PROGRAMA DE ASIGNATURA	
ASIGNATURA: Introducción a la Geometría Riemanniana	**AÑO:** 2025
CARACTER: Especialidad	**UBICACIÓN EN LA CARRERA:** 5° año 2° cuatrimestre
CARRERA: Licenciatura en Matemática	
REGIMEN: Cuatrimestral	**CARGA HORARIA:** 120 horas

FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS

La geometría Riemanniana estudia variedades diferenciables dotadas de una métrica que permite medir distancias, ángulos y volúmenes de manera coherente con la estructura diferenciable. Esta métrica generaliza las nociones clásicas del espacio euclídeo y se adapta a contextos donde la estructura global puede ser considerablemente más compleja. La comprensión profunda de las geodésicas (que generalizan las líneas rectas como trayectorias localmente óptimas) y de las diversas formas de curvatura (que cuantifican las desviaciones respecto a la geometría plana) es fundamental no solo en geometría, sino también en física teórica, teoría de la relatividad, teoría de la información, mecánica y optimización geométrica. El estudio de estas nociones no solo enriquece la comprensión de las propiedades intrínsecas de las variedades, sino que también establece un puente con aplicaciones significativas en diversas áreas. La interacción entre topología, geometría, álgebra y análisis se hace patente en esta teoría, y su dominio es esencial para cualquier investigador que aspire a trabajar en áreas modernas de las matemáticas y sus aplicaciones.
Las variedades que admiten un alto grado de simetría, los espacios homogéneos, ocupan un lugar central en la geometría diferencial contemporánea. Modelizadas como cocientes de grupos de Lie por subgrupos cerrados, estas variedades permiten explorar de manera sistemática la relación entre la estructura algebraica de los grupos de simetría y las propiedades geométricas del espacio. La incorporación de simetrías facilita un análisis más estructurado y eficiente, ya que la acción de un grupo de simetrías simplifica el estudio geométrico y permite describir el espacio global a partir de su estructura local. Estas variedades aparecen de forma natural en diversos contextos geométricos y físicos, y su estudio se apoya en herramientas algebraicas y diferenciales robustas.
El propósito de este curso es proporcionar a los estudiantes una introducción sólida a la geometría Riemanniana, que siente las bases conceptuales y técnicas necesarias para comprender las variedades dotadas de una métrica. Posteriormente, se abordará una introducción a las variedades Riemannianas homogéneas, mostrando cómo las ideas de simetría y acción de grupos de Lie enriquecen y amplían el panorama geométrico.
A través del estudio detallado de ejemplos concretos, el curso buscará desarrollar tanto la intuición geométrica como la capacidad de manejar con rigor los conceptos fundamentales. La comprensión de las demostraciones y la conciencia de las hipótesis involucradas serán objetivos centrales, en vista de su importancia para la formación avanzada en geometría y sus aplicaciones. El dominio de estos contenidos proporciona una base sólida para la investigación en geometría diferencial, física matemática, teoría de grupos de Lie y áreas afines, y capacita a los estudiantes para afrontar problemas contemporáneos donde la interacción entre simetría, geometría y análisis es esencial.

CONTENIDO

Unidad I: Conexiones afines

Conexiones afines y su derivada covariante asociada. Transporte paralelo. Geodésicas y la aplicación exponencial. Coordenadas normales. Análisis de campos de Jacobi y puntos conjugados. Grupo de holonomía.

Unidad II: Métricas Riemannianas

Variedades Riemannianas y conexión de Levi-Civita. Propiedades de completitud y los teoremas de Hopf-Rinow y Hadamard.

Unidad III: La Curvatura
Tensor de curvatura y sus propiedades fundamentales. Identidades de Bianchi. Curvatura seccional, curvatura de Ricci y curvatura escalar. Curvatura seccional constante. Teorema de Schur y sus implicaciones para la geometría de variedades

Unidad IV: Inmersiones isométricas
Segunda forma fundamental y operador de forma. Curvatura media de inmersiones isométricas. Teorema de Gauss para subvariedades. Subvariedades totalmente geodésicas.

Unidad V: Campos Killing y Campos de Jacobi
Definición y propiedades de los campos de Killing. Campos de Jacobi y su comportamiento en espacios de curvatura constante. Relación entre puntos conjugados y puntos críticos de la aplicación exponencial.

Unidad VI: Variedades homogéneas
Grupos de Lie y acciones. Geometría riemanniana homogénea: Submersiones riemannianas y curvatura.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

-] do Carmo, Manfredo Perdigão: "Geometria Riemanniana". 6a edição. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Rio de Janeiro (2019).
-] Druetta, M. J.: "Notas de geometría riemanniana básica". Trabajos de Matemática, Serie B, 1/87, FaMAF. (1987).
-] Lee, John M. "Introduction to Riemannian Manifolds". Graduate Texts in Mathematics, Volume 176. Second Edition. Springer Nature Switzerland AG (2018).
-] Petersen, P.: "Riemannian geometry". Graduate Texts in Mathematics, Volume 171. Third Edition. Springer International Publishing AG (2016).
-] Salvai, Marcos: "Introducción a la Geometría Riemanniana". Notas de Clases. (2021).

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

-] Gallot, S., Hulin D., Lafontaine, J.: "Riemannian geometry". Universitext. Third Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004).
-] Jost, J: "Riemannian Geometry and Geometric Analysis". Universitext. Seventh Edition. Springer International Publishing AG (2017).
-] Köhler, K.: "Differential Geometry and Homogeneous Spaces". Universitext. Springer-Verlag GmbH, DE, part of Springer Nature (2024).

EVALUACIÓN

FORMAS DE EVALUACIÓN
La regularidad se alcanzará a través de la resolución de una colección de ejercicios seleccionados, distribuidos a lo largo del cuatrimestre.

REGULARIDAD
Aprobar al menos el 60% de los Trabajos Prácticos o de Laboratorio.

PROMOCIÓN
Esta materia no se promociona.

CORRELATIVIDADES

Para cursar:

- Tener regularizada Geometría Superior.
- Tener aprobadas Funciones Reales, Topología General, Análisis Numérico II, Geometría Diferencial, y Física General.

Para rendir:

- Tener aprobadas Geometría Superior, Funciones Reales, Topología General, Estructuras Algebraicas, Funciones Analíticas, Análisis Numérico II, Geometría Diferencial, y Física General.