PROGRAMA DE ASIGNATURA	
ASIGNATURA: Polinomios Ortogonales Matriciales, Teoría y Aplicaciones	**AÑO:** 2023
CARACTER: Especialidad	**UBICACIÓN EN LA CARRERA:** 5° año 1° cuatrimestre
CARRERA: Licenciatura en Matemática	
REGIMEN: Cuatrimestral	**CARGA HORARIA:** 120 horas

FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS

Este curso es una introducción general a la teoría de polinomios ortogonales matriciales. Esta teoría fue iniciada por Krein en 1949 y tiene numerosas aplicaciones en distintas áreas de la matemática y la física. El curso consiste en una presentación homogénea y coherente del contenido de distintos textos clásicos [1,2,3] sobre polinomios ortogonales escalares y de otros textos más recientes sobre la generalización al contexto matricial [4,5].

Objetivos generales: El/La estudiante obtendrá los conocimientos básicos de la teoría de polinomios ortogonales escalares, su construcción y distintas caracterizaciones. Su relación con relaciones de recurrencias de tres términos, operadores diferenciales y distintas aplicaciones y caracterizaciones.

Se estudiará en detalle la definición de medidas matriciales y productos internos matriciales. Esta teoría es el punto de partida para introducir las sucesiones de polinomios ortogonales matriciales. Se describirá la construcción de estas sucesiones, sus propiedades fundamentales y el Teorema de Favard sobre la caracterización de los polinomios ortogonales matriciales como aquéllos que satisfacen una relación de recurrencia de tres términos apropiada. Se estudiarán los problemas de momento matriciales y la completitud de los correspondientes espacios Lp. Otros objetivos generales consisten en estudiar en detalle las propiedades diferenciales de los polinomios ortogonales matriciales y distintas caracterizaciones.

Objetivos específicos:
- Estudiar en detalle la teoría general de polinomios ortogonales escalares y establecer los ejemplos mas relevantes relacionados con funciones hipergeométricas. Dar aplicaciones en distintos campos.
- Establecer la relación entre relaciones de recurrencias de tres términos y polinomios ortogonales. Teorema de Favard.
- Estudiar la completitud de espacios Lp(w). Problemas de momentos determinados e indeterminados.
- Estudiar en detalle la teoría de medidas matriciales y el teorema de Krein que caracteriza las sucesiones de momentos matriciales.
- Dar una noción de producto interno matricial. Establecer la construcción de sucesiones de ortogonales matriciales.
- Estudiar en detalle el Teorema de Favard matricial.
- Estudiar propiedades fundamentales, como la descripción de la localización de los ceros.
- Estudiar operadores diferenciales que tienen a los polinomios ortogonales matriciales como autofunciones. Propiedades diferenciales y estructurales.
- Caracterización de los polinomios ortogonales matriciales como soluciones de un problema de Riemann-Hilbert. Estudiar consecuencias de esta caracterización.

Al finalizar esta materia los/as estudiantes estarán en condiciones de:
- Manejar las propiedades básicas de la teoría de polinomios ortogonales.
- Reconocer las familias más relevantes.
- Tener familiaridad con la teoría general medidas matriciales y de polinomios ortogonales

matriciales.
- Entender la relación entre recurrencias de tres términos y la teoría de polinomios ortogonales.
- Manejar operadores diferenciales matriciales y el concepto de simetría.
- Tener familiaridad con los problemas de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales escalares y matriciales. Manejar estrategias para extraer información relevante a partir de estos problemas.

CONTENIDO

1. Introducción - Polinomios ortogonales

Repaso de la teoría de medidas abstractas. Polinomios ortogonales. Formula de recurrencia de tres términos. Teorema de Favard. Identidad de Christoffel-Darboux. Comportamiento de los ceros de los polinomios ortogonales. Fórmulas de cuadratura. Familias Clásicas de polinomios ortogonales. Aplicaciones de la teoría: Soluciones de las ecuaciones de Toda. Polinomios de Hermite y el oscilador armónico cuántico. Interpretación electrostática de los ceros.

2. Problemas de momentos y polinomios ortogonales.

El problema de momentos. Condiciones para la unicidad de la solución. Relación entre la unicidad de la solución del problema de momentos y la aproximación por polinomios. Completitud del sistema de polinomios ortogonales.

3. Medidas matriciales y polinomios ortogonales matriciales.

Productos internos matriciales. Construcción de sucesiones de polinomios ortogonales matriciales. Relaciones de recurrencia de tres términos. Medidas matriciales. Teorema de Favard. Identidad de Christoffel-Darboux. Ceros de los polinomios ortogonales matriciales.

4. Propiedades diferenciales de los polinomios ortogonales matriciales

Operadores diferenciales. Operadores simétricos. Ecuaciones de Pearson. Fórmulas de Rodrigues. Fórmulas de Burchnall.

5. Problemas de Riemann Hilbert

Problemas de Riemann-Hilbert aditivos y multiplicativos. Fórmulas de Sokhotski–Plemelj. Problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales. Existencia y unicidad de la solución. Propiedades diferenciales y algebraicas como consecuencia del problema de Riemann-Hilbert. Propiedades asintóticas. Función de Szegö. Extensión al contexto matricial.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

[1] Freud G. Orthogonal Polynomials. Oxford, UK: Pergamon Press; 1971.

[2] Ismail MEH. Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable. In Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 98. Cambridge: Cambridge University Press; 2005. With two chapters by Walter Van Assche, With a foreword by Richard A. Askey. Available from: https://doi.org/10.1017/CBO9781107325982.

[3] Chihara, T. S. An introduction to orthogonal polynomials. (English) Mathematics and its Applications. Vol. 13. New York - London -Paris: Gordon and Breach, Science
Publishers. XII, 249 p. £26.30 (1978)

[4] David Damanik, Alexander Pushnitski, and Barry Simon. The analytic theory of matrix orthogonal polynomials. Surv. Approx. Theory, 4:1–85, 2008.

[5] C. Berg. The matrix moment problem. In A.J.P.L. Branquinho and A. P. Foulquié
Moreno, editors, Coimbra Lecture Notes On Orthogonal Polynomials, pages 1–58.
Nova Science, 2008.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

[6] Miller W Jr. Symmetry groups and their applications. In: Pure and Applied Mathematics, Vol. 50. New York, London: Academic Press; 1972, x+432 pp.

EVALUACIÓN

FORMAS DE EVALUACIÓN

Los/as estudiantes, durante el cursado, deberán entregar cuatro trabajos prácticos, que constarán de una lista de ejercicios relacionados con los contenidos de la correspondiente unidad.

REGULARIDAD

El/La estudiante deberá:

- cumplir un mínimo de 70% de asistencia a clases teóricas,

El examen final constará de una evaluación escrita sobre contenidos teórico-prácticos, y la entrega de una lista de ejercicios sobre los distintos temas involucrados en la materia.

PROMOCIÓN

No se considerará régimen de promoción.

CORRELATIVIDADES

Para cursar:
Tener aprobadas: Funciones Reales, Topología General, Estructuras Algebraicas, Funciones Analíticas, Análisis Numérico II, Geometría Diferencial, Física General.

Para rendir tener aprobada: Funciones Reales, Topología General, Estructuras Algebraicas, Funciones Analíticas, Análisis Numérico II, Geometría Diferencial, Física General.