Práctico 3

1. (a) Mostrar que $\ln 2 \leq 1$ y $\ln 4 \geq 1$. Sugerencia: Recurrir a las particiones $\{1,2\}$ y $\{1,2,4\}$ de los intervalos $[1,2]$ y $[1,4]$, respectivamente.

   (b) Probar que $2 < e < 4$.

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones.
$$\text{(a) } f(x) = \ln(\ln(2x)). \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{\cos x}{1+e^{3x}}. \qquad \text{(c) } f(x) = e^{x^2+1}.$$

3. Calcular los siguientes límites.
$$\text{(a) } \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{\ln y}. \qquad \text{(b) } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3+2e^x)}{x}. \qquad \text{(c) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}. \qquad \text{(d) } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}.$$

4. Calcular los siguientes límites escribiendo la función como un cociente.
$$\text{(a) } \lim_{x\to 0^+} x\ln x. \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right). \qquad \text{(c) } \lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}. \qquad \text{(d) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right).$$

5. Graficar las siguientes funciones. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los límites en los extremos de los intervalos de definición y estudiar la concavidad.
$$\text{(a) } a^x \quad (a>0). \qquad \text{(b) } x^x \quad (x>0).$$

6. (a) Hallar todas las soluciones de la ecuación $\log_2(x-1) + \log_2 x = 1$.

   (b) Encontrar el conjunto de todos los números positivos a tales que $a^x > 9$ para todo $x > 2$.

7. Hallar el dominio de las siguientes funciones de x y calcular sus derivadas.
$$\text{(a) } a^{\operatorname{sen} x} \quad (a>0). \qquad \text{(b) } x^x. \qquad \text{(c) } (\ln x)^{\ln x}.$$
$$\text{(d) } \ln|x|. \qquad \text{(e) } \exp\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right). \qquad \text{(f) } \log_{e^x}\left(x^2+1\right).$$

8. Calcular
$$\text{(a) } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x. \qquad \text{(b) } \lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(x^{1000}+x^{\pi}+x+1\right).$$

9. Probar que una función f definida en $\mathbb{R}$ satisface que $f' = cf$ para cierta constante c si y sólo si $f(x) = ke^{cx}$ para algún $k \in \mathbb{R}$ y todo x. Sugerencia: Calcular la derivada de $f(x)/e^{cx}$.

10. Probar que las siguientes afirmaciones son válidas para todo x, y.

    (a) $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$.

    (b) $\cosh\left(\operatorname{senh}^{-1}(x)\right) = \sqrt{x^2+1}$.

    (c) $\left(\operatorname{senh}^{-1}\right)'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$.

    (d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.

11. Hallar una fórmula para $y = \operatorname{senh}^{-1}(x)$. Sugerencia: Multiplicar ambos miembros de $\operatorname{senh} y = x$ por e^y y resolver la ecuación de segundo grado en e^y obtenida.