Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía 0bis:

Coordenadas ortogonales en $\mathbb{R}^3$, operadores diferenciales vectoriales

19 de Marzo de 2019

Toda la notación es la usada en el libro de Arfken.

Coordenadas ortogonales en $\mathbb{R}^3$

Problema 1: En el sistema de coordenadas esféricas, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ y $q_3 = \varphi$. Las ecuaciones de transformación están dadas por

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{1}$$

a) Calcule los factores de escala esféricos: h_r, h_θ, y h_φ.
b) Vuelva a obtener los factores de escala usando la relación $ds_i = h_i dq_i$.

Problema 2: El sistema de coordendas u, v, z, que es usado frecuentemente en electrostática e hidrodinámica, está definido por

$$xy = u, \quad x^2 - y^2 = v, \quad z = z. \tag{2}$$

Este sistema es ortogonal.

a) Grafique cualitativamente el comportamiento del sistema de coordenadas mostrando la intersección de superficies con u constante y con v constante con el plano (x, y).
b) Indique la dirección de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ en los cuatro cuadrantes.

Problema 3: El sistema de coordenadas elíptico consiste en tres familias de superficies

$$1)\frac{x^2}{a^2\cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2 u} = 1, \quad 2)\frac{x^2}{a^2\cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2\sin^2 v} = 1, \quad 3) z = z. \tag{3}$$

Dibuje esquemáticamente las superficies coordenadas $u =$ constante y $v =$ constante cuando intersectan el primer cuadrante del plano (x, y). Muestre los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$. El rango de u es $0 \leq u < \infty$. El rango de v es $0 \leq v < 2\pi$.

Operadores vectoriales diferenciales

Problema 4: Si $\hat{\mathbf{q}}_1$ es el vector unitario en la dirección en la que crece q_1, muestre que a)

$$\nabla . \hat{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial q_1} \tag{4}$$

b)

$$\nabla \times \hat{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{h_1} \left[\hat{\mathbf{q}}_2 \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \hat{\mathbf{q}}_3 \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right]. \tag{5}$$

Note que aun cuando $\hat{\mathbf{q}}_1$ es un vector unitario, su divergencia y su rotor **no necesariamente se anulan**.

Problema 5: Escriba los vectores unitarios en coordenadas polares en términos de los vectores unitarios cartesianos.

Problema 6: Haga los mismo que en el problema anterior pero para el sistema de coordenadas cilindrico.

Problema 7: A partir de los resultados del problema anterior para coordenadas polares muestre que

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{6}$$

y que todos las otras derivadas primeras de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas con respecto a dichas coordenadas se anulan.

Problema 8: Encuentre las componentes circulares de los vectores velocidad y aceleración de una partícula moviéndose

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{\rho}, & a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ v_\varphi &= \rho\dot{\varphi}, & a_\varphi &= \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \\ v_z &= \dot{z}, & a_z &= \ddot{z}, \end{aligned}$$

Ayuda:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \rho(t)\hat{\boldsymbol{\rho}}(t) + z(t)\hat{\mathbf{z}} \\ &= [\hat{\mathbf{x}} \cos\varphi(t) + \hat{\mathbf{y}} \sin\varphi(t)]\, \rho(t) + \hat{\mathbf{z}} z(t). \end{aligned}$$

Note que $\dot{\rho} = d\rho/dt$, $\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2$, y así.

Problema 9: En coordenadas cilíndricas una función vectorial particular está dada por

$$\mathbf{V}(\rho,\varphi) = \hat{\boldsymbol{\rho}}V_\rho(\rho,\varphi) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}V_\varphi(\rho,\varphi). \tag{7}$$

Muestre que $\nabla \times \mathbf{V}$ tiene solo componente z.

Problema 10: Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible llevan a la ecuación

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}). \tag{8}$$

Donde η es la viscosidad, ρ_0 la densidad del fluído y $\mathbf{v}$ es el campo de velocidades del fluído. Considerando el flujo axial en un tubo cilíndrico se puede tomar

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}}v(\rho). \tag{9}$$

Muestre que

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = 0, \tag{10}$$

para dicha elección de $\mathbf{v}$.

Muestre que

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \tag{11}$$

es equivalente a la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2v}{d\rho^2}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{dv}{d\rho} = 0 \tag{12}$$

y que ésta es satisfecha por

$$v = v_0 + a_2\rho^2. \tag{13}$$

Problema 11: Escriba los vectores unitarios en coordenadas esféricas en términos de los vectores unitarios cartesianos.

Problema 12: Encuentre las componentes en coordenadas esféricas de los vectores velocidad y aceleración de una partícula moviéndose:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, & a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\,\mathrm{sen}^2\,\theta\dot{\varphi}^2 \\ v_\theta &= r\dot{\theta}, & a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2, \\ v_\varphi &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\varphi}, & a_\varphi &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Ayuda:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= r(t)\hat{\boldsymbol{r}}(t) \\ &= r(t)\left[\hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\cos\varphi(t) + \hat{\mathbf{y}}\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\,\mathrm{sen}\,\varphi(t) + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta(t)\right].\end{aligned}$$

Note que $\dot{r} = dr/dt$, $\ddot{r} = d^2r/dt^2$, y así sucesivamente.

Problema 13: Considere la función $f(r)$ donde r es la coordenada radial en esféricas. Obtenga una expresión para $\nabla^2 f(r)$.