Práctico 2

1. Sea f una función integrable sobre $[a,b]$. Probar que existe $x_o \in [a,b]$ tal que $\int_a^{x_o} f = \int_{x_o}^b f$. Mostrar que no siempre es posible elegir un $x_o \in (a,b)$.

2. Hallar las derivadas de cada una de las siguientes funciones.

(a) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} (\operatorname{sen} t)^3 \, dt.$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}.$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\left[\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right]} \frac{du}{1+\operatorname{sen}^6 u + u^2}.$

(d) $F(x) = \operatorname{sen}\left(\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left[\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt\right] dy\right).$

(e) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\, dt.$

(f) $F(x) = \displaystyle\int_a^x x f(t)\, dt,\ f$ continua.

3. (a) Demostrar que si h es continua, f y g son derivables y $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\, dt$, entonces $F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$.

(b) Calcular la derivada en cada caso.

(i) $F(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{x^4} \frac{1}{1+z^2}\, dz.$

(ii) $F(x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^2}} \cos\left(t^2\right) dt.$

4. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica, con período a, si $f(x+a) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que si f es periódica con período a y continua en $[0,a]$, entonces

$$\int_b^{b+a} f = \int_0^a f, \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}.$$

5. Para cada una de las siguientes funciones f, sea $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. ¿En qué puntos x vale $F'(x) = f(x)$?

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 1, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

6. Se sabe que la función g dada por $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $g(0) = 0$ es derivable en todo x, con $g'(0) = 0$. Mostrar que g' no es continua. ¿Es g' integrable? ¿Qué relación existe entre g y F definida por $F(x) = \int_0^x g'(t)\, dt$?

7. Hallar $(f^{-1})'(0)$ en cada caso.

(a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x 1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\, dt.$

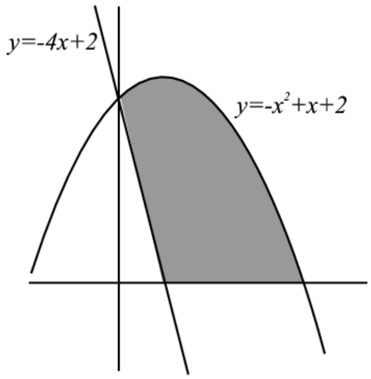
(b) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \left(t^2+1\right)\sqrt{t^4+1}\, dt.$

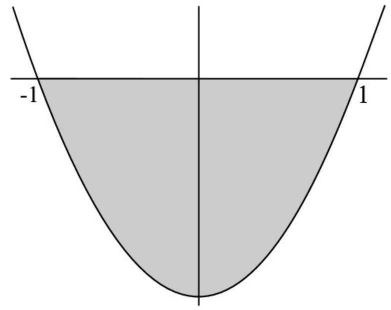
8. En cada caso hallar el área encerrada por las curvas dadas.

(a) $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -3. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$

9. (a) Calcular el área de la región sombreada de la izquierda.
(b) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Obtener los valores de las constantes a, b y c que verifiquen que el área sombreada de la figura de la derecha sea 4.





10. Sea f integrable en $[a, b]$, $c \in (a, b)$ y $F(x) = \int_a^x f$ con $a \leq x \leq b$. Indicar en cada caso si es verdadero o falso, y justificar.
(a) Si f es derivable en c, entonces F es derivable en c.
(b) Si f' es continua en c, entonces F' es continua en c.
(c) Si F es continua en c, entonces f es continua en c.
(d) Si $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ y vale cero para x racional, entonces $F(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$.

Ejercicios adicionales

(para practicar antes de los exámenes)

11. Sea $v(t) = 4 - 2t$, la velocidad en función del tiempo de un móvil que se mueve en línea recta, expresada en km/h. Encontrar la función de posiciones p respecto del tiempo, con $p(0) = 0$. ¿Qué distancia neta recorrió el móvil en el intervalo de tiempo $[0, 3]$? ¿Cuántos kilómetros recorrió en esas tres horas?

12. Verificar que la velocidad media de un automóvil durante un intervalo de tiempo (es decir, la diferencia entre la posición final y la inicial dividida por el tiempo transcurrido) es igual al promedio de sus velocidades durante el viaje.