Práctico 5

1. Calcular las siguientes primitivas de funciones racionales.

(a) $\displaystyle\int \frac{3}{x(x+3)(x-2)}\,dx.$ (b) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx.$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+8}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{3x^2-17x+24}{(x-1)(x^2-6x+10)}\,dx.$ (e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx.$ (f) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3-9x^2-2x+11}{(x+3)\,(x-2)}\,dx.$ (h) $\displaystyle\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx.$

2. Calcular las siguientes primitivas.

(a) $\displaystyle\int \sec x\,dx.$ (b) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx.$

Sugerencia: Para (a), recordar que

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

Para (b), recordar que $\tan' x = \sec^2 x$.

3. La sustitución $t = \tan\frac{x}{2}$, o equivalentemente, $x = 2\arctan t$, transforma cualquier integral que involucre sólo senos y cosenos vinculados por suma, producto o cociente, en la integral de una función racional. Verificar que con esta sustitución resulta

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Usar esta sutitución en los siguientes casos.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}.$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x+\cos x}.$

4. Mostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua e *impar*, i.e. $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\int_{-a}^{a} f = 0$.

5. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_1^e x\ln^2 x\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}.$ (c) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,dx.$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}.$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}.$ (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$

6. Integrando por partes, demostrar las siguientes fórmulas de reducción.

(a) $\displaystyle\int \cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$

Sugerencia para (b):

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}.$$

7. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^4+2x^2+1}\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x\,dx.$

Ejercicios adicionales

8. Mostrar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua y *par*, i.e. $f(-x)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

9. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int \ln^3 x\,dx.$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$ (c) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{arcsen} x\,dx.$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx.$ (e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\tan x}.$

10. (a) Verificar la identidad

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx,$$

de tres maneras distintas: Integrando por partes. Derivando miembro a miembro. Usando la fórmula de reducción para $\int \cos^n x\,dx$ y que $\operatorname{sen} x = \cos(x-\pi/2)$.

(b) Calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^6 x\,dx$.

11. Hallar el error en el siguiente razonamiento. Se calcula $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ por sustitución. Tomando $u=\operatorname{sen} x$, se tiene $du=\cos x\,dx$ y luego

$$\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x. \qquad (1)$$

Si por otro lado, se toma $v=\cos x$, entonces $dv=-\operatorname{sen} x\,dx$ y

$$\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = -\int v\,dv = -\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Esto, junto con (1), indica que $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$. Por lo tanto, $0=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)=\frac{1}{2}$.