Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 0: Autovalores

12 de Marzo de 2019

Problema 1: Encuentre los autovalores y los correspondientes autovectores normalizados de las siguientes matrices:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 2: Sean dos matrices A y B, las cuales son Hermitianas y tienen el mismo conjunto de autovalores. Mostrar que A y B están relacionadas por una transformación unitaria.

Problema 3: Encontrar los autovalores y un conjunto ortonormal de autovectores para cada una de las siguientes matrices:

$$\mathsf{M}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{M}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathsf{M}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 4: Encuentre los autovalores y los correspondientes autovectores para la matriz

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que en este caso los autovectores no son ortogonales.

Problema 5: Si A es una matriz 2×2, muestre que sus autovalores, denotados genéricamente por λ satisfacen la ecuación secular, esto es:

$$\lambda^2 - \lambda \mathbf{Tr}\,(\mathsf{A}) + \mathbf{det}\,(\mathsf{A}) = 0.$$

Problema 6: Sea U una matriz unitaria y considere la ecuación de autovalores $\mathsf{U}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$. Muestre que los autovalores de la matriz unitaria tienen módulo igual a 1.
Vea que este mismo resultado vale si uno considera matrices reales ortogonales.

Problema 7: Sea una matriz particular A, a la vez Hermitiana y unitaria. Muestre que sus autovalores solamente pueden ser 1 ó -1.

Comentario: Las matrices de Pauli: σ_1, σ_2 y σ_3

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

así como las matrices de Dirac: γ^0, γ^1, γ^2 y γ^4;

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

son ejemplos de esto.

Problema 8: Dada la siguiente matriz

$$\mathsf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$$

(a) Construya la matriz transpuesta $\tilde{\mathsf{A}}$ y las formas simétricas $\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{A}$ y $\mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}}$.

(b) De la ecuación $\mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}}\,|\mathbf{g}_n\rangle = \lambda_n^2\,|\mathbf{g}_n\rangle$, encuentre λ_n y $|\mathbf{g}_n\rangle$ (considere sólamente $\lambda_n \geq 0$). Normalice los autovectores $|\mathbf{g}_n\rangle$.

(c) De la ecuación $\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{A}\,|\mathbf{f}_n\rangle = \lambda_n^2\,|\mathbf{f}_n\rangle$, encuentre λ_n y $|\mathbf{f}_n\rangle$ (considere sólamente $\lambda_n \geq 0$). Normalice los autovectores $|\mathbf{f}_n\rangle$.

(d) Verifique que $\mathsf{A}\,|\mathbf{f}_n\rangle = \lambda_n\,|\mathbf{g}_n\rangle$ y que $\tilde{\mathsf{A}}\,|\mathbf{g}_n\rangle = \lambda_n\,|\mathbf{f}_n\rangle$

(e) Verifique que $\mathsf{A} = \sum_n \lambda_n\,|\mathbf{g}_n\rangle\langle\mathbf{f}_n|$

Comentario: Este problema es un ejemplo de una 'Descomposición en Valores Singulares' λ_n de la matriz A. La misma construcción sintetizada en el punto (e) es aplicable no sólo a matrices cuadradas sino a matrices generales $m \times n$.

Problema 9: Dos matrices U y H están relacionadas por

$$\mathsf{U} = e^{ia\mathsf{H}},$$

con a un número real.

(a) Si H es Hermitiana, mostrar que U es unitaria.

(b) Si U es unitaria, mostrar que H es Hermitiana. (H es independiente de a)

(c) Si $\mathbf{Tr}\,(\mathsf{H}) = 0$, mostrar que $\mathbf{det}\,(\mathsf{U}) = +1$.

(d) Si $\mathbf{det}\,(\mathsf{U}) = +1$, mostrar que $\mathbf{Tr}\,(\mathsf{H}) = 0$.

Ayuda: H puede diagonalizarse por una transformación de semejanza; entonces U sería también diagonal. Los correspondientes autovalores están dados $u_j = e^{iah_j}$.

Problema 10: Dos masas están conectadas entre sí y a dos paredes por medio de resortes como se muestra en la figura siguiente:

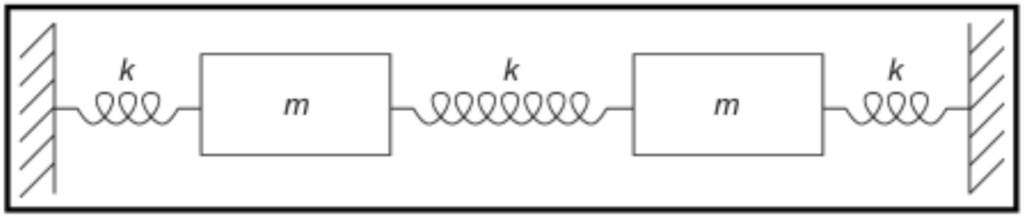

Figura 1: Oscilador triple.

(a) Plantee las ecuaciones de Newton para cada masa.

(b) Resuelva la ecuación secular para los autovalores.

(c) Determine los autovectores y así los modos normales de movimiento.