, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, \imath)$.

Ej. 13 (Opcional) Sean $U_x := \{[x, y, z] \in \mathbb{RP}^2 : x \neq 0\}$ y $\varphi_x : U_x \subseteq \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $[x, y, z] \mapsto (u_1, v_1) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, y análogamente considere (U_y, φ_y) con $\varphi_y([x, y, z]) = (u_2, v_2) = (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$. Dado p en U_x, sea

$$X_p = \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p - \frac{z}{x} \frac{\partial}{\partial v_1}\Big|_p$$

un vector tangente. Si $q \in U_x \cap U_y$, escribir X_q en las coordenadas dadas por (U_y, φ_y).

Ej. 14

- Dar explícitamente una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{\mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}, \mathbb{S}^1 - \{(-1, 0)\}\}$ de $\mathbb{S}^1$.
- Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de una variedad diferenciable. Mostrar que existe un refinamiento localmente finito $\{V_\alpha\}$ tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para todo α.

Ej. 15 (Opcional) Probar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x\leq 0,\end{cases}$$

es de clase $\mathbf{C}^\infty$, pero no coincide con su serie de Taylor en ningún intervalo abierto que contiene a cero.
[Hint:

- Si g es continua en cero y $\lim_{x\to 0^+} g'(x)=\ell$, entonces, por la regla de L'Hopital, $g'_+(0)$ existe y vale ℓ (recordar que las funciones derivadas no son necesariamente continuas).
- Mostrar por inducción que para todo $k\in\mathbb{N}$ existe un polinomio $p_k(x)$ tal que $f_+^{(k)}(x)=e^{-1/x}p_k(1/x)$ para todo $x>0$.]

Ej. 16 Sea M una variedad diferenciable. Mostrar que M admite una estructura riemanniana, es decir, que existe una asignación suave de productos internos en los espacios tangentes a los puntos de M. Más precisamente, una aplicación B que a cada punto $p\in M$ le asigna un producto interno B_p en T_pM, de tal forma que si $(U,(x_1,\dots,x_n))$ es un sistema coordenado de M, entonces se cumple que la función de U en $\mathbb{R}$ dada por $p\to B_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$ es diferenciable para todo i,j. ¿Cómo se definiría la longitud de una curva diferenciable $\alpha:[0,1]\to M$?
[Hint: Usar particiones de la unidad.]

Ej. 17 (Opcional) Probar que toda variedad diferenciable compacta M puede ser *"metida"* en un $\mathbb{R}^N$; i.e. existen $N\in\mathbb{N}$ y una función suave $F:M\to\mathbb{R}^N$ que es inyectiva con diferencial inyectiva en todas partes y es un homeomorfismo sobre su imagen ($F(M)$ tiene la topología relativa de $\mathbb{R}^N$).
[Hint: Sea $\{(U_k,\varphi_k:U_k\to V_k\subseteq\mathbb{R}^m)\}_{k=1}^s$ un atlas finito de M y sea $\{\rho_k\}_{k=1}^s$ una partición de la unidad subordinada a tal atlas. Para cada abierto U_i considere la función $h_i:M\to\mathbb{R}^m$ definida como $h_i(x)=\rho_i(x)\varphi_i(x)$ si $x\in U_i$ ó cero en otro caso, y pensar en la función $x\mapsto(\rho_1(x),\dots,\rho_s(x),h_1(x),\dots,h_s(x))$]

Ej. 18 (Opcional) Sea M una variedad suave, A y B subconjunto cerrados y disjuntos de M.

- Probar que existe una función no negativa suave $g_A:M\to\mathbb{R}$ tal que $g_A^{-1}(0)=A$
- (Lema de Urysohn suave) Mostrar que existe $f\in\mathbf{C}^\infty(M)$ tal que $f(x)\in[0,1]$ para todo $x\in M$ y $f^{-1}(0)=A$ y $f^{-1}(1)=B$.
  [Hint: Sea g_A y g_B las funciones obtenidas del ejercicio anterior aplicado a A y B y considerar $f:=g_A/(g_A+g_B)$].

Ej. 19 (Opcional) Pruebe que toda variedad suave M admite una función $f\in\mathbf{C}^\infty(M)$ que es *propia*; es decir, tal que la imagen inversa de conjuntos compactos son conjuntos compactos.

Ej. 20 Mostrar que si $f:M\to N$ es una función diferenciable, entonces $\mathrm{d}f:TM\to TN$ es diferenciable.

Ej. 21

- Probar que $T\mathbb{S}^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$.
- Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto de rectas orientadas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Comparar con el respectivo ejercicio del práctico 1.

Versión para imprimir

1. Sea M una variedad diferenciable, I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\gamma : I \to M$ una curva diferenciable. La velocidad de γ en el instante $t \in I$, que se denota por $\gamma'(t)$, es por definición el vector tangente que satisface $\gamma'(t)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_0 f(\gamma(t+s))$ para toda función diferenciable definida en un entorno abierto de $\gamma(t)$ en M.

   - Mostrar que efectivamente $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
   - Probar que $\gamma'(t) = (\mathrm{d}\gamma)_t \left(\frac{\partial}{\partial s}\big|_t\right) \in T_{\gamma(t)}M$, donde $\frac{\partial}{\partial s}\big|_t \in T_t\mathbb{R}$ es el vector tangente a $\mathbb{R}$ en t asociado al sistema coordenado canónico $(\mathbb{R}, \mathrm{id} = s)$.
   - Mostrar que si $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ es un sistema coordenado de M alrededor de $\gamma(0)$ y $(\phi \circ \gamma)(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ para t próximos a cero, entonces
   $$\gamma'(0) = \sum_{n=1}^{n} r_i'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(0)}.$$
   - Mostrar que para todo $p \in M$ y todo $v \in T_pM$ se cumple que $v = \sigma'(0)$ para alguna curva diferenciable σ en M con $\sigma(0) = p$.

2. Sea π la proyección canónica de $\mathbb{S}^2$ al proyectivo $\mathbb{RP}^2$. Mostrar que la función $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ está bien definida por $f(\pi(x,y,z)) = x^6yz$ y es diferenciable. Probar que $v(f) = 0$ para todo $v \in T_{\pi(1,0,0)}\mathbb{RP}^2$.

3. Sean M y N variedades diferenciables, y sean $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas. Considerar en $M \times N$ la estructura diferenciable producto.

   - Mostrar que una función f de una variedad diferenciable en $M \times N$ es diferenciable si y sólo si $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.
   - Fijamos $p \in M$ y $q \in N$. Se definen $i_q : M \to M \times N$ por $i_q(p') = (p', q)$, e i_p análogamente.
   Se definen también las aplicaciones $F : T_pM \times T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$ por
   $$F(X,Y)(f) = X(f \circ i_q) + Y(f \circ i_p),$$
   y $G : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$ por
   $$G(v) = (d\pi_1(v), d\pi_2(v)).$$
   Mostrar que el conjunto de llegada de F es de hecho $T_{(p,q)}(M \times N)$. Probar que $G \circ F = \mathrm{id}_{T_pM \times T_qN}$ y deducir de allí que F y G son isomorfimos.

4. Sea $\left(\mathbb{R}^3, \mathrm{id} = (x,y,z)\right)$ el sistema coordenado canónico de $\mathbb{R}^3$. Encontrar otro sistema coordenado $\left(\mathbb{R}^3, \phi = (\xi, \eta, \zeta)\right)$ con $x = \xi$ pero tal que $\frac{\partial}{\partial x}\big|_0 \neq \frac{\partial}{\partial \xi}\big|_0$. De hecho, usualmente abusamos de la notación no escribiendo a cuál sistema coordenado corresponde un vector tangente coordenado dado. Cuando eso no está claro por el contexto, como en este caso, conviene indicarlo, por ejemplo con un supraíndice,
$$\left.\frac{\partial^{\mathrm{id}}}{\partial x}\right|_0, \quad \left.\frac{\partial^{\phi}}{\partial \xi}\right|_0.$$

5.
   - Sean M, N variedades suaves y $F : M \to N$ una función suave, con M conexa. Probar que $(\mathrm{d}F)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es la transformación nula para todo $p \in M$ si y solo si F es una función constante.
   - Sea M variedad suave y $f \in \mathbf{C}^\infty(M)$. Probar que un *máximo local* de f es un *punto crítico* de f; es decir $(\mathrm{d}f)_p$ es la transformación nula.

6. Para cada uno de los vectores tangentes del plano, dar su representación en términos de coordenadas polares en el semiplano derecho, $\{p = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

   - $X|_p = x\frac{\partial}{\partial x}\big|_p + y\frac{\partial}{\partial y}\big|_p$
   - $Y|_p = x\frac{\partial}{\partial y}\big|_p - y\frac{\partial}{\partial x}\big|_p$
   - $Z|_p = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\big|_p$

7. Sea M el semiplano superior $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ con coordenadas canónicas (x,y) y sea $\psi : M \to (0,\infty) \times (0,\pi)$ el sistema coordenado tal que $\psi^{-1}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)$. Escribir el vector tangente $r\frac{\partial}{\partial r}$ en la base canónica $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$.

8. $X_p = (v^2 - u^2)\frac{\partial}{\partial u}\big|_p - 2uv\frac{\partial}{\partial v}\big|_p$ el cual está escrito en términos de las cordenadas de la proyección estereográfica desde el polo sur s. Escribir a X_p en términos de las coordenadas de la proyección estereográfica desde el polo norte n.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Mostrar que $F : V \to T_pV$, $F(v)(f) = \frac{d}{dt}\big|_0 f(p + tv)$ para $f \in \mathbf{C}^\infty(p)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, V y T_pV son naturalmente isomorfos.

10. Mostrar que la inclusión $\iota : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ es suave. Dado $p \in \mathbb{S}^2$ con segunda coordenada negativa, hallar la matriz de $(\mathrm{d}\iota)_p$ con respecto a las bases $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$, donde $\phi_2^- = (u,v)$.

11. Considerar en la esfera $\mathbb{S}^n$ la estructura diferenciable usual. Sea $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión y sea $p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ con $p_{n+1} > 0$.

   - Considerar en la esfera el sistema coordenado $\left(U^+_{n+1}, \phi^+_{n+1} = (x_1, \ldots, x_n)\right)$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$ el sistema coordenado usual. Hallar la matriz de $(\mathrm{d}i)_p$ en las bases asociadas a esos sistemas coordenados.
   - Mostrar que el espacio tangente a la esfera en p es el ortogonal a p. Más precisamente:

$$(\mathrm{d}i)_p (T_p S^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p : \sum_{i=1}^{n+1} a_i p_i = 0, \; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

12. (Opcional) Sea $\mathbb{S}^3$ vista como la esfera unidad de $\mathbb{C}^2$ y sea $\mathbb{S}^2$ vista como la *esfera de Riemann* (la compactificación de $\mathbb{C}$). Considerar la *fibración de Hopf* $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ dada por $f(z_1, z_2) = z_2/z_1$. Probar que π es diferenciable y calcular la diferencial en los puntos $(1, 0)$, $(\imath, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, \imath)$.

13. (Opcional) Sean $U_x := \{[x, y, z] \in \mathbb{RP}^2 : x \neq 0\}$ y $\varphi_x : U_x \subseteq \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $[x, y, z] \mapsto (u_1, v_1) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, y análogamente considere (U_y, φ_y) con $\varphi_y([x, y, z]) = (u_2, v_2) = (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$. Dado p en U_x, sea

$$X_p = \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p - \frac{z}{x} \frac{\partial}{\partial v_1}\Big|_p$$

   un vector tangente. Si $q \in U_x \cap U_y$, escribir X_q en las coordenadas dadas por (U_y, φ_y).

14.
   - Dar explícitamente una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{\mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}, \mathbb{S}^1 - \{(-1, 0)\}\}$ de $\mathbb{S}^1$.
   - Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de una variedad diferenciable. Mostrar que existe un refinamiento localmente finito $\{V_\alpha\}$ tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para todo α.

15. (Opcional) Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

   es de clase $\mathbf{C}^\infty$, pero no coincide con su serie de Taylor en ningún intervalo abierto que contiene a cero.
   [Hint:

   - Si g es continua en cero y $\lim_{x \to 0^+} g'(x) = \ell$, entonces, por la regla de L'Hopital, $g'_+(0)$ existe y vale ℓ (recordar que las funciones derivadas no son necesariamente continuas).
   - Mostrar por inducción que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un polinomio $p_k(x)$ tal que $f_+^{(k)}(x) = e^{-1/x} p_k(1/x)$ para todo $x > 0$.]

16. Sea M una variedad diferenciable. Mostrar que M admite una estructura riemanniana, es decir, que existe una asignación suave de productos internos en los espacios tangentes a los puntos de M. Más precisamente, una aplicación B que a cada punto $p \in M$ le asigna un producto interno B_p en $T_p M$, de tal forma que si $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ es un sistema coordenado de M, entonces se cumple que la función de U en $\mathbb{R}$ dada por $p \to B_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$ es diferenciable para todo i, j. ¿Cómo se definiría la longitud de una curva diferenciable $\alpha : [0, 1] \to M$?
   [Hint: Usar particiones de la unidad.]

17. (Opcional) Probar que toda variedad diferenciable compacta M puede ser *"metida"* en un $\mathbb{R}^N$; i.e. existen $N \in \mathbb{N}$ y una función suave $F : M \to \mathbb{R}^N$ que es inyectiva con diferencial inyectiva en todas partes y es un homeomorfismo sobre su imagen ($F(M)$ tiene la topología relativa de $\mathbb{R}^N$).
   [Hint: Sea $\{(U_k, \varphi_k : U_k \to V_k \subseteq \mathbb{R}^m)\}_{k=1}^s$ un atlas finito de M y sea $\{\rho_k\}_{k=1}^s$ una partición de la unidad subordinada a tal atlas. Para cada abierto U_i considere la función $h_i : M \to \mathbb{R}^m$ definida como $h_i(x) = \rho_i(x)\varphi_i(x)$ si $x \in U_i$ ó cero en otro caso, y pensar en la función $x \mapsto (\rho_1(x), \ldots, \rho_s(x), h_1(x), \ldots, h_s(x))$]

18. (Opcional) Sea M una variedad suave, A y B subconjunto cerrados y disjuntos de M.

   - Probar que existe una función no negativa suave $g_A : M \to \mathbb{R}$ tal que $g_A^{-1}(0) = A$
   - (Lema de Urysohn suave) Mostrar que existe $f \in \mathbf{C}^\infty(M)$ tal que $f(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in M$ y $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.
     [Hint: Sea g_A y g_B las funciones obtenidas del ejercicio anterior aplicado a A y B y considerar $f := g_A/(g_A + g_B)$].

19. (Opcional) Pruebe que toda variedad suave M admite una función $f \in \mathbf{C}^\infty(M)$ que es *propia*; es decir, tal que la imagen inversa de conjuntos compactos son conjuntos compactos.

20. Mostrar que si $f : M \to N$ es una función diferenciable, entonces $\mathrm{d}f : TM \to TN$ es diferenciable.

21.
   - Probar que $T\mathbb{S}^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
   - Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto de rectas orientadas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Comparar con el respectivo ejercicio del práctico 1.