PROGRAMA DE ASIGNATURA	
ASIGNATURA: Introducción a las Álgebras de Hopf.	**AÑO:** 2025
CARACTER: Especialidad	**UBICACIÓN EN LA CARRERA:** 5° año 1° cuatrimestre
CARRERA: Licenciatura en Matemática	
REGIMEN: Cuatrimestral	**CARGA HORARIA:** 120 horas

FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS

El concepto de álgebra de Hopf generaliza simultáneamente las nociones de grupo y álgebra de Lie. Tiene su origen en trabajos de Cartier sobre grupos algebraicos en característica positiva e independientemente de Borel en la axiomatización de resultados de Hopf sobre la cohomología de grupos de Lie. Tras la primera etapa de trabajos pioneros de Milnor, Moore, Hochschild, Kostant, G. I. Kac y otros, y una segunda de exploración de los fundamentos y nociones esenciales, por Sweedler, Larson, Radford y otros, alcanza su madurez con el descubrimiento de los grupos cuánticos por parte de Drinfeld y Jimbo. A través de estos últimos se comprendieron diversas aplicaciones de las álgebras de Hopf en física teórica y topología de baja dimensión, así como su íntima relación con la teoría de Lie.

Las álgebras de Hopf son álgebras asociativas que poseen estructuras adicionales compatibles con la multiplicación que hacen que su categoría de representaciones sea una categoría tensorial. Esta característica distintiva es fundamental, ya que es a través de esta que se dan muchas de sus aplicaciones y conexiones con otras disciplinas y áreas de la matemática.

En la actualidad, se investiga con gran vigor tanto la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión finita o de crecimiento moderado, como diversos aspectos homológicos, versiones analíticas y su teoría de representaciones.

El curso tiene como objetivos introducir las álgebras de Hopf, con especial énfasis en el caso de dimensión finita, y desarrollar las nociones fundamentales sobre su estructura intrínseca y de diversas categorías de módulos asociados a ellas. Esto permitirá, además, familiarizarse con el lenguaje de categorías tensoriales.

CONTENIDO

Representaciones de Álgebras

Producto tensorial. Categoría de módulos sobre un álgebra. Módulos simples y módulos proyectivos. Serie de composición. El teorema de Wedderburn-Artin.

Coálgebras

Definiciones y propiedades básicas. Categoría de comódulos sobre una coálgebra. Coradical. Filtración coradical. Dualidad entre álgebras y coálgebras.

Álgebras de Hopf

Definiciones y propiedades básicas. Ejemplos: Álgebras de Taft; los grupos cuánticos U_q(sl(2)) y O_q(sl(2)), y sus variantes de dimensión finita cuando q es raiz de 1; el álgebra de envolvente de un álgebra de Lie restringida. El dual de un álgebra de Hopf.

Teoremas fundamentales

Integrales. Teorema Fundamental de los módulos de Hopf. Teorema de Maschke. Fórmula de Radford para la potencia cuarta de la antípoda. Teorema de Larson-Radford sobre el cuadrado de la antípoda. Teorema de Nichols-Zoeller.

Relaciones con categorías tensoriales

La categoría de representaciones de un álgebra de Hopf. Categorías tensoriales. Álgebras de Hopf cuasitriangulares y categorías trenzadas. El doble de Drinfeld. Módulos de Yetter-Drinfeld. Álgebras en categorías tensoriales. Álgebras de Hopf en categorías trenzadas. Álgebras de Nichols. Biproducto de Majid-Radford.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

1. S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, Hopf Algebras. An Introduction. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 235, Marcel Dekker, New York, 2001.
2. C. Kassel, Quantum Groups, Graduate Texts in Mathematics 155, Springer, Berlin, 1995.
3. S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, CMBS Reg. Conf. Ser. in Math. 82 , Am. Math. Soc., Providence, 1993.
4. D. E. Radford, Hopf algebras. Series on Knots and Everything 49. Hackensack, NJ: World Scientific xxii, 559 p., 2012.
5. H.-J. Schneider, Lectures on Hopf algebras, Trabajos de Matematica 31/95 , FaMAF, 1995.
6. M. E. Sweedler. Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.
7. M. Lorenz, A Tour of Representation Theory, Graduate Studies in Mathematics 193. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2018.

EVALUACIÓN

FORMAS DE EVALUACIÓN

La regularidad se alcanzará con la resolución de una lista de ejercicios que se entregarán con anterioridad a la finalización del curso. Para la aprobación del curso, además, se rendirá una evaluación oral sobre los temas desarrollados en la materia.

REGULARIDAD

Aprobar al menos el 60% de los Trabajos Prácticos o de Laboratorio.

CORRELATIVIDADES

Para cursar tener aprobada: Funciones Reales, Topología General, Estructuras Algebraicas, Funciones Analíticas, An. Numérico II, Geometría Diferencial, Física General.

Para rendir tener aprobada: Funciones Reales, Geometría Superior, Topología General, Estructuras Algebraicas, Funciones Analíticas, An. Numérico II, Geometría Diferencial, Física General.