Práctico 1

1. Sea $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + 1$, y sea $P = \{-2, -1, 2, 3\}$. Calcular $S(f,P)$ y $s(f,P)$. Hacer lo mismo con $f(x) = x^2 - x - 5$.

2. Calcular $s(f,P)$ y $S(f,P)$ en los siguientes casos.

(a) $P = \{-3, -2, 0\}$ y $f : [-3,0] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{si } -3 \leq x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b) $P = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ y $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ x+2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3. Escribir las sumas inferior y superior de las siguientes funciones en los intervalos indicados. Utilizar una partición tal que la longitud de cada subintervalo sea $1/n$.

(a) $f(x) = x^2$, en $I = [0,1]$. (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $I = [1,2]$.

4. Demostrar que $\int_0^b x^3 dx = b^4/4$, considerando particiones en n subintervalos iguales y utilizando la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

5. Deducir cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre $[0,2]$, y cuando sea posible, calcular la integral sin partir el dominio (i.e. sin usar el teorema $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$).

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ x-2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

6. ¿Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior?

7. (a) Demostrar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

(b) Demostrar que si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(c) Verificar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(x)\, dx \leq \pi^2/8$.

8. (a) Dar un ejemplo de una función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a,b]$, y $\int_a^b f = 0$.

(b) Suponer que f es una función integrable en $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, y continua en un $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) > 0$. Probar que $\int_a^b f > 0$.

9. Sea f una función acotada sobre $[a,b]$. Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ salvo en $x_0 \in (a,b)$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$.

10. Sea f una función no decreciente sobre $[a,b]$, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo i.

(a) Demostrar que $S(f,P) - s(f,P) = \delta(f(b) - f(a))$.

(b) Demostrar que f es integrable.

(c) Dar un ejemplo de una función no decreciente sobre $[0,1]$ que sea discontinua en una cantidad infinita de puntos.

11. Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$, y sea μ el promedio de f en ese intervalo, es decir,

$$\mu = \frac{\int_a^b f}{b-a}.$$

Mostrar que μ no pertenece necesariamente a la imagen de f.

12. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_a^b (x+y)\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^x (1+t)\,dz\right)\,dx.$