UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

"SERIE B"

**TRABAJOS DE MATEMÁTICA**

N.º 68/2026

# INTRODUCCCÓN A LAS CATEGORÍAS SABELIANAS k-LINEALES FINITAS

**Autores**:

Noelia Bortolussi, Martín Mombelli y Bautista Prioletta

CIEM

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba

CIUDAD UNIVERSITARIA | CÓRDOBA | ARGENTINA

# INTRODUCCÓN A LAS CATEGORÍAS ABELIANAS $\Bbbk$-LINEALES FINITAS

NOELIA BORTOLUSSI, MARTÍN MOMBELLI Y BAUTISTA PRIOLETTA

## Índice

## Introducción

Las presentes notas nacen de un curso de teoría de categorías que M. M. ha dictado en el año 2022 en FAMAF. El propósito de estas notas es introducir a estudiantes de doctorado y a jóvenes investigadores interesados en el estudio de las categorías tensoriales finitas. Iniciar este camino implica recopilar resultados sobre categorías abelianas finitas, los cuales se encuentran dispersos en la literatura. Uno de los objetivos de este apunte es presentar dichas herramientas y resultados de manera unificada y accesible.

No se pretende ser completamente exhaustivo en todos los temas de categorías. Nos hemos concentrado en las categorías sujetas a ciertas condiciones de finitud. Si se ha intentado ser autocontenido, ilustrando con ejemplos cada parte de la teoría. El lector puede encontrar en los libros de C. Walton [35] demostraciones expandidas y más contenido relevante al tema.

Muchos de los resultados, ejercicios y demostraciones han sido tomadas del libro [24] y de los trabajos científicos de K. Shimizu, [27], [28], [29] , [30] y [31]. El libro de S. MacLane [21] por supuesto es una fuente que se utiliza todo el tiempo. Muchas demostraciones de la sección del producto tensorial de Deligne están inspiradas en el trabajo de investigación [8]. También hemos tomado material e inspiración de los trabajos de J. Fuchs, G. Schaumann y C. Schweigert [12], [13], [14].

## 1. Categorías, funtores y transformaciones naturales

Las categorías sugieren una particular perspectiva para el estudio de objetos matemáticos, basándose en entender las relaciones (los morfismos) que hay entre ellos. Los funtores, que traspasan objetos matemáticos de un tipo a objetos de otro tipo, tienen una gran utilidad. El concepto de *categoría* fue introducido en el año 1945 por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en un trabajo sobre topología algebraica.

A continuación se presenta la definición de categoría y se exhiben ejemplos.

**Definición 1.1.** Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de

- una colección de objetos $Ob(\mathcal{C})$;
- para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ una colección de flechas o morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Se verifican los siguientes axiomas:

- para cada objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ existe un morfismo distinguido en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ denotado por $\mathrm{id}_X$ y llamado la *identidad*;
- para todo $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ existe una operación
$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$
llamada la composición, tal que es *unitaria*, es decir que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X,$$
y es *asociativa*, es decir que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ se cumple que
$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

**Definición 1.2.** Una *subcategoría* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ es una categoría tal que $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$ y para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{D})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Las composiciones de los morfismos de $\mathcal{D}$ son las composiciones como morfismos en $\mathcal{C}$. Se dice que $\mathcal{D}$ es una subcategoría *plena* de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}$ es una subcategoría tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{D})$.

### 1.1. Ejemplos de categorías.

1. La categoría Set es la categoría cuyos objetos son conjuntos y los morfismos entre dos conjuntos son las funciones entre dichos conjuntos. Para cada conjunto $X$ el morfismo $\mathrm{id}_X$ es la identidad de $X$. La composición de morfismos es la composición de funciones.

2. La categoría Grp es aquella categoría cuyos objetos son los grupos y los morfismos entre dos grupos son los morfismos de grupos.

3. La categoría Ab es la subcategoría plena de Grp que consiste de grupos abelianos.

4. Si $\Bbbk$ es un cuerpo denotaremos por $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales y los morfismos son las transformaciones lineales. Por $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ denotaremos la subcategoría plena de $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ cuyos objetos son los espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\Bbbk$.

5. Sea $G$ un grupo. Definimos la categoría $Cat_G$ que posee un único objeto $P$. Además $\mathrm{Hom}(P,P) = G$ y la composición $\circ : \mathrm{Hom}(P,P) \times \mathrm{Hom}(P,P) \to \mathrm{Hom}(P,P)$ coincide con el producto del grupo $G$. Es decir $g \circ h = gh$. Notar que $\mathrm{id}_P = 1$, la identidad del grupo $G$.
6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Denotaremos por $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a la categoría cuyos objetos son los mismos que los objetos de $\mathcal{C}$ y tal que para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ el espacio de morfismos de esta nueva categoría está definido por
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X).$$
Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y,Z)$, es decir que $f : Y \to X$, $g : Z \to Y$ entonces la composición en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ está dada por
$$g \circ^{\mathrm{op}} f = f \circ g.$$
La categoría $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es llamada la *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$. Si $X, Y$ son objetos de $\mathcal{C}$, y $f : X \to Y$ es un morfismo, vamos a denotar por $\overline{X}$, al objeto $X$ pero visto como objeto de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Similarmente, vamos a denotar por $\overline{f} : \overline{Y} \to \overline{X}$ al morfismo $f$ pero visto como morfismo en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
7. Vamos a denotar por $\mathrm{Ring}$ a la categoría cuyos objetos son los anillos con unidad. El espacio de morfismos entre dos anillos será el conjunto de morfismos de anillos entre ellos.
8. Si $\Bbbk$ es un cuerpo denotaremos por $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ la categoría cuyos objetos son las $\Bbbk$-álgebras. Los morfismos son los morfismos de $\Bbbk$-álgebras. Si $A, B$ son dos álgebras el espacio de morfismos se denotará por $\mathrm{Alg}\,(A,B)$.
9. Si $R$ es un anillo se denotará por ${}_R\mathrm{Mod}$ (respectivamente $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$ ) la categoría cuyos objetos son los $R$-módulos a izquierda (respectivamente a derecha). Los morfismos son los morfismos de $R$-módulos.
10. Si $R, S$ son anillos, se denotará por ${}_R\mathrm{Mod}_{\mathrm{S}}$ la categoría cuyos objetos son los $(R,S)$-bimódulos.
11. Si $A$ es una $\Bbbk$-álgebra se denotará por ${}_A\mathrm{Mod}$, respectivamente $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}}$, la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales munidos de una acción lineal que lo hace un $A$-módulos a izquierda, respectivamente a derecha. Las categorías ${}_A\mathrm{mod}, \mathrm{mod}_A$ son las subcategorías plenas de ${}_A\mathrm{Mod}$, respectivamente $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}}$, que consisten de aquellos módulos de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Análogamente se definen las categorías ${}_A\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}}$ y ${}_A\mathrm{mod}_A$
12. La categoría $\mathrm{Top}$ es aquella cuyos objetos son espacios topológicos y los morfismos entre dos espacios son las funciones continuas.
13. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son dos categorías, vamos a denotar a $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ la siguiente categoría. Los objetos son pares $(X, A)$ donde $X$ es un objeto de $\mathcal{C}$ y $A$ es un objeto de $\mathcal{D}$. Si $(X, A)$, $(X', A')$ son dos objetos, entonces el espacio de morfismos entre ellos se define:
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,A),(X',A')) = \{(f,f') : f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X'), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,A')\}.$$
La composición de morfismos es coordenada a coordenada.

14. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $G$ un grupo finito. Vamos a denotar por $\text{vect}^G$ a la categoría de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita equipados con una $G$-graduación; es decir espacios vectoriales $V = \oplus_{g\in G} V_g$. Los morfismos son aquellas transformaciones lineales que preservan la graduación; es decir $f : \oplus_{g\in G} V_g \to \oplus_{g\in G} W_g$ tales que $f(V_g) \subseteq W_g$ para todo $g \in G$.
15. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $G$ un grupo finito. Vamos a denotar por $\mathcal{Y}D(G)$ a la categoría de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita equipados con una $G$-graduación $V = \oplus_{g\in G} V_g$ que además poseen una acción de $G$ a izquierda
$$\triangleright : G \times V \to V$$
y se verifica que si $g, h \in G$, $v \in V_h$, entonces
$$g \triangleright v \in V_{ghg^{-1}}.$$
Esta categoría se denomina los *módulos de Yetter-Drinfeld* sobre $\Bbbk G$. Más generalmente es posible definirla para cualquier álgebra de Hopf $H$.
16. La categoría de complejos de cadena. Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad. La categoría de complejos de $R$-módulos tiene por objetos a los $R$-módulos $\mathbb{Z}$-graduados. Es decir $R$-módulos $C = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ munidos de un endomorfismo de $R$-módulos $d : C \to C$ de grado $-1$ ; es decir que
$$d(C_n) \subseteq C_{n-1}, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{Z}$$
tal que $d^2 = 0$. Usualmente se dice que el par $(C, d)$ es una *cadena*. Un morfismo entre cadenas $(C, d)$, $(C', d')$ es un morfismo de $R$-módulos $f : C \to C'$ de grado cero tal que $d' \circ f = f \circ d$. Denotaremos esta categoría por $\mathfrak{C}hain(R)$.
17. La categoría de $N$-complejos de cadena. Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad y $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. La categoría $\mathfrak{C}hain_N(R)$ es la categoría de pares $(C, d)$, como en el ejemplo anterior, salvo que se satisface que $d^N = 0$.

**Definición 1.3.** Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría se dice un *isomorfismo* si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \text{id}_Y$ y $g \circ f = \text{id}_X$. Un objeto $X$ se dice *isomorfo* a otro objeto $Y$ si existe un isomorfismo $f : X \to Y$. En tal caso se denotará $X \simeq Y$.

**Definición 1.4.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : X \to Y$ un morfismo. Se dice que $f$ es un *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : Z \to X$ tales que $f \circ g = f \circ h$ entonces $g = h$. En otras palabras, $f$ es monomorfismo cuando se lo puede *cancelar* a izquierda.

Análogamente, se dice que $f$ es un *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : Y \to Z$ tales que $g \circ f = h \circ f$ entonces $g = h$. Es decir, si se puede cancelar $f$ a derecha.

***Observación*** 1.5. Sea $f : X \to Y$ un morfismo. $f$ es un monomorfismo si y sólo si la función
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), \quad \beta \mapsto f \circ \beta,$$
es inyectiva para todo $Z \in Ob(\mathcal{C})$. Análogamente, $f$ es un epimorfismo si y sólo si la función
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad \beta \mapsto \beta \circ f,$$

es inyectiva para todo $Z \in Ob(\mathcal{C})$.

Puede suceder que un morfismo sea un monomorfismo y epimorfismo sin que sea un isomorfismo. Por ejemplo, en la categoría Ring, la inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es un monomorfismo y un epimorfismo, sin ser un isomorfismo.

En lo siguiente, se introducirá la noción de *morfismo* entre dos categorías. Esto es una aplicación entre objetos y una aplicación entre morfismos que preserva la estructura de las categorías.

**Definición 1.6.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de dos funciones:

- una función $F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ que asigna a cada objeto $X$ de $\mathcal{C}$ un objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$;
- para cada par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, una función

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

  que asigna a cada morfismo $f : X \to Y$ un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$,

tal que se verifica lo siguiente:

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

para todo objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ y para todo par de morfismos $f, g$ de $\mathcal{C}$ que se puedan componer.

La definición de funtor anterior es lo que se conoce como funtor *covariante*. Un funtor se dice *contravariante* si satisface todos los axiomas de funtor excepto que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ para todo par de morfismos $f, g$ de $\mathcal{C}$ que se puedan componer. Usualmente cuando se haga referencia a un funtor se estará refiriendo a un funtor covariante, a menos que se indique explícitamente que es contravariante.

Notar que dos funtores covariantes $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ pueden componerse en $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ vía la regla

$$(G \circ F)(X) = G(F(X)), \quad (G \circ F)(f) = G(F(f)).$$

### 1.2. Ejemplos de funtores.

1. Toda categoría $\mathcal{C}$ posee el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo morfismo $f$.
2. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor contravariante entonces se puede definir un funtor $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ como sigue: $F^{\mathrm{op}}(X) = F(X)$ y $F^{\mathrm{op}}(f) = F(f)$ para todo objeto $X$ de $\mathcal{C}$ y para todo morfismo $f$ de $\mathcal{C}$. Resulta que $F^{\mathrm{op}}$ es un funtor covariante.
3. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor (covariante), entonces se puede definir otro funtor (covariante) $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ como

$$F(\overline{X}) = \overline{F(X)}, F(\overline{f}) = \overline{F(f)},$$

   para todo objeto $X$ y todo morfismo $f$.

4. Sea $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ el funtor tal que $F(G) = G$ y $F(f) = f$, para todo grupo $G$ y todo morfismo de grupo $f$. Al funtor $F$ se lo llama el *funtor de olvido* porque olvida la estructura de grupo.

5. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Otro funtor de olvido es el funtor $F : {}_A\mathrm{Mod} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$, donde se olvida de la estructura de $A$-módulo, es decir, olvida la acción del álgebra $A$.

6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña (ver definición 1.21) y $X \in Ob(\mathcal{C})$. Entonces se definen los funtores
$$L_X, : \mathcal{C} \to \mathrm{Set},\ \ R_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$$
como sigue. Si $Y \in Ob(\mathcal{C})$ entonces $L_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $R_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Además si $f : Y \to Z$ es un morfismo, entonces $L_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $L_X(f)(\alpha) = f \circ \alpha$ para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $R_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ está definida por $R_X(f)(\beta) = \beta \circ f$ para todo $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. También se puede considerar el funtor
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Set}\,.$$
Queda como ejercicio definirlo y demostrar que es un funtor.

7. Se define el funtor $D : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ como $D(V) = V^{**}$. Si $f : V \to W$ es una transformación lineal entonces $D(f) : V^{**} \to W^{**}$ es la doble transpuesta de $f$.

8. Se denota por $T : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ al funtor dado como sigue. Si $V$ es un espacio vectorial entonces $T(V) = \oplus_{0 \le n} V^{\otimes n}$ denota el álgebra tensorial de $V$. Si $f : V \to W$ es una transformación lineal entonces $T(f) : T(V) \to T(W)$ es el morfismo de álgebras determinado por
$$T(f)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = f(v_1) \otimes \ldots \otimes f(v_m).$$

9. El funtor tomar unidades $U : \mathrm{Alg}_{\Bbbk} \to Grp$, que a cada $\Bbbk$-algebra $A$ lo envía en
$$U(A) = A^{\times} = \{a \in A : a \text{ es invertible}\}.$$

10. Si $X$ es un espacio topológico entonces se denota por $C(X)$ al conjunto de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$. El conjunto $C(X)$ posee una estructura natural de $\mathbb{R}$-álgebra: si $f, g \in C(X)$ entonces se define
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad (f.g)(x) = f(x)g(x),$$
para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

    Si $Y$ es otro espacio topológico y $\phi : X \to Y$ es una función continua, entonces $C(\phi) : C(Y) \to C(X)$ es el morfismo de álgebras dado por $C(\phi)(f) = f \circ \phi$. No es complicado demostrar que esto define un funtor $C : Top^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}$.

11. El funtor tomar primitivos $\mathcal{P} : Hopf_{\Bbbk} \to Lie_{\Bbbk}$. Aquí $Hopf_{\Bbbk}$ es la categoría de álgebras de Hopf sobre $\Bbbk$ y $Lie_{\Bbbk}$ es la categoría de álgebras de Lie sobre $\Bbbk$. Para cada álgebra de Hopf $H$
$$\mathcal{P}(H) = \{h \in H : \Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h\}.$$

12. Si $G$ es un grupo finito y $\Bbbk$ un cuerpo, recordar la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$, denotada por $\mathcal{Y}D(G)$. Se tiene un funtor de olvido
$$\mathcal{U} : \mathcal{Y}D(G) \to \mathrm{Rep}\,(\Bbbk G), \quad V \mapsto V,$$
que se queda únicamente con la estructura de $G$-módulo en $V$ (aquí $\mathrm{Rep}\,(\Bbbk G)$ es la categoría de representaciones del álgebra $\Bbbk G$). Más generalmente, se tiene un funtor de olvido $\mathcal{U} : \mathrm{Rep}\,(D(H)) \to \mathrm{Rep}\,(H)$, donde $H$ es un álgebra de Hopf y $D(H)$ es el doble de Drinfeld de $H$.

13. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Sea $X \in \mathcal{D}$ un objeto. Este objeto determina el funtor constante $X : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que envía cualquier objeto en $X$ y cualquier morfismo en $\mathrm{id}_X$. Este funtor, a su vez, determina el funtor
$$\Delta : \mathcal{D} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$
que manda un objeto en el funtor constante. Ver Definición

No toda aplicación de objetos entre categorías es funtorial, como lo muestra el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 1.7.** Demostrar que la aplicación $Grp \to Ab$, que envía un grupo $G$ en su centro $Z(G)$ no puede constituirse en un funtor.

**Definición 1.8.** Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores, una *transformación natural* $\mu : F \to G$ es una colección de morfismos $\{\mu_X : F(X) \to G(X) : X \in Ob(\mathcal{C})\}$ tal que para todo par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ y para cada morfismo $f : X \to Y$ se satisface que el diagrama
$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y), \end{tikzcd}$$
es conmutativo. Esto significa que
$$G(f)\mu_X = \mu_Y F(f).$$
Se dice que una transformación natural $\mu : F \to G$ es un *isomorfismo natural* si para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ los morfismos $\mu_X : F(X) \to G(X)$ son isomorfismos. En este caso se dice que $F$ es *equivalente* a $G$ y se lo denota por $F \sim G$.

**Definición 1.9.** Dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, se denota por $\mathrm{Nat}\,(F, G)$ a la colección de todas las transformaciones naturales de $F$ a $G$.

**Definición 1.10.** Se dice que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes*, y denota $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $F \circ G \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. En tal caso se dice que los funtores $F$ y $G$ dan una equivalencia de categorías.

**Definición 1.11.** Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tres funtores y $\mu : F \to G$, $\nu : G \to H$ dos transformaciones naturales. Se define la *composición vertical* de transformaciones naturales $\mu$, $\nu$ como la composición

$$F(X) \xrightarrow{\mu_X} G(X) \xrightarrow{\nu_X} H(X).$$

Esto es

$$\nu \circ \mu : F \to H, \quad (\nu \circ \mu)_X = \nu_X \circ \mu_X$$

para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$.

**Definición 1.12.** Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ categorías, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $J, H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores y $\eta : F \to G$, $\nu : J \to H$ transformaciones naturales. Se define la *composición horizontal* de transformaciones naturales como la composición

$$J \circ F(X) \xrightarrow{J(\eta_X)} J \circ G(X) \xrightarrow{\nu_{G(X)}} H \circ G(X).$$

Esto es

$$\nu \circ \eta : J \circ F \to H \circ G, \quad (\nu \circ \eta)_X = \nu_{G(X)} \circ J(\eta_X)$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, se denotará por $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a la categoría cuyos objetos son los funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Dados $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, el espacio de morfismos es el conjunto de transformaciones naturales $\mathrm{Nat}\,(F, G)$. Se denotará $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathrm{End}\,(\mathcal{C})$.

Además, si $J : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ es otro funtor, se denota por $J(\mu) : J \circ F \to J \circ G$ a la transformación natural dada por

$$J(\mu)_X = J(\mu_X), \qquad \text{para todo } X \in Ob(\mathcal{C}).$$

**Ejercicio 1.13** (La dualidad de Pontryagin)**.** Sea CAb la categoría de grupos topológicos abelianos compactos. Sea $P : \mathrm{CAb} \to \mathrm{Ab}^{\mathrm{op}}$ el funtor $P(G) = \widehat{G}$. Aquí, $\widehat{G}$ denota el espacio de homomorfismos continuos de grupo de $G$ al círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Usando la dualidad de Pontryagin, demostrar que este funtor es una equivalencia de categorías.

**Ejercicio 1.14.** Sea $\Bbbk$ un cuerpo, $C$ una $\Bbbk$-coálgebra y consideremos el funtor de olvido $\mathcal{U} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{C}} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. Demostrar que existen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, V) \simeq \mathrm{Nat}\,(\mathcal{U}, \mathcal{U} \otimes_{\Bbbk} V).$$

**Definición 1.15.** Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor.

1. Se dice que $F$ es *fiel* si para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ el morfismo
$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
es inyectivo.
2. Se dice que $F$ es *pleno* si para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ el morfismo
$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
es suryectivo.

3. Se dice que $F$ es *esencialmente suryectivo* si para todo $A \in \mathcal{D}$ existe un $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \simeq A$.
4. Se dice que $F$ es una *incrustación* (en inglés, *embedding*) si $F$ es fiel e inyectivo en objetos.

**Ejercicio 1.16.** Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor fiel y pleno. Entonces refleja y crea isomorfismos.

1. Si $F(f)$ es un isomorfismo, entonces $f$ es un isomorfismo.
2. Si $F(X) \simeq F(Y)$ entonces $X \simeq Y$.

El siguiente resultado da una caracterización sobre las equivalencias de categorías. Para su demostración se asumirá el axioma de elección.

**Teorema 1.17.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Son equivalentes:*

1. *$F$ es una equivalencia de categorías.*
2. *$F$ es fiel, pleno y esencialmente suryectivo.*

*Demostración.* La demostración de que (1) implica (2) queda como ejercicio. Se va a probar (2) implica (1). Usando que $F$ es esencialmente suryectivo y el axioma de elección, para cada $A \in \mathcal{D}$ se puede elegir un objeto $G(A) \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo $e_A : F(G(A)) \to A$. Lo que se quiere ahora es ensamblar la aplicación $A \mapsto G(A)$ en un funtor, de tal forma que $e$ resulte una transformación natural.

Para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{D}$ y para cada morfismo $f : A \to B$ existe un único morfismo $\widehat{f} : F(G(A)) \to F(G(B))$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(G(A)) \arrow[r, "e_A"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ F(G(B)) \arrow[r, "e_B"'] & B \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Como $F$ es fiel y pleno, existe un único morfismo $g : G(A) \to G(B)$ tal que $F(g) = \widehat{f}$. Se va a denotar $g = G(f)$. Esta forma de elegir los morfismos hace que $e : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ sea una transformación natural. Queda como ejercicio demostrar que $G$ en efecto es un funtor y que $e$ resulta un isomorfismo natural. $\square$

**Definición 1.18.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un *esqueleto* $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{C}$ donde todo objeto de $\mathcal{C}$ es isomorfo a un único objeto de $\mathcal{S}$. Usualmente se denota por $Sk(\mathcal{C})$. Una categoría se dice *esquelética* si ella misma es un esqueleto.

El siguiente resultado muestra que el esqueleto de una categoría $Sk(\mathcal{C})$ es único salvo equivalencia. La demostración de dicho resultado es inmediato usando el Teorema 1.17.

**Lema 1.19.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{S}$ un esqueleto de $\mathcal{C}$. El funtor inclusión $K : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ es una equivalencia de categorías.* $\square$

**Ejercicio 1.20.** Sea $\Bbbk$ un cuerpo. La categoría de matrices $Matr_{\Bbbk}$ es la categoría con $Ob(Matr_{\Bbbk}) = \mathbb{N}_0$, los naturales unión el cero. Para cada par de objetos $n, m \in \mathbb{N}_0$ el espacio de morfismos entre $n$ y $m$ es el espacio vectorial de matrices $M_{n,m}(\Bbbk)$ de tamaño $n \times m$ con coeficientes en el cuerpo $\Bbbk$. La composición de morfismos es el producto de matrices. Demostrar que la categoría $Matr_{\Bbbk}$ es esquelética. Más aún, esta categoría es el esqueleto de la categoría de espacios vectoriales sobre $\Bbbk$ de dimensión finita.

**Definición 1.21.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

- Se dice que $\mathcal{C}$ es *localmente pequeña*, si para todo par de objetos $X, Y$, el espacio de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un conjunto.
- Se dice que $\mathcal{C}$ es *pequeña*, si $\mathcal{C}$ es localmente pequeña y $Ob(\mathcal{C})$ es un conjunto.
- Se dice que $\mathcal{C}$ es *esencialmente pequeña*, si $\mathcal{C}$ es equivalente a una categoría pequeña.

Una categoría $\mathcal{C}$ es esencialmente pequeña si y solo si su esqueleto es una categoría pequeña. En particular la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita es esencialmente pequeña. Más generalmente, si $A$ es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, la categoría de $A$-módulos de dimensión finita, ${}_A\mathrm{mod}$, es esencialmente pequeña.

### 1.3. Objetos iniciales y terminales.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

**Definición 1.22.** Un objeto $\varnothing \in \mathcal{C}$ es llamado un *objeto inicial* si para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $\varnothing \to X$, es decir que el cardinal de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varnothing, X)$ es 1.

Dualmente, un *objeto terminal* es un objeto $\tau \in \mathcal{C}$ tal que el cardinal de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \tau)$ es 1 para todo $X \in \mathcal{C}$.

**Ejemplo 1.23.**
- El conjunto vacío es un objeto inicial en la categoría de conjuntos Set.
- El grupo trivial $\{1\}$ es un objeto inicial y terminal en la categoría de grupos.
- Los enteros $\mathbb{Z}$ son un objeto inicial en la categoría *Ring* de anillos.
- Si $R$ es un anillo, entonces el $R$-módulo nulo es un objeto inicial y terminal en ${}_R\mathrm{Mod}$.

El siguiente resultado se deja como ejercicio:

**Lema 1.24.** *En una categoría los objetos iniciales y terminales, si existen, son únicos salvo isomorfismos.* $\square$

**Ejercicio 1.25.** Sea $Cat$ la categoría que tiene por objetos a las categorías pequeñas. En este caso, $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Mostrar que la categoría 1 que tiene un solo objeto y un solo morfismo, es un objeto terminal en $Cat$.

**Ejercicio 1.26.** Mostrar que un morfismo $f : X \to Y$ donde $X$ es terminal e $Y$ es inicial, debe ser un isomorfismo.

### 1.4. Subobjetos y cocientes.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

**Definición 1.27.** Dos monomorfismos $\iota_1 : X_1 \to X$ y $\iota_2 : X_2 \to X$ se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

**Definición 1.28.** Un *subobjeto* de $X$ es una clase de equivalencia de monomorfismos a $X$. Si $X, Y$ son dos objetos, se denota $X \subseteq Y$ si $X$ es un subobjeto de $Y$.

**Definición 1.29.** Dos epimorfismos $q_1 : X \to X_1$, $q_2 : X \to X_2$ son *equivalentes* si existe un isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & & X_1 \arrow[dl, "u"] \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

**Definición 1.30.** Un *cociente* de $X$ es una clase de equivalencia de epimorfismos desde $X$. Un *subcociente* de un objeto $X$ es un cociente de un subobjeto de $X$.

**1.5. Productos y coproductos.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X_1, X_2$ objetos en $\mathcal{C}$.

**Definición 1.31.** Una terna $(P, \pi_1, \pi_2)$ se dice el *producto* de $X_1$ y $X_2$ si

- $P$ es un objeto de $\mathcal{C}$;
- $\pi_i : P \to X_i$, $i = 1, 2$ son morfismos;
- si $Y$ es otro objeto y existen morfismos $p_i : Y \to X_i$, $i = 1, 2$ entonces existe un único morfismo $p : Y \to P$ tal que $\pi_i \circ p = p_i$, $i = 1, 2$.

Si el producto de dos objetos $X_1, X_2$ existe, se lo denotará por $X_1 \times X_2$, omitiendo mención de los morfismos $\pi_i$. Los morfismos $\pi_i$ se llaman usualmente las *proyecciones canónicas*.

**Lema 1.32.** *Si el producto de dos objetos $X_1, X_2$ existe es único salvo isomorfismo.*

*Demostración.* Sean $(P, \pi_1, \pi_2)$, $(P', \pi'_1, \pi'_2)$ dos productos de $X_1, X_2$. Como $P$ es producto entonces existe un morfismo $f : P' \to P$ tal que $\pi_i \circ f = \pi'_i$, $i = 1, 2$. A su vez, como $P'$ es producto entonces existe $g : P \to P'$ tal que $\pi'_i \circ g = \pi_i$, $i = 1, 2$. Se va a demostrar que $f \circ g = \mathrm{id}_P$. Se tiene que

$$\pi_i \circ (f \circ g) = \pi'_i \circ g = \pi_i.$$

Por la unicidad en la definición de producto debe ser que $f \circ g = \mathrm{id}_P$. Análogamente se demuestra que $g \circ f = \mathrm{id}_{P'}$. $\square$

**Definición 1.33.** Un *coproducto* de $X_1, X_2$ es una terna $(Q, \iota_1, \iota_2)$ donde

- $Q$ es un objeto de $\mathcal{C}$;
- $\iota_i : X_i \to Q$, $i = 1, 2$ son morfismos;
- si $Y$ es otro objeto y existen morfismos $a_i : X_i \to Y$, $i = 1, 2$ entonces existe un único morfismo $q : Q \to Y$ tal que $q \circ \iota_i = a_i$, $i = 1, 2$.

El coproducto de dos objetos $X_1, X_2$ se denotará por $X_1 \amalg X_2$.

**Lema 1.34.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $A, B$ objetos en $\mathcal{C}$. Las siguientes afirmaciones se verifican.*

(i) *El coproducto de dos objetos es único salvo isomorfismo.*

(ii) *Si el coproducto entre $A$ y $B$ existe, entonces para todo $Z \in \mathcal{C}$ existe una biyección*
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \amalg B, Z)$$

(iii) *Si el coproducto existe para todo par de objetos, entonces esto define un funtor*
$$\amalg : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

□

Es posible generalizar las definiciones de producto y coproducto al caso infinito. Sea $J$ un conjunto arbitrario. Para cada $j \in J$, sea $X_j \in \mathcal{C}$ un objeto. El coproducto de los $X_j$ es un objeto $\amalg_{j\in J} X_j$ equipado de morfismos
$$\iota_j : X_j \to \amalg_{j\in J} X_j$$
universales con esta propiedad. Es decir, si $f_j : X_j \to Y$ son morfismos, entonces existe un único $f : \amalg_{j\in J} X_j \to Y$ tal que
$$f \circ \iota_j = f_j,$$
para todo $j \in J$.

**Ejercicio 1.35.** Supongamos que $\mathcal{C}$ admite coproducto para toda familia de objetos indexada por un conjunto $J$. Generalizar el Lema 1.34 al caso de un coproducto infinito de tipo $J$.

### 1.6. Ecualizadores y coecualizadores.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f, g : X \to Y$ dos morfismos.

**Definición 1.36.** El *coecualizador* del par $(f, g)$ es un morfismo $c : Y \to Z$ tal que

- $c \circ f = c \circ g$;
- Si $h : Y \to W$ es un morfismo tal que $h \circ f = h \circ g$ entonces existe un único morfismo $u : Z \to W$ tal que $u \circ c = h$.

Análogamente, el *ecualizador* del par $(f, g)$ es un morfismo $e : Z \to X$ tal que

- $f \circ e = g \circ e$;
- Si $h : W \to X$ es un morfismo tal que $f \circ h = g \circ h$ entonces existe un único morfismo $u : W \to Z$ tal que $e \circ u = h$.

**Ejercicio 1.37.** Demostrar que el coecualizador y el ecualizador, si existen, son únicos salvo isomorfismo.

**Ejercicio 1.38.** Decidir si las categorías $Grp$, $Vect_{\Bbbk}$, $Ring$ y Set poseen (co)ecualizadores.

**Ejercicio 1.39.** Demostrar que el coecualizador (respectivamente el ecualizador) si existe, es un epimorfismo (respectivamente un monomorfismo).

**Ejercicio 1.40.** Sea $(C, \Delta)$ una $\Bbbk$-coálgebra y $M$ un $C$-comódulo con estructura dada por $\rho : M \to M \otimes_{\Bbbk} C$. Demostrar que el ecualizador del par de morfismos
$$M \otimes_{\Bbbk} C \underset{\rho\otimes id}{\overset{id\otimes\Delta}{\rightrightarrows}} M \otimes_{\Bbbk} C \otimes_{\Bbbk} C$$

es $\rho : M \to M \otimes_{\Bbbk} C$.

**1.7. Pushouts y Pullbacks.** Sean $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ dos morfismos.

**Definición 1.41.** El *pushout* del par $(f, g)$ consiste de un objeto $P$ y morfismos $\iota_1 : X \to P$, $\iota_2 : Y \to P$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\iota_1"] \\ Y \arrow[r, "\iota_2"'] & P, \end{tikzcd}$$

y es universal con respecto a esta propiedad. Es decir que, si $(D, h, k)$ es otra terna tal que $h \circ f = k \circ g$ entonces existe un único morfismo $u : P \to D$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & D \\ X \arrow[r, "\iota_1"'] \arrow[urr, bend left, "h"] & P \arrow[ur, "u"] & \\ Z \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[u, "\iota_2"'] \arrow[uur, bend right, "k"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Queda como ejercicio para el lector definir la noción dual de *pullback*.

**Ejercicio 1.42.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto inicial, que posee coproductos y coecualizadores. Demostrar que en $\mathcal{C}$ existen los pushouts de todo par de morfismos.

**Ejercicio 1.43.** Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores.

1. Demostrar que un morfismo $f : X \to Y$ es un monomorfismo si y sólo si el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "id_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

   es un pullback para el par $(f, f)$.
2. Se asume que $\mathcal{D}$ posee pullbacks para todo par de morfismos $(f, g)$. Demostrar que una transformación natural $\alpha : F \to G$ es un monomorfismo si y sólo si $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ es un monomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$.
3. Enunciar un resultado análogo al anterior para epimorfismos de transformaciones naturales.

**1.8. Objetos proyectivos e inyectivos.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

**Definición 1.44.** Un objeto $P \in Ob(\mathcal{C})$ se dice *proyectivo* si para todo epimorfismo $\pi : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : P \to N$ existe un morfismo $g : P \to M$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M \arrow[rr, "\pi"'] & & N, \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

**Definición 1.45.** Un objeto $Q \in Ob(\mathcal{C})$ se dice *inyectivo* si para todo monomorfismo $\iota : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : M \to Q$ existe un morfismo $g : N \to Q$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & N \arrow[dl, "g"] \\ & Q, & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

**Ejercicio 1.46.** Sea $Q$ un objeto inyectivo y $M$ un objeto munido de morfismos $\pi : Q \to M$, $\iota : M \to Q$ tales que $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_M$. Demostrar que $M$ es inyectivo. Enunciar un resultado similar para objetos proyectivos.

**Definición 1.47.** Una categoría $\mathcal{C}$ se dice que posee *suficientes proyectivos* si para todo objeto $X$ de $\mathcal{C}$ existe un objeto proyectivo $P$ y un epimorfismo $P \to X$.

**Ejercicio 1.48.** Si $R$ es un anillo, demostrar que la categoría de $R$-módulos posee suficientes proyectivos.

**Ejercicio 1.49.** Demostrar que la propiedad de ser proyectivo es estable bajo equivalencias de categorías.

**Ejercicio 1.50.** Si $\Bbbk$ es un cuerpo, demostrar que todo objeto en $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ es proyectivo.

**Ejercicio 1.51.** Determinar los objetos proyectivos e inyectivos en la categoría de grupos abelianos finitos.

**1.9. El cubrimiento proyectivo y la cápsula inyectiva.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

**Definición 1.52.**
- Un morfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$ se dice *superfluo* si es un epimorfismo y para todo morfismo $g : L \to M$ tal que $f \circ g$ es epimorfismo entonces $g$ es epimorfismo.
- Un *cubrimiento proyectivo* de un objeto $M$ de $\mathcal{C}$ es un par $(P, f)$ donde $f : P \to M$ es superfluo y $P$ es un objeto proyectivo.

Se va a denotar por $(P(M), f)$ al cubrimiento proyectivo de $M$. A veces se dejará implícita la función $f$.

***Observación*** 1.53. No en toda categoría existe el cubrimiento proyectivo.

**Definición 1.54.**
- Un morfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$ se dice *esencial* si es un monomorfismo y para todo morfismo $g : N \to L$ tal que $g \circ f$ es monomorfismo, entonces $g$ es monomorfismo.
- Una *cápsula inyectiva* de un objeto $M$ de $\mathcal{C}$ es un par $(E, q)$, donde $q : M \to E$ es esencial y $E$ es un objeto inyectivo.

Se denotará por $(E(M), q)$ a la cápsula inyectiva de $M$.

**Ejercicio 1.55.** Si $R$ es un anillo, todo objeto en ${}_R\mathrm{Mod}$ posee cápsula inyectiva y cubrimiento proyectivo.

**Lema 1.56.** *Si el cubrimiento proyectivo (respectivamente la cápsula inyectiva) de un objeto existe, es único salvo isomorfismo.* □

**1.10. La categoría coma.** En esta sección se mostrará una construcción muy interesante y muy utilizada. Esta construcción nos servirá más adelante.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X \in \mathcal{C}$ un objeto. Se define la *categoría coma* $(X \downarrow \mathcal{C})$ como la categoría que tiene por objetos pares $(f, Y)$ donde $Y \in \mathcal{C}$ es un objeto y $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Si $(f, Y)$, $(\widetilde{f}, \widetilde{Y})$ son dos objetos, entonces un morfismo $h : (f, Y) \to (\widetilde{f}, \widetilde{Y})$ es un morfismo $h : Y \to \widetilde{Y}$ en $\mathcal{C}$ tal que $h \circ f = \widetilde{f}$.

**Ejercicio 1.57.** Sea $K$ es un anillo conmutativo con unidad y $CRing$ es la categoría de anillos conmutativos. Demostrar que $(K \downarrow CRing)$ es equivalente a la categoría de $K$-álgebras conmutativas.

Existen diversos tipos de categorías coma. La siguiente será de utilidad en secciones posteriores. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y $X \in \mathcal{D}$. La categoría $(X \downarrow F)$ tiene como objetos los pares $(f, Y)$ donde $Y \in \mathcal{C}$ y $f : X \to F(Y)$ es un morfismo en $\mathcal{D}$. Si $(f, Y)$, $(\widetilde{f}, \widetilde{Y})$ son dos objetos, entonces un morfismo $h : (f, Y) \to (\widetilde{f}, \widetilde{Y})$ es un morfismo $h : Y \to \widetilde{Y}$ en $\mathcal{C}$ tal que $F(h) \circ f = \widetilde{f}$. Notar que $(X \downarrow \mathcal{C}) = (X, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$.

Observar que se tiene un funtor de olvido

$$\mathcal{U} : (X \downarrow F) \to \mathcal{C}, \qquad \mathcal{U}(f, Y) = Y, \qquad \mathcal{U}(h) = h.$$

**Ejercicio 1.58.** Definir la categoría coma $(F \downarrow G)$ donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E},\ G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$.

**1.11. Ejercicios.**
1. Demostrar que en la categoría de grupos abelianos divisibles, el morfismo canónico $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un monomorfismo.
2. Demostrar que en la categoría de anillos la inclusión $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un epimorfismo que no es suryectivo.
3. Demostrar que si $\Bbbk$ es un cuerpo, un epimorfismo $p : \Bbbk \to R$ en la categoría de anillos es necesariamente un isomorfismo. Ver [32].
4. Demostrar que el coproducto de dos objetos es único salvo isomorfismo.

5. Decidir si las siguientes categorías poseen productos y coproductos (finitos e infinitos): $\mathrm{Set}, \mathrm{vect}_{\Bbbk}, \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ y $CommRings$
6. Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Considerar el funtor de olvido $F : {}_A\mathrm{Mod} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. Demostrar que $\mathrm{Nat}\,(F, F)$ posee una estructura de $\Bbbk$-álgebra y que existe un isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras $A \simeq \mathrm{Nat}\,(F, F)$.
7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X, Y \in \mathcal{C}$. Demostrar que $L_X \simeq L_Y$ si y sólo si $X \simeq Y$.
8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X, Y$ objetos de $\mathcal{C}$. Demostrar que el coproducto de $X$ e $Y$ existe si y sólo si el funtor
$$F : \mathcal{C} \to Set, \quad F(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$$
es representable.
9. Demostrar que existe una equivalencia de categorías $Matr_{\Bbbk} \simeq Sk(vect_{\Bbbk})$.
10. Demostrar que la dualidad $D : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$, $D(V) = V^*$, es un funtor (contravariante) y que es una equivalencia de categorías. Demostrar que $D\circ D \simeq \mathrm{Id}$. Es cierto que $D \simeq \mathrm{Id}$?
11. Demostrar que en las categorías Set, Top y Ab los (co)ecualizadores siempre existen.
12. Determinar cuales de los siguientes funtores son fieles, plenos o esencialmente suryectivos:
    - El funtor inclusión $Ab \to Grp$.
    - El funtor de olvido $Ring \to Ab$.
    - El funtor tomar unidades $(-)^{\times} : Ring \to Grp$, donde si $R$ es un anillo, $R^{\times}$ es
    $$R^{\times} = \{r \in R : \exists s \in R : rs = 1\}$$
13. Sea $J$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ localmente pequeña. Demostrar que la categoría $\mathrm{Fun}(J, \mathcal{C})$ es localmente pequeña.

## 2. Adjunciones y representabilidad

Si $\mathcal{C}$ es una categoría localmente pequeña, se define

$$L_X : \mathcal{C} \to Set, \quad L_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad \text{para todo } Y \in \mathcal{C}. \tag{2.1}$$

En este caso, se dice que $L_X$ está *representado* por $X$. Un funtor se dice *representable* si es naturalmente equivalente a un funtor representado por un objeto. La misma noción se utiliza para funtores de la forma $\mathcal{C} \to Grp$, $\mathcal{C} \to Ab$ o $\mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. Notar que en los últimos casos, $\mathrm{Hom}_{Ab}$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_{\Bbbk}}$ son grupos abelianos, y en ciertos casos pueden tener estructura de espacio vectorial.

Uno de los lemas elementales más importantes y utilizados en teoría de categorías es el lema de Yoneda.

**Lema 2.1** (Yoneda)**.** *Sea $F : \mathcal{C} \to Set$ un funtor y $X \in \mathcal{C}$. El conjunto de transformaciones naturales de $L_X$ a $F$ está en biyección con el conjunto $F(X)$ via la función*
$$\phi : Nat(L_X, F) \to F(X), \quad \phi(\nu) = \nu_X(\mathrm{id}_X).$$

*Demostración.* Recordar que una transformación natural $\nu \in Nat(L_X, F)$ es una colección de morfismos $\{\nu_Y : \mathrm{Hom}(X,Y) \to F(Y) | Y \in \mathcal{C}\}$ tal que para todo $Z, Y \in \mathcal{C}$ y para todo morfismo $f : Z \to Y$ se verifica que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, "\nu_Z"] \arrow[d, "L_X(f)"'] & F(Z) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\nu_Y"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

En particular, si se toma $Z = X$ y $f : X \to Y$ cualquier morfismo obtenemos

$$\nu_Y \circ L_X(f) = F(f) \circ \nu_X,$$

y aplicando esta identidad a $\mathrm{id}_X$ y usando que $L_X(f)(\mathrm{id}_X) = f$ se obtiene que

$$\nu_Y(f) = F(f)(\nu_X(\mathrm{id}_X)).$$

Se define $\psi : F(X) \to Nat(L_X, F)$ como la función determinada por

$$\psi(x) : L_X \to F, \quad \psi(x)_Y(f) = F(f)(x),$$

para todo $x \in F(X)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $Y \in \mathcal{C}$. Para ver que las funciones $\psi, \phi$ son mutuamente inversas, calculamos dadas $\nu \in \mathrm{Nat}\,(L_X, F)$; $x \in F(X)$,

$$[(\psi\phi)_Y(\nu)](f) = F(f)(\phi(\nu)) = F(f)(\nu_X(\mathrm{id}_X)) = \nu_Y(f \circ \mathrm{id}_X) = \nu_Y(f).$$

Por otro lado,

$$(\phi\psi)(x) = \psi(x)_X(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(x) = \mathrm{id}_{F(X)}(x) = x.$$

□

Uno de las consecuencias más utilizadas del Lema de Yoneda permite caracterizar todas las transformaciones naturales entre dos funtores representables $L_X, L_Y,\ X, Y \in \mathcal{C}$. Notar que tenemos una biyección

$$\mathrm{Nat}\,(L_X, L_Y) \simeq L_Y(X) = \mathrm{Hom}(Y, X).$$

Es decir, una transformación natural $\alpha : L_X \to L_Y$ viene dada por composición por un (¡único!) morfismo $\hat{\alpha} : Y \to X$, de modo que $\alpha(f) = f \circ \hat{\alpha}$.

**Ejercicio 2.2.** [Embedding de Yoneda] Demostrar que si $\mathcal{C}$ es una categoría localmente pequeña entonces el funtor

$$L : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, Set),$$
$$X \mapsto L_X,$$

es fielmente pleno.

***Observación*** 2.3. Por el Ejercicio 2.2, $L$ crea isomorfismos, lo cual puede formularse como sigue: Si $X, Y$ son dos objetos tales que $\mathrm{Hom}(X,Z) \simeq \mathrm{Hom}(Y,Z)$ para todo $Z \in \mathcal{C}$, entonces $X \simeq Y$.

**Ejemplo 2.4.**

1. El funtor de olvido $\mathcal{U} : Grp \to Set$ está representado por $\mathbb{Z}$, es decir que está representado por el grupo *libre* generado por un elemento.
2. El funtor de olvido $\mathcal{U} : Ring \to Set$ está representado por $\mathbb{Z}[x]$, el anillo *libre* generado por un elemento.
3. Recordemos que $Ab$ denota la categoría de grupos abelianos. Sea $P_n : Ab \to Set$ el funtor producto de n-copias,
$$P(G) = G \underbrace{\times \cdots \times}_{n-veces} G,$$
está representado por el grupo libre de n generadores, es decir por $\mathbb{Z}^n$.
4. Sean $V, W$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Bbbk$. Se define el funtor
$$Bil_{V,W} : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$$
$$Bil_{V,W}(U) = \{f : V \times W \to U : f \text{ es } \Bbbk\text{-bilineal } \}.$$
El funtor $Bil_{V,W}$ está representado por $V \otimes_{\Bbbk} W$.

**2.1. Esquemas de grupos.** Si $\Bbbk$ es un cuerpo, se denota por $\mathcal{CA}_{\Bbbk}$ la categoría de $\Bbbk$-álgebras conmutativas. Dada $H \in \mathcal{CA}_{\Bbbk}$, $Spec(H) : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to Set$ denota el funtor dado por
$$Spec(H)(A) = \mathrm{Alg}\,(H, A), \text{ para toda } A \in \mathcal{CA}_{\Bbbk}.$$
Es decir que $Spec(H) = L_H$. Si $A, B \in \mathcal{CA}_{\Bbbk}$ y $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras entonces $Spec(H)(f) : \mathrm{Alg}\,(H, A) \to \mathrm{Alg}\,(H, B)$ se define por
$$Spec(H)(f)(\alpha) = f \circ \alpha, \text{ para todo } \alpha \in \mathrm{Alg}\,(H, A).$$

**Definición 2.5.** Un funtor $X : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to Set$ es un **esquema afín** si es representable, i.e si $X \simeq Spec(H)$ para algún álgebra conmutativa $H$.

**Ejemplo 2.6.**

1. Para $n \in \mathbb{N}$ el funtor $Af_n : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to Set$ dado por $Af_n(A) = A^n$. Este funtor es un esquema afín ya que $A^n \simeq \mathrm{Alg}\,(\Bbbk[X_1, \dots, X_n], A)$. Luego $Af_n = Spec(\Bbbk[X_1, \dots, X_n])$.
2. Sea $S^3 : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to Set$ el funtor dado como sigue. Si $A \in \mathcal{CA}_{\Bbbk}$ entonces
$$S^3(A) = \{(a, b, c) \in A^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$
Para cada morfismo $f : A \to B$ entre dos álgebras se define $S^3(f) : S^3(A) \to S^3(B)$ por
$$S^3(f)(a, b, c) = (f(a), f(b), f(c)), \quad \text{para todo } (a, b, c) \in S^3(A).$$
El funtor $S^3$ es un esquema afín. En efecto se puede demostrar que para toda $A \in \mathcal{CA}_{\Bbbk}$ existe un isomorfismo natural
$$S^3(A) \simeq \mathrm{Alg}\,(\Bbbk[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1), A).$$

**Definición 2.7.** Si $X : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to Set$ es un funtor, se va a denotar por $\Bbbk[X]$ el *álgebra de funciones* de $X$:
$$\Bbbk[X] = \mathrm{Nat}\,(X, Af_1).$$

En efecto, el espacio $\Bbbk[X]$ es un álgebra con producto, suma y acción de $\Bbbk$ dada como sigue. Si $\mu, \eta : X \to Af_1$ y $\lambda \in \Bbbk$, $A \in \mathcal{CA}_\Bbbk$

$$(\mu\eta)_A(x) = \mu_A(x)\eta_A(x), \qquad (\mu+\eta)_A(x) = \mu_A(x) + \eta_A(x), \qquad (\lambda.\eta)_A(x) = \lambda(\eta_A(x)),$$

para todo $x \in X(A)$.

Dados $X, Y : \mathcal{CA}_\Bbbk \to Set$ funtores, se define $X \times Y : \mathcal{CA}_\Bbbk \to Set$ vía $(X \times Y)(A) = X(A) \times Y(A)$ para todo $A \in \mathcal{CA}_\Bbbk$, y para $f : A \to B$ un morfismo de álgebras se define $(X \times Y)(f) = X(f) \times Y(f)$.

**Lema 2.8.** *Si $X = Spec(H)$, $Y = Spec(H')$ entonces $X \times Y = Spec(H \otimes_\Bbbk H')$.*

*Demostración.* Se debe demostrar que para toda $A \in \mathcal{CA}_\Bbbk$ existe una biyección

$$\mathrm{Alg}\,(H, A) \times \mathrm{Alg}\,(H', A) \simeq \mathrm{Alg}\,(H \otimes_\Bbbk H', A).$$

Se define

$$\phi : \mathrm{Alg}\,(H, A) \times \mathrm{Alg}\,(H', A) \to \mathrm{Alg}\,(H \otimes_\Bbbk H', A),$$
$$\phi(\alpha, \beta)(x \otimes y) = \alpha(x)\beta(y)$$

para todo $\alpha \in \mathrm{Alg}\,(H, A)$, $\beta \in \mathrm{Alg}\,(H', A)$, $x \in H$, $y \in H'$. Claramente $\phi(\alpha, \beta)$ es un morfismo de álgebras. Se define

$$\psi : \mathrm{Alg}\,(H \otimes_\Bbbk H', A) \to \mathrm{Alg}\,(H, A) \times \mathrm{Alg}\,(H', A),$$
$$\psi(\gamma) = (\gamma(- \otimes 1), \gamma(1 \otimes -)),$$

para todo $\gamma \in \mathrm{Alg}\,(H \otimes_\Bbbk H', A)$. □

**Definición 2.9.** Un **esquema de grupos** es un funtor $X : \mathcal{CA}_\Bbbk \to \mathrm{Grp}$ tal que compuesto con el funtor de olvido $\mathrm{Grp} \to Set$ es un esquema afín.

**Ejemplo 2.10** (`El grupo trivial`). El funtor $U : \mathcal{CA}_\Bbbk \to \mathrm{Grp}$, $U(A) = \{1\}$ que asigna a cualquier álgebra $A$ el grupo trivial es un esquema de grupos. En este caso es fácil ver que $U \simeq Spec(\Bbbk)$.

**Ejemplo 2.11** (`El esquema afín`). Para $n \in \mathbb{N}$ el funtor $Af_n : \mathcal{CA}_\Bbbk \to Set$ dado por $Af_n(A) = A^n$ es un esquema de grupos donde se considera a $A^n$ con la estructura de grupo dada por la suma.

**Ejemplo 2.12** (`El grupo de raíces` $m$`-esimas`). Sea $m \in \mathbb{N}$, se define $G_m : \mathcal{CA}_\Bbbk \to \mathrm{Grp}$, como

$$G_m(A) = \{a \in A : a^m = 1\}.$$

En este caso $G_m \simeq Spec(\Bbbk[x]/(x^m - 1))$. La estructura de grupo de $G_m(A)$ es con el producto del álgebra $A$.

**Ejemplo 2.13** (`El esquema de matrices inversibles`). Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el funtor $GL_n : \mathcal{CA}_\Bbbk \to \mathrm{Grp}$ definido por:

$$GL_n(A) = \{B \in M_n(A) : B \text{ es inversible }\}.$$

**Ejemplo 2.14** (`El grupo circular`)**.** El grupo circular $S^1 : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to \mathrm{Grp}$ definido por

$$S^1(A) = \{(a, b) \in A \times A : a^2 + b^2 = 1\}$$

La estructura de grupo en $S^1(A)$ es: $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, para todo $a, b \in A$.

**Ejercicio 2.15.** Demostrar que el funtor $S^1$ es un esquema de grupos.

La demostración de la siguiente proposición queda como ejercicio.

**Proposición 2.16.** *Sean $X, Y : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to Set$ funtores y $\eta : X \to Y$ una transformación natural. Las siguientes afirmaciones se satisfacen.*

1. *Si $X, Y$ son esquemas afines (de grupos) entonces $X \times Y$ es un esquema afín (de grupo).*
2. *Existe un isomorfismo de álgebras $\Bbbk[X \times Y] \simeq \Bbbk[X]\otimes_{\Bbbk}\Bbbk[Y]$.*
3. *Existe un isomorfismo de álgebras $\Bbbk[Spec(H)] \simeq H$.*
4. *$\eta$ induce un morfismo de álgebras $\eta^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$.*
5. *Si $U$ es el esquema de grupo trivial entonces $\Bbbk[U] \simeq \Bbbk$.* □

Si $X : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to \mathrm{Grp}$ es un esquema de grupos entonces tenemos transformaciones naturales

$$m : X \times X \to X, \quad u : U \to X,$$

donde para toda álgebra $A$ la función $m_A$ es el producto del grupo $X(A)$ y $u_A$ es el elemento unidad.

**Lema 2.17.** *En efecto $m$ y $u$ son transformaciones naturales.*

*Demostración.* Sea $f : A \to B$ un morfismo de álgebras. Se debe demostrar que $X(f) \circ m_A = m_B \circ (X \times X)(f)$. Pero como $(X \times X)(f) = X(f) \times X(f)$ la igualdad $X(f) \circ m_A = m_B \circ (X \times X)(f)$ se traduce a que el morfismo $X(f)$ es de grupos, lo cual vale ya que $X$ es un esquema de grupos. Análogamente se demuestra que $u$ es una transformación natural. □

Sea $G$ un grupo. Se va a denotar por $G^{op}$ el *grupo opuesto*, es decir el grupo cuyo producto está definido por:

$$g \cdot h = hg, \quad \text{para todo } g, h \in G.$$

Cada vez que tenemos un morfismo de grupos $f : G \to H$ esto induce un morfismo de grupos $f : G^{op} \to H^{op}$. Para cualquier grupo $G$ la inversión $\mathcal{S} : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ no es un morfismo de grupos salvo cuando $G$ es Abeliano. No obstante, es un morfismo $\mathcal{S} : G \to G^{op}$.

Sea $X : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to \mathrm{Grp}$ un esquema de grupos. Se define $X^{op} : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to \mathrm{Grp}$ como el esquema dado por

$$X^{op}(A) = X(A)^{op}, \quad X(f) = f,$$

para toda álgebra $A$ y todo morfismo de álgebras $f$. La inversión de grupos produce una transformación natural $\mathcal{S} : X \to X^{op}$ determinada por

$$\mathcal{S}_A : X(A) \to X^{op}(A), \quad A \in \mathcal{CA}_{\Bbbk},$$

donde cada $\mathcal{S}_A$ es la inversión de grupo.

**Proposición 2.18.** *Sea $X : \mathcal{CA}_{\Bbbk} \to \mathrm{Grp}$ un esquema de grupos. Entonces el espacio $\Bbbk[X]$ es un álgebra de Hopf.*

## 2.2. Adjunciones.

**Definición 2.19.** Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Una adjunción de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una terna $(F, G, \phi)$ donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ son funtores y se tienen isomorfismos

$$\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)),$$

naturales en $X \in \mathcal{C}$ y en $Y \in \mathcal{D}$.

Notar que en la definición anterior se están considerando los funtores

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{F\times Id} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-)} Set,$$

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{Id\times G} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)} Set,$$

y $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-)\circ(F\times\mathrm{Id}\,) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\circ(\mathrm{Id}\,\times G)$ es un isomorfismo natural. La naturalidad de $\phi$ implica que para todo par de morfismos $f : U \to X$, $g : Y \to V$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\alpha\mapsto g\,\alpha F(f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[d, "\beta\mapsto G(g)\,\beta\, f"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U), V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, G(V)), \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

es conmutativo.

Si $(F, G, \phi)$ es una adjunción, se dice que $F$ es *adjunto a izquierda* de $G$ y que $G$ es *adjunto a derecha* de $F$.

**Lema 2.20.** *Los funtores adjuntos a derecha o a izquierda de un funtor dado son únicos salvo equivalencia.*

*Demostración.* Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y sean $(F, G, \phi)$, $(F, G', \phi')$ adjunciones. Se demostrará que $G \simeq G'$.

Por hipótesis, los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (\mathrm{Id}\, \times G)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (\mathrm{Id}\, \times G')$ son equivalentes. Entonces existe un isomorfismo natural

$$\alpha_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G'(Y)), \quad X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}.$$

definido por $\alpha_{X,Y} = \phi'_{X,Y}\phi^{-1}_{X,Y}$. Se define $\psi_Y : G(Y) \to G'(Y)$ como $\psi_Y = \alpha_{G(Y),Y}(\mathrm{id}\,_{G(Y)})$ para todo $Y \in \mathcal{D}$. Se deduce de (2.2) que $\psi$ es una transformación natural. Queda como ejercicio demostrar que $\psi$ es un isomorfismo. □

**Teorema 2.21.** *Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $(F, G, \phi)$ *es una adjunción.*
2. *Existen transformaciones naturales* $e : F \circ G \to \mathrm{Id}\,_{\mathcal{D}}$, $c : \mathrm{Id}\,_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ *tales que*

$$\mathrm{id}\,_{G(Y)} = G(e_Y) \circ c_{G(Y)}, \quad e_{F(X)} \circ F(c_X) = \mathrm{id}\,_{F(X)} \tag{2.3}$$

*para todo* $Y \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{C}$.

*Demostración.* Se probará (1) implica (2). Para todo $Y \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{C}$ se definen

$$e_Y = \phi^{-1}_{G(Y),Y}(\mathrm{id}_{G(Y)}), \quad c_X = \phi_{X,F(X)}(\mathrm{id}_{F(X)}).$$

Sea $f : F(X) \to Y$ un morfismo en $\mathcal{D}$. Por la naturalidad de $\phi$ se sabe que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X)) \arrow[r, "\phi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "\alpha\mapsto f\,\alpha"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X)) \arrow[d, "\beta\mapsto G(f)\,\beta"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

es conmutativo. En particular se tiene que

$$G(f) \circ c_X = \phi_{X,Y}(f).$$

Tomando $f = e_Y$ se tiene que $\mathrm{id}_{G(Y)} = G(e_Y) \circ c_{G(Y)}$. La identidad $e_{F(X)} \circ F(c_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ se demuestra de forma similar. La demostración de la naturalidad de $e$ y $c$ queda como ejercicio.

Ahora se quiere probar que (2) implica (1). Para todo $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ se definen

$$\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)), \quad \phi_{X,Y}(\alpha) = G(\alpha)c_X,$$

$$\widetilde{\phi}_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y), \quad \widetilde{\phi}_{X,Y}(\beta) = e_Y F(\beta).$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que $\phi$ es una transformación natural en ambas variables y que $\widetilde{\phi}$ es el inverso de $\phi$. $\square$

Usualmente las transformaciones $e, c$ se llaman, respectivamente, la *counidad* y la *unidad* de la adjunción.

El siguiente es un ejercicio técnico, pero que será utilizado más adelante.

**Ejercicio 2.22.** Sean $(F, G) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $(F', G') : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ dos adjunciones con unidades y counidades $u, c$ y $u', c'$, respectivamente. Asumir que existen funtores $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $K : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ que hacen los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "G'"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "F'"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "K"] & \mathcal{D}' \end{tikzcd}$$

conmutativos. Demostrar que $L(u) = u'_L$ si y solo si $c'_K = K(c)$.

**2.3. Ejemplos de adjunciones.** Queda como ejercicio para el lector el demostrar que los siguientes pares de funtores son adjunciones.

1. El funtor de olvido $F : Ab \to Grp$ es adjunto a derecha de $U : Grp \to Ab$ dado por $U(G) = G/[G, G]$, para todo grupo $G$.
2. Sea $R$ un anillo. El funtor de olvido $F : {}_R\text{Mod} \to \text{Ab}$ es adjunto a derecha de $L : Ab \to {}_R\text{Mod}$, $L(A) = R \otimes_{\mathbb{Z}} A$, para todo grupo abeliano $A$.
3. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. El funtor de olvido $F : \text{Alg}_{\Bbbk} \to \text{Vect}_{\Bbbk}$ es adjunto a derecha del funtor $T : \text{Vect}_{\Bbbk} \to \text{Alg}_{\Bbbk}$ tal que para todo espacio vectorial $V$, $T(V) = \oplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{\otimes n}$ es el álgebra tensorial.
4. Sea $Com_{\Bbbk}$ la categoría de $\Bbbk$-álgebras conmutativas. Es decir que $Com_{\Bbbk}$ es la subcategoría plena de $\text{Alg}_{\Bbbk}$ cuyos objetos son las álgebras conmutativas. El funtor de olvido $F : Com_{\Bbbk} \to \text{Vect}_{\Bbbk}$ es adjunto a derecha del funtor $S : \text{Vect}_{\Bbbk} \to Com_{\Bbbk}$, donde para todo espacio vectorial $V$, $S(V)$ es el álgebra simétrica. Recordar que el álgebra simétrica de $V$ es el cociente del álgebra tensorial $T(V)$ por el ideal bilátero generado por los elementos $v \otimes w - w \otimes v$ para todo $v, w \in V$.
5. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $Lie_{\Bbbk}$ la categoría de $\Bbbk$-álgebras de Lie. Sea $F : \text{Alg}_{\Bbbk} \to Lie_{\Bbbk}$ el funtor dado como sigue: para toda álgebra $A$, el espacio $F(A) = A$ tiene estructura de álgebra de Lie en $A$ dada por el conmutador, i.e el corchete $[\,,\,] : A \times A \to A$ está dado por
$$[a, b] = ab - ba, \quad \text{para todo } a, b \in A.$$
El funtor $F$ es adjunto a derecha del funtor $U : Lie_{\Bbbk} \to \text{Alg}_{\Bbbk}$, donde para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ el funtor $U(\mathfrak{g})$ es el álgebra universal. Es decir que $U(\mathfrak{g})$ es el cociente del álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ por el ideal bilátero generado por elementos de la forma $[v, w] - v \otimes w + w \otimes v$, para todo $v, w \in \mathfrak{g}$.
6. Sea $CHaus$ la subcategoría plena de los espacios topológicos Top , que consiste de aquellos espacios que son compactos y Hausdorff. Recodar que la compactificación de Stone-Cech de un espacio topológico $X$ es un espacio compacto Hausdorff $\beta(X)$ munido de un morfismo continuo $\iota : X \to \beta(X)$ que es universal; es decir si $K$ es otro espacio topológico compacto Hausdorff y $f : X \to K$ es un morfismo continuo, entonces existe un único morfismo $\beta(f) : \beta(X) \to K$ tal que $\iota \circ \beta(f) = f$. Resulta que la aplicación
$$\beta : \text{Top} \to CHaus$$
es funtorial y es un adjunto a izquierda del funtor inclusión $CHaus \hookrightarrow \text{Top}$.

**Ejercicio 2.23.** Sean $R, S$ anillos con unidad, y sea $M$ un $(R, S)$-bimódulo. Demostrar que el funtor
$$M \otimes_S - : {}_S\text{Mod} \to {}_{\text{R}}\text{Mod}$$
es adjunto a izquierda del funtor
$$\text{Hom}_R(M, -) : {}_R\text{Mod} \to {}_{\text{S}}\text{Mod}.$$

**Ejercicio 2.24.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor con adjunto a derecha $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Demostrar que el funtor

$$\mathrm{Fun}(F, R) : \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{D}),$$
$$\mathrm{Fun}(F, R)(H) = F \circ H \circ R,$$

posee un adjunto a derecha dado por

$$\mathrm{Fun}(R, F) : \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}).$$

El siguiente ejercicio muestra cómo la existencia de los adjuntos, a derecha e izquierda, de los funtores dados por tensorear a derecha o izquierda por un objeto, está relacionada con la existencia de objetos duales.

**Ejercicio 2.25.** Sea $G$ un grupo finito, $\Bbbk$ un cuerpo y $X \in {}_{\Bbbk G}\mathrm{mod}$. Sea $X^*$ el espacio vectorial dual, con acción de $G$ dada por:

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x),$$

para todo $g \in G$, $f \in X^*$, $x \in X$. Sean

$$R_X, L_X : {}_{\Bbbk G}\mathrm{mod} \to {}_{\Bbbk G}\mathrm{mod},$$
$$R_X(Y) = Y \otimes_{\Bbbk} X, \quad L_X(Y) = X \otimes_{\Bbbk} Y.$$

Demostrar que el funtor $L_{X^*}$ es adjunto a derecha de $R_X$ y que $R_{X^*}$ es adjunto a derecha de $L_X$. Este ejercicio sigue válido para cualquier álgebra de Hopf de dimensión finita, utilizando la antípoda y el inverso de la antípoda, para darle estructura a los espacios duales.

El siguiente resultado técnico muestra la utilidad de considerar la categoría coma para cuando se precise construir adjuntos de un funtor dado.

**Proposición 2.26.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor. Asumir que para todo $X \in \mathcal{C}$ la categoría coma $(X \downarrow G)$ posee un objeto inicial. Entonces $G$ posee un adjunto a izquierda.*

*Demostración.* Se tiene que definir entonces un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que sea un adjunto a izquierda de $G$. Sea $(f, Y)$ el objeto inicial de la categoría coma $(X \downarrow G)$, entonces se define $F(X) = Y$. Esto define una aplicación entre objetos de ambas categorías. Para que sea funtorial, se debe también asociarle una aplicación entre morfismos que sea compatible con la composición.

Sean $X, \widetilde{X}$ dos objetos en $\mathcal{C}$ y $h : X \to \widetilde{X}$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Sean $(f, Y)$, $(\widetilde{f}, \widetilde{Y})$ los objetos iniciales de las categorías coma $(X \downarrow G)$ y $(\widetilde{X} \downarrow G)$, respectivamente. Como $\widetilde{f} \circ h : X \to G(\widetilde{Y})$, es decir que $(\widetilde{f} \circ h, \widetilde{Y})$ es un objeto en la categoría coma $(X \downarrow G)$, por ser objeto inicial, existe un único morfismo

$$\phi : (f, Y) \to (\widetilde{f} \circ h, \widetilde{Y}).$$

Se define entonces $F(h) = \phi$. Observar que, como $\phi$ es morfismo es la categoría coma, se cumple que

$$G(\phi) \circ f = \widetilde{f} \circ h.$$

Claramente, si $h = \mathrm{id}$ entonces $F(h) = \mathrm{id}$. Sean

$$X \xrightarrow{h} \widetilde{X} \xrightarrow{h'} X'$$

morfismos componibles en $\mathcal{C}$. Se quiere ver que se cumple que $F(h \circ h') = F(h) \circ F(h')$. Sean $(f, Y)$, $(\widetilde{f}, \widetilde{Y})$, $(f', Y')$ los objetos iniciales de las categorías coma $(X \downarrow G)$ y $(\widetilde{X} \downarrow G)$, $(X' \downarrow G)$, respectivamente. Se tiene un diagrama conmutativo

(2.5)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{X} \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & X' \arrow[d, "f'"'] \\
G(Y) \arrow[r, "G(\phi)"'] & G(\widetilde{Y}) \arrow[r, "G(\phi')"'] & G(Y'),
\end{tikzcd}$$

Lo cual demustra que $\phi \circ \phi'$ es un morfismo en la categoría coma. Por unicidad, debe ser que $F(h \circ h') = F(h) \circ F(h')$. Ahora se debe mostrar que, para todo $X \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{D}$, existe una biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(A)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), A).$$

Pero esto es claro, pues si $(f, Y)$ es el objeto inicial de la catergoría coma $(X \downarrow G)$, entonces $F(X) = Y$, y si $h : X \to G(A)$ entonces existe un único morfismo $\phi : (f, Y) \to (h, A)$. Es decir que $\phi : Y = F(X) \to A$, y la correspondencia $h \mapsto \phi$ es biyectiva. $\square$

**Ejercicio 2.27.** Sean $A, B$ $\Bbbk$-álgebras asociativas y $\phi : A \to B$ un morfismo de álgebras. Demostrar que este morfismo induce un funtor $Res_\phi : {}_B\mathrm{Mod} \to {}_{\mathrm{A}}\mathrm{Mod}$ restricción. Demostrar que este funtor es una equivalencia de categorías si y solo si el morfismo $\phi$ es un isomorfismo de álgebras.

## 2.4. Ejercicios.

1. Recordemos la notación del Ejemplo 2.4 (4).

   Sean $V, W$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Bbbk$. Demostrar que existen isomorfismos naturales canónicos
   $$Bil_{V,W} \simeq Bil_{W,V}.$$
   Este isomorfismo induce, usando el ejercicio anterior, un isomorfismo canónico $V \otimes_{\Bbbk} W \simeq W \otimes_{\Bbbk} V$.

   (ii) Usando la misma idea del punto anterior, demostrar que existen isomorfismos canónicos
   $$(V \otimes_{\Bbbk} W) \otimes_{\Bbbk} U \simeq V \otimes_{\Bbbk} (W \otimes_{\Bbbk} U).$$

2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X, Y$ objetos de $\mathcal{C}$. Demostrar que el coproducto de $X$ e $Y$ existe si y sólo si el funtor
   $$F : \mathcal{C} \to Set, \quad F(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$$
   es representable.

3. Sean $A, B$ anillos asociativos con unidad. Sea $C$ un $(B, A)$-bimódulo. Demostrar que los funtores
$$C\otimes_A - : {}_A\mathrm{Mod} \to {}_\mathrm{B}\mathrm{Mod}, \quad \mathrm{Hom_B(C, -)} : {}_\mathrm{B}\mathrm{Mod} \to {}_\mathrm{A}\mathrm{Mod}$$
forman una adjunción.
4. Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores, tales que $(F, G)$ es una adjunción con $e : F \circ G \to \mathrm{Id}$ , $u : \mathrm{Id} \to G \circ F$. Demostrar que $G$ es fiel si y sólo si $e_X$ es un epimorfismo para todo $X \in \mathcal{D}$. Similarmente, $F$ es fiel si y solo si $u_X$ es monomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$.
5. Sea $Cat_s$ la categoría de categorías localmente pequeñas. Sea $Obj : Cat_s \to Set$ el funtor que envía una categoría $\mathcal{C}$ al conjunto de sus objetos. Posee $Obj$ adjuntos ?
6. Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funtores. Asumir que ambos funtores poseen adjuntos a derecha $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y $D : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, respectivamente. Demostrar que $H \circ F$ posee adjunto a derecha $G \circ D$.
7. Demostrar que toda equivalencia de categorías posee un adjunto a derecha e izquierda. Recíprocamente, si un funtor posee un adjunto a izquierda con unidad y counidad de la adjunción que son isomorfismos, entonces es una equivalencia.

## 3. Límites y Colímites

En los capítulos anteriores se definieron algunos objetos fundamentales en Teoría de Categorías, como productos, pullbacks, (co)ecualizadores, entre otros. Dichos objetos se caracterizan por poseer una *propiedad universal* que los hace únicos salvo isomorfismo.

En este capítulo veremos como estas construcciones pueden obtenerse como ciertos límites o colímites de diagramas adecuados en una categoría. Este punto de vista permite relacionar adjunciones, funtores representables, y propiedades universales de manera más abstracta. También se presentan ejemplos para facilitar la comprensión de las definiciones.

**Definición 3.1.** Sea $J$ una categoría pequeña. Un *diagrama de forma $J$ en $\mathcal{C}$* es un funtor $F : J \to \mathcal{C}$. Se dice que $J$ *indexa* el diagrama, como en la siguiente figura.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[dr] & j \arrow[d] & & F(i) \arrow[r] \arrow[dr] & F(j) \arrow[d] & \\ & k & \overset{F}{\mapsto} & & F(k) & \mathcal{C}. \end{tikzcd}$$

**Definición 3.2.** Sean $\mathcal{C}$ y $J$ categorías, donde $J$ es pequeña. Recordemos que para $X \in \mathcal{C}$ tenemos un funtor constante $\Delta_X : J \to \mathcal{C}$. Esto a su vez define un funtor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(J, \mathcal{C})$, con $\Delta(X) = \Delta_X$. Un morfismo $f : X \to Y$ induce una transformación natural $\Delta_X \to \Delta_Y$ que tiene cada componente igual a $f$.

**Definición 3.3.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $J$ una categoría pequeña y sea $F : J \to \mathcal{C}$ un funtor. Un *cono sobre* $F$ es un par $(C, f)$ donde

(i) $C$ es un objeto en $\mathcal{C}$,
(ii) $f : \Delta_C \to F$ es una transformación natural,

por lo que para todo $u : i \to j$ en $J$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(u)"] & & F(j) \\ & C, \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

es conmutativo.

**Definición 3.4.** Sea $F : J \to \mathcal{C}$ un funtor. Un *límite inverso (o límite)* de $F$ es un cono $(L, p)$ sobre $F$ con la propiedad de que para cualquier otro cono $(N, f)$ sobre $F$ existe un único morfismo $h : N \to L$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_j"'] & & L \arrow[dl, "p_j"] \\ & F(j), & \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

sea conmutativo para todo $j \in J$. Los morfismos $p_j$ son llamados *proyecciones* del límite y, usualmente, $L$ se denota $\varprojlim F$ o $\lim F$.

Un límite junto con su propiedad universal puede ser representado en un único diagrama como sigue. Si $u : i \to j$ es un morfismo en $J$, entonces

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(u)"] & & F(j) \\ & L \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \\ & N \arrow[u, "h"'] \arrow[uul, bend left, "p_i"] \arrow[uur, bend right, "p_j"'] & \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Existe la noción dual de cono (y por lo tanto, la noción dual de límite).

**Definición 3.5.** Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $J$ una categoría pequeña y sea $F : J \to \mathcal{C}$ un funtor. Un *cono bajo* $F$ (*o cocono*) es un cono sobre $F : J^{op} \to \mathcal{C}^{op}$. Esto es, un par $(E, u)$ donde

(i) E es un objeto de $\mathcal{C}$,
(ii) $u : F \to \Delta_E$ es una transformación natural

O sea, para todo morfismo $v : i \to j$ en $J$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(v)"] \arrow[dr, "u_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "u_j"] \\ & E, & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

es conmutativo.

**Definición 3.6.** Sea $F : J \to \mathcal{C}$ un funtor. Un *límite directo (o colímite)* es un límite de $F : J^{op} \to \mathcal{C}^{op}$. Esto es un cocono $(C, t)$ con la propiedad de que para cualquier otro cocono $(E, u)$ sobre $F$ existe un único morfismo $k : C \to E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "k"] & & E \\ & F(j), \arrow[ul, "t_j"] \arrow[ur, "u_j"'] & \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

es conmutativo para todo $j \in J$. Los morfismos $u_j$ son llamados *inclusiones* del colímite y, usualmente, $C$ se denota $\varinjlim F$ o colim $F$.

Un colímite junto con su propiedad universal puede ser representado en un único diagrama como sigue. Si $v : i \to j$ es un morfismo en $J$, entonces

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(v)"] \arrow[dr, "t_i"] \arrow[ddr, bend right, "u_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "t_j"'] \arrow[ddl, bend left, "u_j"] \\ & C \arrow[d, "k"] & \\ & E. & \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

**Ejemplo 3.7.** Sea $J = \{1, 2\}$ la categoría que tiene dos objetos con sus respectivas identidades. Un funtor $F : J \to \mathcal{C}$ elige dos objetos de $\mathcal{C}$. Podemos describir un límite para este funtor como sigue: es un objeto $P$ con dos morfismos $\pi_i : P \to F(i)$, $i = 1, 2$; tal que si $E \in \mathcal{C}$ tiene morfismos $p_i : E \to F(i)$, entonces existe único $l : E \to P$ tal que $p_i = \pi_i l$, $i = 1, 2$. Es decir, $P$ es un producto para $F(1), F(2)$.

El Ejemplo anterior puede generalizarse al caso infinito, donde $\Pi_{j \in J} X_j = \varprojlim F$ y $F : J \to \mathcal{C}$ asigna $F(j) = X_j$, y la categoría $J$ cumple

$$\mathrm{Hom}(i, j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \mathrm{id}_i, & i = j. \end{cases}$$

**Ejercicio 3.8.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f, g : X \to Y$ dos morfismos. Sea $J$ la categoría que posee dos objetos $\{1, 2\}$ y entre ellos hay solo dos morfismos:

$$1 \rightrightarrows 2.$$

Sea $F : J \to \mathcal{C}$ el único funtor tal que $F(1) = X$, $F(2) = Y$ y tal que envía los dos morfismos de $J$ a $f$ y $g$. Entonces $\varprojlim F$, si existe, es un ecualizador de $f$ y $g$. En otras palabras, todo ecualizador es el límite de un funtor indexado por la categoría de dos objetos y dos morfismos paralelos distintos.

**Ejercicio 3.9.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f, g$ morfismos en $\mathcal{C}$. Encontrar una categoría $J$ y un funtor $F : J \to \mathcal{C}$ tal que su límite y colímite sea el pushout y pullback de $f$ y $g$, de manera análoga al Ejemplo anterior.

*Observación* 3.10 (Los conos y coconos forman categorías)*.* Si $J, \mathcal{C}$ son categorías ($J$ pequeña) y $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(J, \mathcal{C})$ los conos sobre $F$ forman la categoría coma $(\Delta \downarrow F)$ y la categoría de coconos es la categoría coma $(F \downarrow \Delta)$. En este sentido, morfismos de conos son morfismos entre los objetos que conmutan con las proyecciones. Además, el límite de $F$ es un objeto terminal de $(\Delta \downarrow F)$ y el colímite es un objeto inicial de $(F \downarrow \Delta)$.

**Ejercicio 3.11.** Sea $J$ una categoría con objeto inicial $I$. Demostrar que si $F : J \to \mathcal{C}$ es un funtor entonces $\varprojlim F \simeq F(I)$. Enunciar un resultado dual para colímites.

**Ejercicio 3.12.** (a) Sean $J$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ localmente pequeña. Sea $F : J \to \mathcal{C}$ un funtor. Si para cada $X \in \mathcal{C}$, se denota por $Cono(X, F)$ la clase de conos de la forma $(X, \nu)$ para $F$, entonces $Cono(X, F)$ es un conjunto.

(b) Demostrar que la aplicación $X \mapsto Cono(X, F)$ puede ser extendida a un funtor

$$Cono(-, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Set.$$

(c) Demostrar que el límite $\varprojlim F$ existe si y sólo si el funtor $Cono(-, F)$ es representable.

**Ejercicio 3.13.** Sean $J$, $\mathcal{C}$ categorías y $F, G : J \to \mathcal{C}$ funtores. Demostrar que si $\alpha : F \to G$ es una transformación natural, esta induce un morfismo $\widehat{\alpha} : \varprojlim F \to \varprojlim G$, si dichos límites existen.

(i) Si en $\mathcal{C}$ existen todos los límites de forma $J$ lo anterior induce un funtor $\mathrm{lím} : \mathrm{Fun}(J, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

(ii) El funtor lím es adjunto a derecha del funtor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(J, \mathcal{C})$. Enunciar un resultado dual para colímites.

**Definición 3.14.** Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *completa* (respectivamente *cocompleta*) si posee todos los límites pequeños, es decir si $J$ es una categoría pequeña y $F : J \to \mathcal{C}$ es un funtor, el límite $\varprojlim F$ existe (respectivamente el colímite $\varinjlim F$ existe).

Si un funtor $F : J \to Set$ posee límite, por el Ejercicio 3.12 se sabe que este objeto representa al funtor cono $Cono(-, F)$, por lo tanto, para todo conjunto $X$ se debería satisfacer que

$$Set(X, \varprojlim F) \simeq Cono(X, F).$$

En particular, si se toma el conjunto $X = \{1\}$ formado por un único elemento, se debería satisfacer que
$$\varprojlim F \simeq Set(\{1\}, \varprojlim F) \simeq Cono(\{1\}, F).$$
Se usará esta observación para demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 3.15.** *La categoría Set es completa.*

*Demostración.* Sea $J$ una categoría pequeña y $F : J \to Set$ un funtor. Se define
$$\varprojlim F = Cono(\{1\}, F) = \{\nu = (\nu_j)_{j\in J} : \nu_j \in F(j) \text{ y } \forall f : i \to j, F(f)(\nu_i) = \nu_j\}.$$
Como $Obj(J)$ es un conjunto, se puede ver que $\varprojlim F$ es efectivamente un conjunto. Se define también
$$\lambda_i : \varprojlim F \to F(i),$$
$$\lambda_i(\nu) = \nu_i, \quad i \in J.$$
Es evidente por la definición que $(\varprojlim F, \lambda)$ es un cono. Se verá que cumple con la propiedad universal del límite. Sea $(X, \mu)$ un cono para $F$. Se debe demostrar que existe una única función $h : X \to \varprojlim F$ tal que el diagrama

(3.7)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\mu_i"'] & & \varprojlim F \arrow[dl, "\lambda_i"] \\ & F(i) & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Se define $h : X \to F(i)$ como $h(x)_i = \mu_i(x)$, para todo $x \in X$. Por construcción se satisface (3.7). □

**Teorema 3.16.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que posee ecualizadores y productos pequeños (respectivamente finitos) entonces $\mathcal{C}$ posee límites pequeños (respectivamente finitos).*

*Demostración.* Sea $J$ una categoría pequeña y sea $H : J \to \mathcal{C}$ un funtor. Se va a demostrar que existe $\varprojlim H$. Para cada morfismo $\alpha : X \to Y$ de la categoría $J$, se denotará $dom(\alpha) = X$, $codom(\alpha) = Y$. Se define
$$P = \Pi_{j\in Obj(J)} H(j), \qquad Q = \Pi_{\alpha \in Morf(J)} H(codom(\alpha)),$$
con respectivas proyecciones
$$\pi_j : P \to H(j), \qquad p_\alpha : Q \to H(codom(\alpha)).$$
Como $\pi_{codom(\alpha)} : P \to H(codom(\alpha))$, por la propiedad universal del producto existe un único morfismo $f : P \to Q$ tal que el diagrama

(3.8)
$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{codom(\alpha)}"'] & & Q \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & H(codom(\alpha)) & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Análogamente, se define $g : P \to Q$ tal que

$$p_\alpha \circ g = H(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)}.$$

Sea $k : L \to P$ el ecualizador del par $(f, g)$. Este objeto está munido de morfismos

$$\lambda_j : L \to H(j), \qquad \lambda_j = \pi_j \circ k.$$

Se afirma entonces que $(L, \lambda) = \varprojlim H$. Primero se ve que $(L, \lambda)$ es un cono. Sea $h : i \to j$ un morfismo en la categoría $J$. Entonces

$$H(h) \circ \lambda_i = H(h) \circ \pi_i \circ k = p_h \circ g \circ k = p_h \circ f \circ k = \pi_j \circ k.$$

La primera igualdad es por la definición de $\lambda$, la segunda por la definición de $g$, la tercera se debe a que $k$ es el ecualizador entre $f$ y $g$, y la última igualdad se debe a la definición de $f$. Ahora, sea $(D, \nu)$ otro cono sobre $H$, es decir que se tienen morfismos $\nu_i : D \to H(i)$. Entonces existe un único morfismo $\beta : D \to P$ tal que

$$\pi_j \circ \beta = \nu_j$$

para todo $j \in J$. Se tiene que

$$p_\alpha \circ f \circ \beta = \pi_{codom(\alpha)} \circ \beta = \nu_{codom(\alpha)},$$
$$p_\alpha \circ g \circ \beta = H(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)} \circ \beta = H(\alpha) \circ \nu_{dom(\alpha)}.$$

Como $(D, \nu)$ es un cono, $p_\alpha \circ f \circ \beta = p_\alpha \circ g \circ \beta$, para todo $\alpha$ morfismo en $J$. Entonces $f \circ \beta = g \circ \beta$. Por ser $L$ el ecualizador de $f$ y $g$, existe un morfismo $e : D \to L$ tal que $\beta = k \circ e$. La verificación $\lambda_i \circ e = \nu_i$ es inmediata. $\square$

Se puede utilizar el Teorema anterior para probar el siguiente Corolario:

**Corolario 3.17.** *Para una categoría $\mathcal{C}$, son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{C}$ posee ecualizadores y productos finitos,*
(ii) *$\mathcal{C}$ posee objeto terminal y pullbacks,*
(iii) *$\mathcal{C}$ admite todos los límites finitos (estos son, aquellos indexados por una categoría $J$ con finitos objetos y finitos morfismos).*

$\square$

**Ejemplo 3.18.** La categoría de anillos *Ring* posee ecualizadores y productos pequeños y, por lo tanto, posee límites pequeños. En particular, sea $\omega$ la categoría cuyos objetos son los números naturales, con morfismos no triviales dados por

$$\cdots \to 4 \to 3 \to 2 \to 1.$$

La categoría $\omega$ es pequeña. Sea $F : \omega \to Ring$ el funtor dado por

$$F(n) = \mathbb{Z}/(p^n).$$

Para cada morfismo no trivial $n + 1 \to n$, el funtor $F$ lo envía a la proyección canónica $\mathbb{Z}/(p^{n+1}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$. Entonces el límite $\varprojlim F$ existe y son los *enteros p-ádicos.*

El siguiente resultado será de utilidad más adelante.

**Lema 3.19.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tales que $\mathcal{D}$ posee (co)límites de forma $J$. Entonces la categoría* $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *también posee (co)límites de forma $J$.*

*Demostración.* Sea $D : J \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ un funtor. Se demostrará que existe el colímite $\varinjlim D$. Para todo $X \in \mathcal{C}$ sea $D_X : J \to \mathcal{D}$ el funtor

$$D_X(j) = D(j)(X).$$

Como $\mathcal{D}$ posee colímites de forma $J$, se puede considerar

$$(L_X, \lambda_j^X) = \varinjlim D_X.$$

Se va a ver que la aplicación $X \mapsto L_X$ es funtorial; es decir que se puede definir un funtor $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $L(X) = L_X$. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces el par $(L_Y, \lambda_j^Y \circ D(j)(f))$ es un cocono para $D_X$ . Luego, existe un único morfismo $L_f : L_X \to L_Y$ tal que

$$L_f \circ \lambda_j^X = \lambda_j^Y \circ D(j)(f)$$

para todo $j \in J$. Por la unicidad del morfismo se deduce que $L_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ , $L_{f \circ g} = L_f \circ L_g$, es decir $L$ es un funtor. Se demostrará entonces que $L = \varinjlim D$.

Sea $(H, \mu_j)$ un cocono para $D$. Observar que $\mu_j : D \to H$ es una transformación natural para todo $j \in J$. Es decir, para todo $X \in \mathcal{C}$ se tienen morfismos

$$(\mu_j)_X : D(j)(X) \to H(X)$$

Se puede comprobar que $(H(X), (\mu_j)_X)$ es un cocono para $D_X$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, existe un único morfismo $\alpha_X : L_X \to H(X)$ tal que

$$(\mu_j)_X = \alpha_X \circ \lambda_j^X.$$

Utilizando la unicidad de $\alpha$ se puede demostrar que en efecto $\alpha$ es una transformación natural. □

**Definición 3.20.** Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y $J$ una categoría.

1. Se dice que $F$ *preserva* límites de forma $J$ si dado $H : J \to \mathcal{C}$ un funtor cuyo cono $(D, \lambda)$ es el límite $\varprojlim H$ entonces $(F(D), F(\lambda))$ es el límite $\varprojlim(F \circ H)$.
2. Se dice que $F$ *refleja* límites de forma $J$ si dado $H : J \to \mathcal{C}$ un funtor y un cono $(D, \lambda)$ tal que $\varprojlim(F \circ H) = (F(D), F(\lambda))$, entonces $\varprojlim H = (D, \lambda)$.
3. Se dice que $F$ *crea* límites de forma $J$ si dado $H : J \to \mathcal{C}$ un funtor y un cono $(M, \nu)$ tal que es el límite de $\varprojlim(F \circ H)$, entonces existe un cono $(D, \lambda)$ tal que $(F(D), F(\lambda)) \simeq (M, \nu)$ y $(D, \lambda) = \varprojlim H$.

**Ejercicio 3.21** (Hom preserva límites)**.** Sean $J$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ localmente pequeña. Si $F : J \to \mathcal{C}$ es un funtor cuyo límite $\varprojlim F$ existe, entonces para todo $X \in \mathcal{C}$ el límite $\varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(-))$ existe y hay un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim F) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(-)).$$

Análogamente, si existe $\varinjlim F$, entonces para todo $X$ existe un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim F, X) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, X).$$

En el siguiente teorema se demostrará que los funtores adjuntos a derecha preservan límites.

**Teorema 3.22.** *Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor con adjunto a izquierda $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Entonces $G$ preserva límites.*

*Demostración.* Sea $H : J \to \mathcal{D}$ un funtor cuyo límite es $\varprojlim H = (D, \lambda)$. Ahora, sea $(C, \nu)$ un cono sobre $G \circ H$. Es decir que se tiene una familia de morfismos

$$\nu_j : C \to G(H(j)).$$

Sean $\mu_j : F(C) \to H(j)$ los morfismos que corresponden a los $\nu_j$ bajo la biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), H(j)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(H(j))).$$

Resulta que $(F(C), \mu)$ es un cono. Por la definición de límite, existe un morfismo $\phi : F(C) \to D$ tal que $\lambda_j \circ \phi = \mu_j$, para todo $j$. Sea $\bar{\phi} : C \to G(D)$ el morfismo que corresponde bajo la biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)).$$

Entonces $G(\lambda_j) \circ \bar{\phi} = \nu_j$. □

**Ejercicio 3.23.** Demostrar que una equivalencia de categorías preserva, refleja y crea límites que existen en su dominio y codominio.

**Proposición 3.24.** *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías. Asumir que $\mathcal{D}$ posee todos los límites de forma $J$ y que $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites de forma $J$. Entonces*

1. *Para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, la categoría coma $(X \downarrow G)$ tiene límites de forma $J$.*
2. *Para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, el funtor de olvido $\mathcal{U} : (X \downarrow G) \to \mathcal{D}$ crea límites de forma $J$.*

*Demostración.* Sea $F : J \to (X \downarrow G)$ un funtor. Se va a ver que su límite existe. Como $\mathcal{D}$ posee límites de forma $J$, entonces el funtor $\mathcal{U} \circ F : J \to \mathcal{D}$ tiene límite. Sea $(L, \lambda) = \varprojlim \mathcal{U} \circ F$, donde para todo $j \in J$ se tiene que $\lambda_j : L \to \mathcal{U}(F(j))$ son morfismos en $\mathcal{D}$. Como $G$ preserva límites de forma $J$ , entonces

$$\varprojlim G \circ \mathcal{U} \circ F = (G(L), G(\lambda)).$$

Como para todo objeto $j \in J$, se tiene que $F(j) \in (X \downarrow G)$, entonces $F(j) = (f_j, Y_j)$, donde $Y_j \in \mathcal{D}$ y $f_j : X \to G(Y_j)$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Notar que $(X, (f_j)_{j \in J})$ es un cono sobre el funtor $G \circ \mathcal{U} \circ F$. Luego, por la propiedad universal del límite, existe un único morfismo $\phi : X \to G(L)$ que hace conmutar el diagrama

(3.9)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f_j"'] & & G(L) \arrow[dl, "G(\lambda_j)"] \\ & G(Y_j) & \end{tikzcd}$$

El par $(L,\phi)$ es un objeto en $(X\downarrow G)$. Se afirma que

$$\varprojlim F = ((L,\phi),\lambda).$$

En efecto, la conmutatividad del diagrama (3.9) implica que los morfismos

$$\lambda_j : (L,\phi)\to F(j),$$

son morfismos en la categoría $(X\downarrow G)$. Que el objeto $((L,\phi),\lambda)$ es un cono sobre $F$ se deduce de que $(L,\lambda)$ es un cono sobre $\mathcal{U}\circ F$. Ahora, sea $(A,\psi)$ un objeto en $(X\downarrow G)$ y $((A,\psi),\nu)$ un cono sobre $F$. En particular, $(A,\nu)$ es un cono sobre $\mathcal{U}\circ F$, y como $(L,\lambda)=\varprojlim \mathcal{U}\circ F$, se deduce que existe un único morfismo $\alpha : A\to L$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\nu_j"'] & & L \arrow[dl, "\lambda_j"] \\ & Y_j, & \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

es conmutativo para todo $j\in J$. Se debe demostrar que $\alpha : (A,\psi)\to(L,\phi)$ es un morfismo en $(X\downarrow G)$; es decir se debe comprobar que

$$G(\alpha)\circ\psi=\phi.$$

Como los $\nu_j$ son morfismos en $(X\downarrow G)$ se debe cumplir que

$$G(\nu_j)\circ\psi = f_j, \tag{3.11}$$

para todo $j\in J$. Luego

$$G(\lambda_j)\circ G(\alpha)\circ\psi = G(\nu_j)\circ\psi = f_j = G(\lambda_j)\circ\phi. \tag{3.12}$$

La primera igualdad se deduce del diagrama (3.10), la segunda igualdad por (3.11) y la tercera igualdad por la conmutatividad del diagrama (3.9). Por la unicidad del límite debe ser que $\phi$ y $G(\alpha)\circ\psi$ sean iguales. Esta misma demostración implica que $\mathcal{U}$ crea límites. □

La demostración del siguiente resultado queda como tarea para el lector.

**Proposición 3.25.** *Sea $F:\mathcal{C}\to \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ un funtor. Para todo $A\in\mathcal{A}$ se define $F_A:\mathcal{C}\to\mathcal{B}$, $F_A(X)=F(X)(A)$. Entonces si todos los límites $\varprojlim F_A$ existen, la aplicación $A\mapsto \varprojlim F_A$ es funtorial y coincide con el límite $\varprojlim F$.* □

### 3.1. Ejercicios.

1. Demostrar que un objeto $I$ en una categoría $\mathcal{C}$ es inicial si y sólo si $I$ es el límite del functor identidad $\mathrm{Id}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$.
2. Sea $J$ una categoría pequeña. Demostrar que una categoría $\mathcal{C}$ admite todos los límites indexados por $J$ si y solo si el funtor constante $\Delta:\mathcal{C}\to\mathrm{Fun}(J,\mathcal{C})$ posee un adjunto a derecha. Ver el ejercicio 3.13.
3. Demostrar que toda equivalencia de categorías preserva, refleja y crea (co)límites.

4. (a) Sea $J$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ localmente pequeña. Sea $F : J \to \mathcal{C}$ un funtor. Si para cada $X \in \mathcal{C}$, denotamos por $Cono(X, F)$ la clase de conos de la forma $(X, \nu)$ para $F$, entonces $Cono(X, F)$ es un conjunto.
   (b) Demostrar que la aplicación $X \mapsto Cono(X, F)$ puede ser extendida a un funtor
   $$Cono(-, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Set.$$
   (c) Demostrar que el límite existe $\varprojlim F$ si y sólo si el funtor $Cono(-, F)$ es representable.
5. Demostrar que una categoría con coproductos y coecualizadores es cocompleta.
6. Demostrar que la categoría de espacios topológicos es completa y cocompleta.
7. Demostrar que una categoría que posee pullbacks y un objeto terminal es completa.
8. Demostrar que un funtor fiel y pleno refleja límites y colímites presentes en su codominio.
9. Demostrar que el funtor identidad $\mathrm{Id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ en una categoría $\mathcal{C}$ admite límite si y solo si $\mathcal{C}$ posee un objeto inicial.
10. Demostrar que si $\mathcal{C}$ posee pullbacks y objeto terminal, entonces $\mathcal{C}$ es completa.

## 4. Ends y Coends

En esta sección introduciremos una herramienta muy poderosa en teoría de categorías; los ends y coends. Ambos conceptos tienen la fuerza de poder guardar información global de la categoría.

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías y $S, T : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Una *transformación dinatural* $d : S \ddot{\to} T$ entre los funtores $S, T : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una colección de morfismos en $\mathcal{D}$

$$d_X : S(X, X) \to T(X, X), \quad X \in \mathcal{C},$$

tal que para todo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ se satisface

$$T(\mathrm{id}_X, f) \circ d_X \circ S(f, \mathrm{id}_X) = T(f, \mathrm{id}_Y) \circ d_Y \circ S(\mathrm{id}_Y, f). \tag{4.1}$$

**Definición 4.1.** Un *end* para $S$ es un par $(E, p)$ donde

- un objeto $E \in \mathcal{D}$;
- una transformación dinatural $p : E \ddot{\to} S$;

(Aquí el objeto $E$ es considerado como el funtor constante)tal que se satisface la siguiente propiedad universal. Para cualquier par $(D, d)$ que consiste de un objeto $D \in \mathcal{D}$ y una transformación dinatural $d : D \ddot{\to} S$, existe un *único* morfismo $h : D \to E$ en $\mathcal{D}$ tal que

$$d_X = p_X \circ h, \qquad \text{para todo } X \in \mathcal{C}.$$

Un *coend* para $S$ es la noción dual del end. Es decir, que consiste de un par $(C, \pi)$ donde

- un objeto $C \in \mathcal{D}$;
- una transformación dinatural $\pi : S \ddot{\to} C$,

tal que se satisface la siguiente propiedad universal. Para todo par $(B,t)$, donde $B \in \mathcal{D}$ es un objeto y $t : S \ddot{\to} B$ una transformación dinatural, existe un *único* morfismo $h : C \to B$ tal que

$$h \circ \pi_X = t_X, \quad \text{para todo } X \in \mathcal{C}.$$

El (co)end de un funtor es único salvo isomorfismo. Dicho resultado queda de ejercicio para el lector.

**Lema 4.2.** *Sea $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y sean $(E,\pi), (\widetilde{E},\widetilde{\pi})$ dos ends para $S$. Entonces existe un único isomomorfismo $\theta : E \to \widetilde{E}$ tal que*

$$\widetilde{\pi}_X \circ \theta = \pi_X,$$

*para todo $X \in \mathcal{C}$.* $\square$

Un resultado análogo también es cierto para coends. El end y coend, se denotarán, respectivamente, como

$$\int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X) \quad \text{and} \quad \int^{X\in\mathcal{C}} S(X,X).$$

En los siguientes ejemplos se mostrará como el (co)end codifica información global de la categoría. Sean $\mathcal{C},\mathcal{D}$ dos categorías localmente pequeñas, y $F,G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Se define

$$S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to Set, \quad S(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(Y)).$$

Observar que el funtor $S$ evaluado en morfismos $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ en $\mathcal{C}$ es

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), G(g))(\alpha) = G(g) \circ \alpha \circ F(f),$$

para toda $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(M), G(N))$.

**Lema 4.3.** *Sean $\mathcal{C},\mathcal{D}$ categorías y $F,G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Existe un isomorfismo*

$$\int_{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X)) \simeq \mathrm{Nat}\,(F,G). \tag{4.2}$$

*Demostración.* Para todo $X \in \mathcal{C}$, se define $\pi_X : \mathrm{Nat}\,(F,G) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ por $\pi_X(\alpha) = \alpha_X$. Sigue inmediatamente que $\pi$ es una transformación dinatural. Sea $E$ un conjunto equipado con una transformación dinatural $\xi_X : E \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$. Se define $h : E \to \mathrm{Nat}\,(F,G)$ como sigue. Para todo $v \in E$, $X \in \mathcal{C}$, $h(v)_X = \xi_X(v)$. Por definición $h$ es única satisfaciendo $\pi \circ h = \xi$, y se puede comprobar que $h(v)$ es natural. $\square$

**Teorema 4.4.** *Sean $\mathcal{C},\mathcal{D}$ dos categorías y $S,\widetilde{S} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores.*

(i) *Asumir que los ends $\int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X), \int_{X\in\mathcal{C}} \widetilde{S}(X,X)$ existen con dinaturales asociadas $\pi$ y $\widetilde{\pi}$, respectivamente. Sea $\gamma : S \to \widetilde{S}$ una transformación natural. Entonces existe un único morfismo $\widehat{\gamma} : \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X) \to \int_{X\in\mathcal{C}} \widetilde{S}(X,X)$ tal que*

$$\widetilde{\pi}_X \widehat{\gamma} = \gamma_{(X,X)} \pi_X,$$

*para todo $X \in \mathcal{C}$.*

(ii) *Si $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ es un funtor que posee un adjunto a izquierda entonces existe un isomorfismo*

$$F\Big(\int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X)\Big) \simeq \int_{X\in\mathcal{C}} F\circ S(X,X).$$

(iii) *Si $\Phi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ es una equivalencia de categorías, entonces existe un isomorfismo*

$$\int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X) \simeq \int_{X\in\mathcal{C}'} S(\Phi(X),\Phi(X)).$$

*Demostración.* (i). El morfismo $\gamma_{X,X}\pi_X : \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X) \to \widetilde{S}(X,X)$ es una transformación dinatural. Por lo tanto, por la propiedad universal del end, existe un único morfismo $\widehat{\gamma} : \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X) \to \int_{X\in\mathcal{C}} \widetilde{S}(X,X)$ con la propiedad deseada.

(ii). Asumir que $(G,F)$ es una adjunción con unidad $u : \mathrm{Id} :\to F\circ G$ y counidad $e : G\circ F \to \mathrm{Id}$. Las transformaciones $F(\pi_X) : F\big(\int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X)\big) \to F\circ S(X,X)$ son dinaturales. Sean $\lambda_X : E \to F\circ S(X,X)$ transformaciones dinaturales. Entonces la composición

$$G(E) \xrightarrow{G(\lambda_X)} G\circ F\circ S(X,X) \xrightarrow{e_{S(X,X)}} S(X,X),$$

es dinatural. Entonces, por la propiedad universal del end se tiene que existe un morfismo $h : G(E) \to \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X)$ tal que

$$\pi_X \circ h = e_{S(X,X)} \circ G(\lambda_X).$$

Entonces se tiene que

$$F(\pi_X)F(h)u_E = F(e_{S(X,X)})F(G(\lambda_X))u_E = F(e_{S(X,X)})u_{F(S(X,X))}\lambda_X = \lambda_X$$

La segunda igualdad se debe a la naturalidad de la transformación $c$ y la tercera sigue de (2.3). Luego $F(h)u_E$ cumple lo pedido.

(iii). Si $\pi_X : \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X) \to S(X,X)$ son las dinaturales asociadas al end, entonces, se define

$$\widehat{\pi}_Y = \pi_{\Phi(Y)},$$

para todo $Y \in \mathcal{C}'$. Se puede comprobar que $\widehat{\pi}$ son dinaturales y satisfacen la propiedad universal del end. □

Por supuesto que los resultados del Teorema también tienen su versión para coends. Se deja como tarea enunciarlos y demostrarlos. La demostración del siguiente resultado queda como un buen ejercicio para el lector.

**Lema 4.5.** [5, Lemma 3.9] *Sean $\mathcal{C},\mathcal{A},\mathcal{D}$ categorías y $(F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$ una adjunción, y $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, $\widetilde{S} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funtores. Bajo la hipótesis de que uno de los (co)end exista, el otro también existe, y existen isomorfismos*

$$\int^{A\in\mathcal{C}} S(F(A),A) \simeq \int^{B\in\mathcal{D}} S(B,G(B)),$$

$$\int_{A\in\mathcal{C}} \widetilde{S}(A,F(A)) \simeq \int_{B\in\mathcal{D}} \widetilde{S}(G(B),B).$$

□

**Ejercicio 4.6.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial rígida y $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Sea $S:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{A}$ un funtor. Existe un isomorfismo

$$\int^{X\in\mathcal{C}} S(X^*,X) \simeq \int^{X\in\mathcal{C}} S(X,{}^*X). \tag{4.3}$$

**4.1. Ejemplos de (co)ends.** En lo que sigue $\Bbbk$ denotará un cuerpo. Sea

$$T:\mathrm{vect}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}}\times\mathrm{vect}_{\Bbbk}\to\mathrm{vect}_{\Bbbk},$$
$$T(V,W)=W\otimes_{\Bbbk}V^*.$$

**Proposición 4.7.** *Existe un isomorfismo*

$$\Bbbk\simeq\int^{V\in\mathrm{vect}_{\Bbbk}} T(V,V).$$

*Demostración.* Para cada $V\in\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ se define

$$tr_V:V\otimes_{\Bbbk}V^*\to\Bbbk,$$

la traza. Es decir que

$$tr_V(w\otimes\alpha)=\alpha(w),$$

para todo $w\otimes\alpha\in V\otimes_{\Bbbk}V^*$. Queda como tarea para el lector comprobar que $tr:T\to\Bbbk$ es una transformación dinatural.

Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión finita equipado de dinaturales $\pi_V:V\otimes_{\Bbbk}V^*\to E$. Se debe demostrar que existe un morfismo lineal $\phi:\Bbbk\to E$ tal que $\pi_V=\phi\circ tr_V$. La dinaturalidad de $\pi$ implica que para toda transformación lineal $f:V\to W$ se satisface que

$$\pi_V(\mathrm{id}_V\otimes f^*)=\pi_W(f\otimes\mathrm{id}_{W^*}). \tag{4.4}$$

Se define $\pi_{\Bbbk}=\phi:\Bbbk\to E$. Sea $W$ un espacio vectorial y $w\in W$, $\alpha\in W^*$. Entonces la ecuación (4.4) aplicada a la transformación lineal $\gamma_w:\Bbbk\to W$, $\gamma_w(1)=w$ implica que

$$\pi_W(\gamma_w\otimes\mathrm{id}_{W^*})=\pi_{\Bbbk}(\mathrm{id}_{\Bbbk}\otimes\gamma_w^*).$$

Evaluando el lado derecho de esta igualdad en $(1\otimes g)$, donde $g\in W^*$, se obtiene

$$g(w)\pi_{\Bbbk}(1\otimes 1)=\phi\circ tr_W(w\otimes g).$$

Evaluando el lado izquierdo en $(1\otimes g)$, se obtiene $\pi_W(w\otimes g)$. De lo cual se deduce que $\pi_W=\phi\circ tr_W$. □

***Observación*** 4.8. Los ends y coends no solamente constan de un objeto, sino que también resultan importantes sus respectivas dinaturales. El ejemplo de coend de la Proposición anterior muestra que el coend del funtor $T$ codifica **todas** las trazas de espacios vectoriales. Esta es una característica muy importante de este ejemplo particular.

Se presenta otro ejemplo. Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Se define el funtor

$$S : {}_A\mathrm{mod}^{\mathrm{op}} \times {}_A\mathrm{mod} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}, \quad S(V,W) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W).$$

Observar que si $V, W \in {}_A\mathrm{mod}$ y $f : V \to W$ es un morfismo de $A$-módulos, entonces

$$S(\mathrm{id}_V, f) : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,V) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W),\ \alpha \mapsto f \circ \alpha,$$

$$S(f, \mathrm{id}_W) : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W,W) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W),\ \alpha \mapsto \alpha \circ f.$$

El siguiente resultado sintetiza como se puede recuperar al álgebra $A$ solamente conociendo la estructura de su categoría de representaciones. Dicho resultado se asemeja al Teorema de Peter-Weyl para grupos topológicos compactos.

**Proposición 4.9.** *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$A \simeq \int_{V \in {}_A\mathrm{mod}} S(V,V).$$

*Demostración.* Sea $V \in {}_A\mathrm{mod}$. Se define

$$d_V : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V), \quad d_V(a)(v) = a \cdot v.$$

Se quiere probar que $d$ es una transformación dinatural. Sea $f : V \to W$ un morfismo de $A$-módulos. Entonces

$$(f \circ d_V(a))(v) = f(a \cdot v) = a \cdot f(v) = d_W(a)(f(v)).$$

Por lo tanto, $f \circ d_V(a) = d_W(a) \circ f$ y $d$ es dinatural. Ahora sea $E$ un $\Bbbk$-espacio vectorial munido de una transformación dinatural $\lambda_V : E \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. La dinaturalidad implica que, para todo morfismo de $A$-módulos $f : V \to W$, se tiene que para todo $e \in E$

$$f \circ \lambda_V(e) = \lambda_W(e) \circ f. \tag{4.5}$$

En particular, si $V$ es un $A$-módulo y $v \in V$, se puede definir $f_v : A \to V$, $f_v(a) = a \cdot v$. Entonces (4.5) dice que

$$\lambda_A(e)(1) \cdot v = \lambda_V(e),$$

para todo $e \in E$. Entonces, si se define $h : E \to A$, $h(e) = \lambda_A(e)(1)$, se satisface que $d_V \circ h = \lambda_V$. $\square$

Es posible dar una estructura de álgebra al espacio $\int_{V \in {}_A\mathrm{mod}} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,V)$ de una forma canónica, de tal forma que el isomorfismo de la Proposición 4.9 sea un isomorfismo de álgebras.

**4.2. (Co)ends como límites.** En esta sección se verá como los (co)ends pueden ser vistos como límites de ciertos funtores.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se define la categoría $\widehat{\mathcal{C}}$ cuyos objetos son símbolos $\widehat{X}, \widehat{f}$ donde $X$ es un objeto de $\mathcal{C}$ y $f$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Además de las identidades, los morfismos en $\widehat{\mathcal{C}}$ son definidos de la siguiente forma. Para cada morfismo $f : X \to Y$ hay dos morfismos en $\widehat{\mathcal{C}}$:

$$\widehat{X} \to \widehat{f} \leftarrow \widehat{Y}.$$

La definición de la composición se define de forma trivial ya que las únicas composiciones se dan con las identidades.

Sea $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un funtor. Se define entonces $\widehat{S} : \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}$ de la siguiente forma. Si $X, Y$ son objetos y $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces:

$$\widehat{S}(\widehat{X}) = S(X, X), \quad \widehat{S}(\widehat{f}) = S(X, Y),$$

y

$$\widehat{S}(\widehat{X} \to \widehat{f}) = S(f, \mathrm{id}_X), \quad \widehat{S}(\widehat{f} \leftarrow \widehat{Y}) = S(\mathrm{id}_Y, f).$$

**Lema 4.10.** *Las siguientes nociones son equivalentes:*

- *conos $(A, \nu)$ sobre $\widehat{S}$;*
- *transformaciones dinaturales $\pi_X : A \to S(X, X)$.*

□

El siguiente Teorema sigue inmediatamente del Lema anterior.

**Teorema 4.11.** *Sea $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un funtor y $\widehat{S} : \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}$ el asociado. Si alguno de los dos, ya sea el end $\int_{X \in \mathcal{C}} S(X, X)$ o el límite $\varprojlim \widehat{S}$ existen el otro también existe, y hay un isomorfismo*

$$\int_{X \in \mathcal{C}} S(X, X) \simeq \varprojlim \widehat{S}.$$

El siguiente Corolario sigue del Teorema anterior y de observar que si $\mathcal{C}$ es pequeña, entonces $\widehat{\mathcal{C}}$ también lo es.

**Corolario 4.12.** *Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{A}$ una categoría completa entonces todo funtor $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ posee un end.* □

**4.3. (Co)ends con parámetros y Fubbini.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorías, $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un funtor. Supongamos que existe $\int_{X \in \mathcal{C}} S \in \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

Por otro lado, para todo $A \in \mathcal{A}$ se define

$$S_A : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B},$$
$$S_A(X, Y) = S(X, Y)(A).$$

**Proposición 4.13.** *Asumir que para todo $A \in \mathcal{A}$ existe el end $\int_{X \in \mathcal{C}} S_A \in \mathcal{B}$. La aplicación $A \mapsto \int_{X \in \mathcal{C}} S_A$ define un funtor $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ que coincide con el end $\int_{X \in \mathcal{C}} S$.*

*Demostración.* Para cada objeto $A \in \mathcal{A}$, sean $\pi^A_X : \int_{X \in \mathcal{C}} S_A \ddot{\to} S(X, X)(A)$ las transformaciones dinaturales correspondientes. Se define $\Omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\Omega(A) = \int_{X \in \mathcal{C}} S_A$. Veamos que $\Omega$ es un funtor. Dados $A, B$ objetos en $\mathcal{A}$ y $f : A \to B$ un morfismo, existe una transformación natural

$$\gamma_f : S_A \to S_B,$$
$$(\gamma_f)_{(X,Y)} = S(X, Y)(f).$$

Por el Teorema 4.4 (i) existe un morfismo $\widehat{\gamma_f} : \int_{X \in \mathcal{C}} S_A \to \int_{X \in \mathcal{C}} S_B$ tal que

$$\pi^B_X \widehat{\gamma_f} = (\gamma_f)_{(X,X)} \pi^A_X. \tag{4.6}$$

Se define entonces $\Omega(f) = \widehat{\gamma}_f$. Se va a ver que si $f : A \to B$, $g : B \to C$ son morfismos, entonces $\Omega(g \circ f) = \Omega(g) \circ \Omega(f)$. Por un lado se tiene que

$$\pi_X^C \Omega(g \circ f) = (\gamma_{g \circ f})_{(X,X)} \pi_X^A = (\gamma_f)_{(X,X)} (\gamma_g)_{(X,X)} \pi_X^A.$$

La primera igualdad sigue de (4.6). Por otro lado

$$\pi_X^C [\Omega(g) \circ \Omega(f)] = (\gamma_g)_{(X,X)} \pi_X^B \Omega(f) = (\gamma_g)_{(X,X)} (\gamma_f)_{(X,X)} \pi_X^A.$$

Las dos primeras igualdades siguen de (4.6). Por la unicidad de la propiedad universal del end se deduce que $\Omega(g \circ f) = \Omega(g) \circ \Omega(f)$. Ahora se quiere ver que el funtor $\Omega$ es isomorfo a $\int_{X \in \mathcal{C}} S$. Para ello se mostrará que existen dinaturales sobre $\Omega$ que satisfacen la propiedad universal. Para $X \in \mathcal{C}$ se define

$$\lambda_X : \Omega \to S(X, X),$$
$$(\lambda_X)_A = \pi_X^A.$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que $\lambda$ es dinatural. Sea $E \in \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un funtor que viene equipado de dinaturales $\mu_X : E \xrightarrow{\cdot\cdot} S(X, X)$. Observar que $\mu_X$ son transformaciones naturales. Para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $(\mu_X)_A : E(A) \to S(X, X)(A)$ son transformaciones dinaturales. Por lo tanto, existe un morfismo $h^A : E(A) \to \int_{X \in \mathcal{C}} S_A$ tal que

$$\pi_X^A \circ h^A = (\mu_X)_A. \tag{4.7}$$

Se define $h : E \to \Omega$, $h_A = h^A$. La demostración finaliza una vez que se muestre que $h$ es una transformación natural, ya que por construcción se satisface que $\lambda_X \circ h = \mu_X$.

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ y $f : A \to B$ un morfismo. Se debe comprobar que

$$\widehat{\gamma}_f h^A = h^B E(f).$$

Aplicando $\pi_X^B$ al lado izquierdo se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi_X^B \widehat{\gamma}_f h^A &= (\gamma_f)_{(X,X)} \pi_X^A h^A = (\gamma_f)_{(X,X)} (\mu_X)_A = (\mu_X)_B E(f) \\ &= \pi_X^B h^B E(f). \end{aligned}$$

La primera igualdad se debe a (4.6), la segunda a (4.7), la tercera igualdad es la naturalidad de $\mu_X$ y la cuarta igualdad sigue nuevamente de (4.7). Por la unicidad del end se tiene que $\widehat{\gamma}_f h^A = h^B E(f)$. □

**Teorema 4.14.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{P}$ y $\mathcal{A}$ categorías junto a un funtor*

$$S : \mathcal{P}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{P} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}.$$

*Si para todo par de objetos $P, Q \in \mathcal{P}$ el end*

$$\int_{X \in \mathcal{C}} S(P, Q, X, X)$$

*existe, y tiene transformaciones dinaturales*

$$\lambda_X^{(P,Q)} : \int_{X \in \mathcal{C}} S(P, Q, X, X) \to S(P, Q, X, X),$$

*es funtorial en* $\mathcal{P}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{P} \to \mathcal{A}$*. Además,* $S$ *puede ser considerado como un funtor* $S : (\mathcal{P} \times \mathcal{C})^{\mathrm{op}} \times (\mathcal{P} \times \mathcal{C}) \to \mathcal{A}$*. Existe un isomorfismo*

$$\theta : \int_{(P,X)\in\mathcal{P}\times\mathcal{C}} S \to \int_{P\in\mathcal{P}} \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,P,X,X)$$

*tal que*

$$\lambda_X^{(P,P)} \circ \pi_P \circ \theta = \alpha_{(P,X)}.$$

*Aquí* $\alpha_{(P,X)} : \int_{(P,X)\in\mathcal{P}\times\mathcal{C}} S \to S(P,X,P,X)$ *y* $\pi_P : \int_{P\in\mathcal{P}} \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,P,X,X) \to \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,P,X,X)$ *son las dinaturales asociadas a los end respectivos.*

*Demostración.* Se sabe que para todo $(P,Q)$ la aplicación

$$(P,Q) \mapsto \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,Q,X,X)$$

define un funtor, que se denotará por $\Omega : \mathcal{P}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{P} \to \mathcal{A}$. Las transformaciones

$$\int_{P\in\mathcal{P}} \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,P,X,X) \xrightarrow{\pi_P} \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,P,X,X) \xrightarrow{\lambda_X^{(P,P)}} S(P,P,X,X)$$

son dinaturales. Sea $E \in \mathcal{A}$ un objeto munido de dinaturales $\mu_{(P,X)} : E \to S(P,P,X,X)$. Se debe demostrar que existe un único morfismo $h : E \to \int_{P\in\mathcal{P}} \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,P,X,X)$ tal que $\lambda_X^{(P,P)} \circ \pi_P \circ h = \mu_{(P,X)}$.

Para cada $Q \in \mathcal{P}$ fijo, las transformaciones $\mu_{(Q,X)} : E \to S(Q,Q,X,X)$ son transformaciones dinaturales para el funtor $S(Q,Q,-,-)$. Entonces existe un único morfismo $h^Q : E \to \int_{X\in\mathcal{C}} S(Q,Q,X,X) = \Omega(Q,Q)$ tal que

$$\lambda_X^{(Q,Q)} \circ h^Q = \mu_{(Q,X)}.$$

Si se demostrara que $h^Q$ son transformaciones dinaturales para el funtor $\Omega$, entonces existe un único morfismo $\xi : E \to \int_{P\in\mathcal{P}} \int_{X\in\mathcal{C}} S(P,P,X,X)$ tal que $\pi_P \circ \xi = h^P$ para todo $P \in \mathcal{P}$. Y esto concluye la demostración.

Antes de demostrar que $h^Q$ son transformaciones dinaturales para el funtor $\Omega$, recordar como es este funtor evaluado en morfismos. Si $P, P', Q, Q'$ son objetos en $\mathcal{P}$ entonces existe una transformación natural asociada

$$\beta_{(f,g)} : S(P',Q,-,-) \to S(P,Q',-,-)$$
$$(\beta_{(f,g)})_{(X,Y)} = S(f,g,\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X).$$

Entonces existe un único morfismo $\Omega(f,g) : \Omega(P',Q) \to \Omega(P,Q')$ tal que para todo $X \in \mathcal{C}$ se tiene

$$\lambda_X^{(P,Q')}\Omega(f,g) = S(f,g,\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X)\lambda_X^{(P',Q)}. \tag{4.8}$$

Entonces, si $f : P \to P'$ es un morfismo en $\mathcal{P}$, se tiene que

$$\lambda_X^{(P,P')}\Omega(\mathrm{id}_P, f)h^P = S(\mathrm{id}_P, f, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)\lambda_X^{(P,P)}h^P = S(\mathrm{id}_P, f, \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)\mu_{(P,X)}.$$

Por otro lado

$$\lambda_X^{(P,P')}\Omega(f,\mathrm{id}_{P'})h^{P'} = S(f,\mathrm{id}_{P'},\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X)\lambda_X^{(P',P')}h^{P'} = S(f,\mathrm{id}_{P'},\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X)\mu_{(P',X)}.$$

La dinaturalidad de $\mu$ implica que

$$\lambda_X^{(P,P')}\Omega(\mathrm{id}_P,f)h^P = \lambda_X^{(P,P')}\Omega(f,\mathrm{id}_{P'})h^{P'},$$

de lo cual se deduce que $\Omega(\mathrm{id}_P,f)h^P = \Omega(f,\mathrm{id}_{P'})h^{P'}$. Así $h$ es una transformación dinatural. □

### 4.4. Ejercicios.

1. Calcular el (co)end del funtor $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}$.
2. Sea $S:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{A}$ un funtor. Podemos considerar el funtor $S^{\mathrm{op}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ dado por
$$S^{\mathrm{op}}(X,Y)=S(Y,X).$$
Demostrar que existe un isomorfismo
$$\overline{\int_{X\in\mathcal{C}}} S \simeq \int^{X\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} S^{\mathrm{op}}.$$
3. Sea $F:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\Pi_{i=1}^n\mathcal{A}_i$, donde $\mathcal{A}_i$ es una categoría con objeto inicial y final, para todo $i$. Sean $\pi_i:\Pi_{i=1}^n\mathcal{A}_i\to\mathcal{A}_i$ los funtores de proyección. Mostrar que si $\int^C\pi_i\circ F$ existe para todo $i$, entonces
$$(\int^C\pi_1\circ F,\dots,\int^C\pi_n\circ F)\in\Pi_{i=1}^n\mathcal{A}_i$$
es un coend para $F$.
4. Demostrar que vale la recíproca del Lema 4.5: Si los isomorfismos
$$\int^{A\in\mathcal{C}} S(F(A),A)\simeq\int^{B\in\mathcal{D}} S(B,G(B))$$
son naturales, entonces $F,G$ forman una adjunción.

## 5. Mónadas y Comonadas

En varios resultados se presenta una categoría $\mathcal{C}$ y su categoría de *álgebras* en $\mathcal{C}$ dada por $Alg_{\mathcal{C}}$. Se tiene un funtor de olvido $\mathcal{U}:Alg_{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}$ y un funtor libre $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to Alg_{\mathcal{C}}$. En ciertas situaciones se puede reconstruir la categoría $Alg_{\mathcal{C}}$ a partir de estos dos funtores.

Básicamente una mónada y una comónada, en una categoría $\mathcal{C}$, son un álgebra y una coálgebra en la categoría tensorial de endofuntores $\mathrm{End}(\mathcal{C})$.

**Definición 5.1.** Una *mónada* es una terna $(T,\mu,u)$, donde

- $T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ es un funtor;
- $\mu:T\circ T\to T$, $u:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\to T$ son transformaciones naturales

tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} T\circ T\circ T \arrow[r, "\mu\circ\mathrm{id}_T"] \arrow[d, "\mathrm{id}_T\circ\mu"'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] \\ T\circ T \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "u_T"] \arrow[dr, "="'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] \\ & T, \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T(u)"] \arrow[dr, "="'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] \\ & T. \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Dada una mónada $T$ en $\mathcal{C}$, se define la categoría $\mathcal{C}^T$ de $T$-módulos como la categoría cuyos objetos son pares $(M, s)$, donde $M$ es un objeto de $\mathcal{C}$, $s : T(M) \to M$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que

$$s\circ T(s) = s\circ \mu_M, \quad s\circ u_M = \mathrm{id}_M. \tag{5.4}$$

Si $(M, s), (N, t)$ son dos objetos en $\mathcal{C}^T$, un morfismo en $\mathcal{C}^T$ es $f : (M, s) \to (N, t)$ donde $f : M \to N$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "s"] & T(N) \arrow[d, "t"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N, \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

es conmutativo.

El siguiente ejercicio es una generalización del hecho que si $A$ es un anillo y $M$ es un $A$-módulo con estructura dada por $\rho : A\otimes M \to M$, entonces $\rho$ es un suryectivo. Claramente se deduce de la existencia de la unidad en $A$.

**Ejercicio 5.2.** Si $(X, s) \in \mathcal{C}^T$, demostrar que $s$ es un epimorfismo.

**Lema 5.3.** *Sea $(T, \mu, u)$ una mónada para $\mathcal{C}$. El funtor de olvido $\mathcal{U} : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$, $\mathcal{U}(M, s) = M$ posee un adjunto a izquierda dado por el funtor libre $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$, $\mathcal{L}(M) = (T(M), \mu_M)$. Además $\mathcal{U}$ es fiel.*

*Demostración.* Es inmediato verificar que $\mathcal{L}(M) = (T(M), \mu_M)$ es un objeto en $\mathcal{C}^T$. En efecto, la ecuación (5.4) se deduce de (5.1). Ahora se quiere ver que $(\mathcal{L}, \mathcal{U})$ es una adjunción. Si $(M, s) \in \mathcal{C}^T$ y $X \in \mathcal{C}$, se define

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^T}(\mathcal{L}(X), (M, s)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{U}(M, s)),$$

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{U}(M, s)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^T}(\mathcal{L}(X), (M, s))$$

como

$$\phi(f) = f \circ u_X, \quad \psi(g) = s \circ T(g).$$

Se quiere ver que estas funciones determinan un isomorfismo. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^T}(\mathcal{L}(X), (M, s))$, entonces

$$\psi(\phi(f)) = s \circ T(f) \circ T(u) = f \circ \mu_X \circ T(u) = f.$$

La segunda igualdad se debe a que $f$ es un morfismo de $T$-módulos, y la tercera igualdad sigue de (5.3). Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{U}(M, s))$ entonces

$$\phi(\psi(g)) = s \circ T(g) \circ u_X = s \circ u_M \circ g = g.$$

La segunda igualdad es por la naturalidad de $u$ y la tercera se debe a (5.4). $\square$

Una comónada es la versión dual de una mónada. Más precisamente, una comónada en $\mathcal{C}$ es una mónada en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Queda como ejercicio completar la siguiente definición.

**Definición 5.4.** Una *comónada* en una categoría $\mathcal{C}$ es una terna $(U, \Delta, \epsilon)$, donde

- $U : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor;
- $\Delta : U \to U \circ U$, $\epsilon : U \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ son transformaciones naturales

tales que satisfacen ciertos axiomas.

Si $(U, \Delta, \epsilon) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es una comónada, entonces se puede definir la categoría $\mathcal{C}_U$ de comódulos sobre $U$ de la siguiente forma. Un objeto de $\mathcal{C}_U$ es un par $(X, t)$ donde $X \in \mathcal{C}$ y $t : X \to U(X)$ es un morfismo tal que

$$U(t) \circ t = \Delta_X \circ t, \quad \epsilon_X \circ t = \mathrm{id}_X. \tag{5.6}$$

**5.1. Algunos ejemplos.** Toda álgebra asociativa $A$ da lugar a una mónada en $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$. Se define $T_A : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$, $T_A(V) = A \otimes_{\Bbbk} V$. El producto de la mónada $\mu : T_A \circ T_A \to T_A$ está dado como sigue. Si $V$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial, entonces

$$\mu_V : A \otimes_{\Bbbk} A \otimes_{\Bbbk} V \to A \otimes_{\Bbbk} V,$$

$$\mu_V(a \otimes b \otimes v) = ab \otimes v,$$

para todo $v \in V$, $a, b \in A$.

**Ejercicio 5.5.** Demostrar que existe una equivalencia de categorías $(\mathrm{vect}_{\Bbbk})^{T_A} \simeq {}_A\mathrm{mod}$.

Existen ejemplos que no provienen de álgebras asociativas. Si $\Bbbk$ es un cuerpo, $G$ es un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to \Bbbk^\times$ es un 3-cociclo normalizado, es decir que

$$\omega(g,h,f)\omega(g,hf,l)\omega(h,f,l) = \omega(gh,f,l)\omega(g,h,fl),$$

para todo $g,h,f,l \in G$. Sean $F \subseteq G$ un subgrupo y $\psi : F \times F \to \Bbbk^\times$ una función tal que $\psi(g,1) = 1 = \psi(1,g)$, para todo $g \in F$, y tal que

$$d\psi\ \omega|_{F\times F\times F} = 1.$$

Se define $T : \operatorname{vect}^G \to \operatorname{vect}^G$ como sigue. Recordar que $\operatorname{vect}^G$ es la categoría de espacios vectoriales $G$-graduados. Para todo $V \in \operatorname{vect}^G$, $T(V) = \Bbbk F \otimes_\Bbbk V$. Para todo $V \in \operatorname{vect}^G$ se define el producto

$$\mu_V : \Bbbk F \otimes_\Bbbk \Bbbk F \otimes_\Bbbk V \to \Bbbk F \otimes_\Bbbk V,$$
$$\mu_V(f \otimes g \otimes v) = \psi(f,g)\omega(f,g,l) fg \otimes v,$$

para todo $v \in V_l$, $f,g \in F$, $l \in G$. La unidad $u_V : V \to \Bbbk F \otimes_\Bbbk V$ se define por $u_V(v) = 1 \otimes v$.

Este ejemplo no se construye a partir de álgebras asociativas. Sin embargo, puede entenderse como una mónada que es el producto tensorial con un álgebra en una cierta categoría tensorial.

**5.2. (Co)Mónadas y módulos de Yetter-Drinfeld.** En esta sección se verán ejemplos de mónadas y comónadas construidas a partir de ciertos ends. Resulta que los comódulos sobre dicha comónada es equivalente a la categoría $\mathcal{YD}(G)$ de módulos de Yetter-Drinfeld sobre un grupo finito $G$.

Sean $G$ un grupo finito y $\Bbbk$ un cuerpo. Para cada objeto $V \in \operatorname{Rep}(\Bbbk G) = \mathcal{C}$ se tiene un funtor

$$S_V : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C},$$
$$S_V(X,Y) = X^* \otimes_\Bbbk V \otimes_\Bbbk Y.$$

Entonces se puede definir un endofuntor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$:

$$V \mapsto T(V) = \int_{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes_\Bbbk V \otimes_\Bbbk X.$$

Se van a denotar por

$$\pi_X^V : T(V) \ddot{\to} X^* \otimes_\Bbbk V \otimes_\Bbbk X$$

a las transformaciones dinaturales asociadas a este end. Notar que si $f : V \to W$ es un morfismo en $\operatorname{Rep}(\Bbbk G)$, entonces $T(f)$ es el único morfismo tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\pi_X^V"] & T(W) \arrow[d, "\pi_X^W"] \\ X^* \otimes_\Bbbk V \otimes_\Bbbk X \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f \otimes \mathrm{id}"'] & X^* \otimes_\Bbbk W \otimes_\Bbbk X \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

es conmutativo.

**Proposición 5.6.** *Existen morfismos naturales* $\delta_V : T(V) \to T(V)^2$, $\epsilon_V : T(V) \to V$ *que hacen de* $T$ *una comónada sobre* $\operatorname{Rep}(\Bbbk G)$.

*Demostración.* Sea $\mathcal{C} = \operatorname{Rep}(\Bbbk G)$, y denotamos $\otimes = \otimes_{\Bbbk}$. Si $X \in \mathcal{C}$, se puede definir $\epsilon^V : T(V) \to V$, como $\epsilon^V = \pi^V_{\Bbbk}$. Para la comultiplicación, notemos que

$$T^2(V) = \int_Y Y^*\otimes T(V)\otimes Y = \int_Y Y^*\otimes\Big(\int_X X^*\otimes V\otimes X\Big)\otimes Y.$$

Dado $Y \in \mathcal{C}$, sabemos que el funtor $Y^*\otimes - \otimes Y : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tiene un adjunto a izquierda. Se sigue del Teorema 4.4 (ii) que

$$Y^*\otimes\Big(\int_X X^*\otimes V\otimes X\Big)\otimes Y \simeq \int_X Y^*\otimes X^*\otimes V\otimes X\otimes Y. \tag{5.8}$$

Más aún, los isomorfismos son naturales en $Y$ y dicho Teorema dice que podemos considerar las transformaciones dinaturales para el lado derecho como $\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_Y$.
Tomando el coend para $Y$ en (5.8) y usando el Teorema 4.14, obtenemos un isomorfismo

$$\int_{(X,Y)} Y^*\otimes X^*\otimes V\otimes X\otimes Y \simeq \int_Y\int_X Y^*\otimes X^*\otimes V\otimes X\otimes Y \simeq \int_Y Y^*\otimes\Big(\int_X X^*\otimes V\otimes X\Big)\otimes Y = T^2(V),$$

y por lo tanto elegimos como transformaciones dinaturales $(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_Y)\pi^{T(V)}_Y : T^2(V) \to Y^*\otimes X^*\otimes V\otimes X\otimes Y$. Notar que, dado $V$, los morfismos

$$\pi_{X\otimes Y} : T(V) \to Y^*\otimes X^*\otimes V\otimes X\otimes Y,$$

forman una transformación dinatural. Luego, existe un único $\delta_V : T(V) \to T^2(V)$ tal que

$$(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_Y)\pi^{T(V)}_Y\delta_V = \pi^V_{X\otimes Y}.$$

Es un chequeo inmediato ver que $\delta$ forma una transformación natural. Chequeamos el axioma de comónada $\delta_{T(V)}\circ\delta_V = T(\delta_V)\circ\delta_V$ post-componiendo con $(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_Y)\pi^{T(V)}_Y\otimes\mathrm{id}_Z)\pi^{T^2(V)}_Z$ para obtener

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_Y)\pi^{T(V)}_Y\otimes\mathrm{id}_Z)\pi^{T^2(V)}_Z[\delta_{T(V)}\delta_V] =& (\mathrm{id}_{Z^*\otimes Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_{Y\otimes Z})\pi^{T(V)}_{Y\otimes Z}\delta_V\\ =& \pi_{X\otimes Y\otimes Z},\end{aligned}$$

donde aplicamos dos veces la definición de $\delta$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_Y)\pi^{T(V)}_Y\otimes\mathrm{id}_Z)\pi^{T^2(V)}_Z[T(\delta_V)\delta_V] =\\ (\mathrm{id}_{Z^*}\otimes(\mathrm{id}_{Y^*}\otimes\pi^V_X\otimes\mathrm{id}_Y)\pi^{T(V)}_Y\otimes\mathrm{id}_Z)(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes\delta_V\otimes\mathrm{id}_Z)\pi^{T(V)}_Z\delta_V =\\ (\mathrm{id}_{Z^*}\otimes\pi^V_{X\otimes Y}\otimes\mathrm{id}_Z)\pi^{T(V)}_Z\delta_V =\\ \pi^V_{X\otimes Y\otimes Z}.\end{aligned}$$

La primera igualdad vale por la definición de $T(\delta_V)$, y la segunda y tercera valen por respectivas aplicaciones de $\delta$. Cancelando los monomorfismos correspondientes obtenemos la igualdad deseada. Las ecuaciones $T(\epsilon_V) \circ \delta_V = \mathrm{id}_{T(V)} = \epsilon_{T(V)} \circ \delta_V$ se demuestran con un argumento similar.

□

Recordar la categoría $\mathcal{YD}(G)$ de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $G$, presentada en la Sección 1.1. La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [27].

**Proposición 5.7.** *Existe una equivalencia de categorías*

$$\mathrm{Rep}\,(\Bbbk G)^T \simeq \mathcal{YD}(G).$$

□

***Observación*** 5.8. La comónada anterior se denomina la **comónada central de Hopf** de $\mathrm{Rep}\,(G)$. Los resultados anteriores pueden ser generalizados para cualquier álgebra de Hopf de dimensión finita, es decir se construye una comónada $T : \mathrm{Rep}\,(H) \to \mathrm{Rep}\,(H)$ y se prueba $\mathrm{Rep}\,(H)^T \simeq \mathrm{Rep}\,(D(H))$, donde $D(H)$ es el doble de Drinfeld de $H$.
Sobre una categoría tensorial finita $\mathcal{C}$, la comónada de Hopf provee una equivalencia $\mathcal{C}^T \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{C})$, donde esta última categoría es el *Centro de Drinfeld de* $\mathcal{C}$.
La comónada central es, en efecto, una *mónada de Hopf*. Esta estructura extra en la mónada le confiere a $\mathrm{Rep}\,(G)^T$ una estructura monoidal tal que la equivalencia de la Proposición 5.7 es una equivalencia tensorial.

**5.3. Mónadas que provienen de adjunciones.** Sea $(F, G)$ una adjunción, donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Sean $u : \mathrm{Id} \to G \circ F$, $c : F \circ G \to \mathrm{Id}$ la unidad y counidad de la adjunción. Se define $T = G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Al funtor $T$ le daremos estructura de mónada de la siguiente forma.

El producto $\mu : T \circ T \to T$ está dado por

$$\mu_X = G(c_{F(X)}) : G(F(G(F(X)))) \to G(F(X)).$$

La unidad de la mónada está dada por $u$.
Análogamente, $S = F \circ G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ es una comónada con $\delta_Y = F(c_{G(Y)})$ y counidad $c$.

**Lema 5.9.** *$(T, \mu, \eta)$ es una mónada.*

La mónada del Lema anterior se denomina la *mónada asociada a la adjunción* $(F, G)$.

**Teorema 5.10.** *Sea $(F, G) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una adjunción y $T = G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la mónada asociada a la adjunción. Entonces existe un único funtor $K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_T$ tal que*

$$\mathcal{U} \circ K = G, \quad K \circ F = \mathcal{L}. \tag{5.9}$$

*Aquí $\mathcal{U} : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ es el funtor de olvido y $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$ el funtor libre.*

*Demostración.* Sean $u$ y $c$ la unidad y counidad de la adjunción, respectivamente. Se va a definir $K(X) = (G(X), s^X)$, donde $s^X : T(G(X)) \to G(X)$ es $s^X = G(c_X)$, para todo $X \in \mathcal{D}$. Además, $K(f) = G(f)$ para todo morfismo $f$ en $\mathcal{D}$. $K(X)$ es un objeto en $\mathcal{C}^T$; la ecuación (5.4) se sigue de la naturalidad de $c$.

Por definfición de $K$, las igualdades (5.9) son inmediatas. Debemos demostrar que la estructura de $T$-módulo de $K(X)$ queda únivocamente determinada. Se tiene un diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{K} & \mathcal{C}^T \\ {\scriptstyle G}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{U}} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{K} & \mathcal{C}^T. \end{array}$$

Como las adjunciones $(F, G)$ y $(\mathcal{L},\mathcal{U})$ tienen la misma unidad, por el Ejercicio 2.22 se tiene que, si $c'$ es la counidad de la adjunción $(\mathcal{L},\mathcal{U})$, entonces

$$K(c_X) = c'_{K(X)}.$$

Se asume entonces que $K(X) = (G(X), h)$, donde $h : T(G(X)) \to G(X)$ es la estructura de $T$-módulo. Por definición de la counidad de $(\mathcal{L},\mathcal{U})$ se sabe que $c'_{(G(X),h)} = h$, pero por otro lado $c'_{(G(X),h)} = K(c_X) = G(c_X)$. Luego, $h = G(c_X)$. □

**Definición 5.11.** Si el funtor de *comparación* $K$ dado en el Teorema 5.10 es una equivalencia, se dice que la adjunción $(F, G)$ es *mónadica.*

**Ejercicio 5.12.** Sea $\mathcal{U}$ : Top $\to$ *Set* el funtor de olvido. Demostrar que el funtor $\mathcal{F}$ : *Set* $\to$ Top , $\mathcal{F}(X) = X$ con la topología discreta es un adjunto a derecha. Observar que $T = \mathcal{U} \circ \mathcal{F}$ : *Set* $\to$ *Set* es la identidad y, por lo tanto, $Set^T = Set$. Así la adjunción $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ **no** es monádica.

El siguiente resultado indica cuando una adjunción es monádica. Para ello, se necesitan antes algunas definiciones.

**Definición 5.13.** Si $f, g : X \to Y$ son morfismos, un *split coecualizador* del par $f, g$ es una terna $(e, t, s)$ donde $e : Y \to Z$ es tal que

$$e \circ f = e \circ g,$$

y $s : Z \to Y$, $t : Y \to X$ satisfacen

$$e \circ s = \mathrm{id}_Z, \quad s \circ e = g \circ t, \quad f \circ t = \mathrm{id}_Y.$$

Un *coecualizador absoluto* del par $f, g$ es un coecualizador que es preservado por cualquier funtor; es decir que si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor, $f, g : X \to Y$ morfismos en $\mathcal{A}$ con coecualizador $e : Y \to Z$, entonces $F(e)$ es un coecualizador de $F(f)$ y $F(g)$.

Observar que un split coecualizador es un coecualizador. En efecto, asumir que $f, g : X \to Y$ son morfismos y $e : Y \to Z$ un split coecualizador. Sea $h : Y \to Z'$ otro morfismo tal que $h \circ f = h \circ g$. Entonces el morfismo $h \circ s : Z \to Z'$ satisface que

$$h \circ s \circ e = h \circ g \circ t = h \circ f \circ t = h.$$

**Ejemplo 5.14.** Sea $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una mónada con producto $\mu : T^2 \to T$ y unidad $u : \mathrm{Id} \to T$. Si $(X, s)$ es un objeto en $\mathcal{C}^T$, entonces el morfismo $s : T(X) \to X$ es un split coecualizador del par $T(s), \mu_X$.

La siguiente definición va a ser requerida para el próximo teorema.

**Definición 5.15.** Se dice que un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *crea coecualizadores* para el par de morfismos $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{A}$, si para todo coecualizador $q : F(Y) \to Z$ de $F(f), F(g)$ existe un único objeto $U \in \mathcal{A}$ y un único morfismo $\phi : Y \to U$ tal que

- $\phi$ resulta el coecualizador del par $f, g$;
- existe un isomorfismo $\psi : F(U) \to Z$ tal que $\psi F(\phi) = q$.

**Teorema 5.16** (de monadicidad de Beck)**.** *Sea $(F, G) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una adjunción con unidad $u : \mathrm{Id} \to G \circ F$, counidad $c : F \circ G \to \mathrm{Id}$. Sea $T = G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la mónada asociada a la adjunción con producto $\mu : T^2 \to T$. Son equivalentes:*

1. *La adjunción $(F, G)$ es monádica, es decir, el funtor de comparación $K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ es una equivalencia de categorías.*
2. *El funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ crea coecualizadores para todo par de morfismos $f, g$ para los cuales $G(f)$ y $G(g)$ poseen un coecualizador absoluto.*
3. *El funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ crea coecualizadores para todo par de morfismos $f, g$ para los cuales $G(f)$ y $G(g)$ poseen un split coecualizador.*

*Demostración.* (2) $\Longrightarrow$ (3). Es inmediato ya que todo split coecualizador es un coecualizador absoluto.

Se va a ver que (1) $\Longrightarrow$ (2). Como $K$ es una equivalencia, se va a identificar al funtor $G$ con el funtor de olvido $\mathcal{U} : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ y a $F$ con el funtor libre $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$. Sean $d_0, d_1 : (X, s) \to (Y, t)$ morfismos en $\mathcal{C}^T$ tales que $d_0, d_1 : X \to Y$ poseen un coecualizador absoluto $e : Y \to Z$. Para ver que $\mathcal{U}$ crea un coecualizador lo único que se debe demostrar es que existe un morfismo $m : T(Z) \to Z$ tal que $(Z, m) \in \mathcal{C}^T$, que $e : (Y, t) \to (Z, m)$ es un morfismo en $\mathcal{C}^T$ y que este es el coecualizador de $d_0, d_1$ en $\mathcal{C}^T$.

Como $d_0, d_1$ son morfismos en $\mathcal{C}^T$, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "T(d_i)"] \arrow[d, "s"'] & T(Y) \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "d_i"'] & Y, \end{tikzcd}$$

conmuta, para $i = 0, 1$. Entonces

$$e \circ t \circ T(d_0) = e \circ t \circ T(d_1).$$

Como $e$ es un coecualizador absoluto, $T(e)$ es el coecualizador del par $T(d_0), T(d_1)$. Entonces existe un morfismo $m : T(Z) \to Z$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, "T(e)"] \arrow[d, "t"'] & T(Z) \arrow[d, "m"] \\ Y \arrow[r, "e"'] & Z \end{tikzcd} \tag{5.10}$$

es conmutativo. Luego,

$$T(m)T^2(e) = T(e)T(t). \tag{5.11}$$

Se deduce entonces que

$$\begin{aligned} mT(m)T^2(e) &= mT(e)T(t) = etT(t) = et\mu_Y \\ &= mT(e)\mu_Y = m\mu_Z T^2(e). \end{aligned}$$

La primera igualdad es (5.11), la segunda se debe al diagrama (5.10), la tercera igualdad se debe a que $(Y,t) \in \mathcal{C}^T$, la cuarta nuevamente por el diagrama (5.10), y la quinta igualdad por la naturalidad de $\mu$. Como $e$ es un coecualizador absoluto, entonces $T^2(e)$ es un coecualizador y, por lo tanto, un epimorfismo. Luego, $mT(m) = m\mu_Z$. Así, $(Z,m) \in \mathcal{C}^T$ y, por construcción, $e : (Y,t) \to (Z,m)$ es un morfismo en $\mathcal{C}^T$. Falta ver que $e$ es el coecualizador en $\mathcal{C}^T$.

Sea $f : (Y,t) \to (U,r)$ un morfismo en $\mathcal{C}^T$ tal que $fd_0 = fd_1$. Como $e$ es un coecualizador en $\mathcal{C}$ entonces existe un morfismo $f' : Z \to U$ en $\mathcal{C}$ tal que $f = f'e$. Se tiene que comprobar que $f'$ es un morfismo en $\mathcal{C}^T$. Para ello, se debe comprobar que $f'm = rT(f')$. Como $T(e)$ es un epimorfismo, basta con verificar que

$$f'mT(e) = rT(f')T(e). \tag{5.12}$$

El lado izquierdo de (5.12) es entonces igual a

$$f'mT(e) = f'et = ft = rT(f).$$

La primera igualdad es por el diagrama (5.10), la segunda igualdad se debe a que $f = f'e$, y la tercera sigue de que $f$ es morfismo en $\mathcal{C}^T$. El lado derecho de (5.12) es igual a

$$rT(f')T(e) = rT(f'e) = rT(f).$$

Ahora se va a ver que (3) $\implies$ (1). Para completar la demostración se debe construir un funtor $\overline{K} : \mathcal{C}^T \to \mathcal{D}$ equipado de isomorfismos naturales

$$K \circ \overline{K} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^T}, \quad \overline{K} \circ K \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Sea $(X,s)$ un objeto en $\mathcal{C}^T$. Por el Ejemplo 5.14, los morfismos

$$GF(s), G(c_{F(X)}) : GFGF(X) \to GF(X),$$

tienen a $s : GF(X) \to X$ como un split coecualizador. Entonces, como $G$ crea coecualizadores, existe un objeto $\overline{K}(X,s) \in \mathcal{D}$ equipado de un único morfismo

$$\phi_X : F(X) \to \overline{K}(X,s),$$

que es el coecualizador de $F(s)$ y $c_{F(X)}$. Además, existe un isomorfismo

$$\psi_X : G(\overline{K}(X,s)) \to X,$$

tal que $\psi_X G(\phi_X) = s$. Ver la Definición 5.15. Ahora se debe definir $\overline{K}$ sobre morfismos. Sea $f : (X,s) \to (Y,t)$ un morfismo en $\mathcal{C}^T$. Esto implica que $fs = tGF(f)$, de lo cual se deduce que

$$F(f)F(s) = F(t)FGF(f). \tag{5.13}$$

Si $\phi_Y : F(Y) \to \overline{K}(Y,t)$ es el coecualizador construido anteriormente, entonces

$$\phi_Y F(t) = \phi_Y c_{F(Y)}.$$

Lo cual implica que

$$\phi_Y F(t) FGF(f) = \phi_Y c_{F(Y)} FGF(f),$$

y, como consecuencia,

$$\phi_Y F(f) F(s) = \phi_Y F(t) FGF(f) = \phi_Y c_{F(Y)} FGF(f) = \phi_Y F(f) c_{F(X)}.$$

La primera igualdad es (5.13) y la tercera es la naturalidad de $c$. Por la propiedad universal del coecualizador, esto implica que existe un morfismo $\overline{K}(f) : \overline{K}(X,s) \to \overline{K}(Y,t)$ tal que

$$\overline{K}(f)\phi_X = \phi_Y F(f).$$

Queda como ejercicio comprobar que esta forma de asignar $f \mapsto \overline{K}(f)$ es funtorial.

Los isomorfismos $\psi_X : G(\overline{K}(X,s)) \to X$ son los que darán la equivalencia $K \circ \overline{K} \simeq \mathrm{Id}$. Primero se va a ver que en efecto son morfismos en $\mathcal{C}^T$ y que son naturales. Si $(X,s) \in \mathcal{C}^T$ entonces

$$\begin{aligned}
[\psi_X G(c_{\overline{K}(X,s)})] GFG(\phi_X) = \psi_X G(c_{\overline{K}(X,s)} FG(\phi_X)) = \psi_X G(\phi_X c_{F(X)}) &= sG(c_{F(X)}) \\
&= sGF(s) \\
&= sGF(\psi_X G(\phi_X)) \\
&= [sGF(\psi_X)] GFG(\phi_X).
\end{aligned}$$

Donde usamos naturalidad de $c$, definición de $\psi_X$, la propiedad de coecualizador de $s$ y nuevamente la definición de $\psi_X$. Como $s$ es un epimorfismo entonces $G(\phi_X)$ es epimorfismo y, por lo tanto, $GFG(\phi_X)$ es también un epimorfismo. Luego se deduce que

$$\psi_X G(c_{\overline{K}(X,s)}) = sGF(\psi_X),$$

lo cual comprueba que $\psi_X$ son mofismos en la categoría $\mathcal{C}^T$. La naturalidad de $\psi$ queda como ejercicio.

Ahora se va a ver que existen isomorfismos $\overline{K} \circ K \simeq \mathrm{Id}$. Sea $D \in \mathcal{D}$. Primero se observa que $G(c_D)$ es un split coecualizador del par $GFG(c_D)$, $G(c_{FG(D)})$. Entonces, como $G$ crea coecualizadores, debe ser que $c_D$ es un coecualizador del par $FG(c_D), c_{FG(D)}$. Luego, existe un único isomorfismo entre $D \simeq \overline{K}(G(D))$, lo cual implica que $\overline{K} \circ K \simeq \mathrm{Id}$. □

### 5.4. Ejercicios.

1. Sea $R$ un anillo con unidad y $\mathcal{U} : {}_R\mathrm{Mod} \to \mathrm{Set}$ el funtor de olvido. Este funtor tiene un adjunto a izquierdo y esta adjunción define una mónada $T_R : Set \to Set$.
   (a) Demostrar que $T_R(X) = \{f : X \to R : f \text{ es } \neq 0 \text{ en finitos } x \in X\}$.
   (b) Se tiene una equivalencia de categorías $Set^{T_R} \simeq {}_R\mathrm{Mod}$.

## 6. Categorías Abelianas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Para comenzar se introducirá la noción de categoría aditivia para luego llegar a la noción de categoría abeliana.

**Definición 6.1.** Un objecto $Z \in \mathcal{C}$ se llama un *objeto cero* u *objeto nulo* si es un objeto inicial y terminal, es decir, si para todo $X \in \mathcal{C}$ existen únicos morfismos $\phi_X : X \to Z$, $\psi_X : Z \to X$. Esto es si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\psi_X\}$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

Observar que si $Z$ es un objeto cero entonces $\phi_Z = \psi_Z = \mathrm{id}_Z$. Además, $\psi_X$ es un monomorfismo y $\phi_X$ es un epimorfismo. En particular, el objeto nulo es subobjeto de todo objeto.

**Lema 6.2.** *Si $\mathcal{C}$ posee un objeto cero, este es único salvo isomorfismo.*

*Demostración.* Sean $Z, Z'$ dos objetos ceros de $\mathcal{C}$. Entonces, usando el hecho de que $Z'$ es objeto cero, existen morfismos $\phi_Z : Z \to Z'$, $\psi_Z : Z' \to Z$. Luego, el morfismo $\phi_Z \circ \psi_Z : Z' \to Z'$ debe ser la identidad $\mathrm{id}'_Z$. Análogamente se demuestra que $\psi_Z \circ \phi_Z = \mathrm{id}_Z$. □

**Definición 6.3.** Un objeto $X$ en una categoría $\mathcal{C}$ con objeto nulo se dice *simple* si los únicos subojetos son el nulo y $X$.

**Ejemplo 6.4.** En la categoría Grp el grupo trivial $1 = \{1\}$ es un objeto cero.

**Ejercicio 6.5.** Demostrar que la categoría Set no posee objetos cero.

**Ejercicio 6.6.** Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una equivalencia de categorías. Si $Z$ es un objeto cero de $\mathcal{C}$ entonces $F(Z)$ es un objeto cero de $\mathcal{D}$.

**Definición 6.7.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero $Z$. Para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ se define $0_Y^X : X \to Y$ al morfismo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "0_Y^X"] & \\ Z \arrow[rr, "\psi_Y"] & & Y. \end{tikzcd}$$

El morfismo $0_Y^X$ se llama el *morfismo nulo*. A veces simplemente se lo denotará por $0 : X \to Y$.

**Ejercicio 6.8.** Demostrar que el morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ no depende del objeto cero $Z$ de la categoría.

**Proposición 6.9.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.*

$$f \circ 0_B^A = 0_C^A, \quad 0_D^C \circ f = 0_D^B.$$

□

**6.1. Núcleos y conúcleos.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

**Definición 6.10.** Un *núcleo de un morfismo* es el ecualizador entre el morfismo y el morfismo nulo. Es decir, el núcleo de $f$ es un par $(K, k)$ donde $K = \mathrm{Ker}\, f \in Ob(\mathcal{C})$ es un objeto y $k : K \to X$ un morfismo tal que $f \circ k = 0_Y^K$. Además, es universal con respecto a esta propiedad; es decir que si $(K', k')$ es otro par donde $K' \in Ob(\mathcal{C})$ y $k' : K' \to X$ es otro morfismo tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, entonces existe un único morfismo $u : K' \to \mathrm{Ker}\, f$ tal que $k \circ u = k'$.

**Ejercicio 6.11.** Demostrar que si existe el núcleo de un morfismo, este es único salvo isomorfismo.

**Lema 6.12.** *Sea $f : X \to Y$ un morfismo y $k : \mathrm{Ker}\, f \to X$ un núcleo. Entonces $k$ es un monomorfismo.*

*Demostración.* Sean $g, h : U \to \mathrm{Ker}\, f$ morfismos tales que $kg = kh$. Entonces $f \circ (kh) = 0_Y^K \circ h = 0_Y^U$. Por la definición de núcleo, existe un morfismo $u : U \to \mathrm{Ker}\, f$ tal que $ku = kh$. Como $kg = kh$, la unicidad implica que $u = g = h$.

□

**Definición 6.13.** Un *conúcleo* de un morfismo es el coecualizador entre el morfismo y el morfismo nulo. Es decir, el conúcleo de $f$ es un par $(Q, q)$ donde $Q = \mathrm{coKer}\, f \in Ob(\mathcal{C})$ y $q : Y \to Q$ es un morfismo tal que $q \circ f = 0$, y es universal con respecto a esta propiedad. Es decir, que si $(Q', q')$ es otro par donde $Q' \in Ob(\mathcal{C})$ y $q' : Y \to Q$ es otro morfismo tal que $q' \circ f = 0$ entonces existe un único morfismo $u : \mathrm{coKer}\, f \to Q$ tal que $q' = u \circ q$.

**Ejercicio 6.14.** Demostrar que el conúcleo de un morfismo es único salvo isomorfismo y que, además, es un epimorfismo.

**Ejercicio 6.15.** Dados $X, Y$ objetos. Calcular $\mathrm{Ker}\, 0_X^Y$ y $\mathrm{coKer}\, 0_X^Y$. Demostrar que un morfismo es un monomorfismo (respectivamente un epimorfismo) si y solo si su núcleo (respectivamente conúcleo) es cero.

**Ejercicio 6.16.** Sea $R$ un anillo y $M, N$ dos $R$-módulos a izquierda. Si $f : M \to N$ es un morfismo de $R$-módulos, demostrar que $\mathrm{Ker}\, f = \{m \in M : f(m) = 0\}$ y $\mathrm{coKer}\, f = N/Im(f)$.

**Definición 6.17.** Sea $\iota : X \to Y$ un monomorfismo. Demostrar que si el conúcleo de $\iota$ existe, este no depende de la clase de equivalencia de $X$ como subobjeto de $Y$. En particular, si $X \subseteq Y$ es un subobjeto, se puede definir $Y/X$ como el conúcleo de $\iota$.

**Ejercicio 6.18.** Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad y $N \in \mathbb{N}$, $2 \leq N$. Decidir si las categorías $\mathfrak{C}hain(R)$ y $\mathfrak{C}hain_N(R)$ poseen objetos nulos, núcleos y conúcleos.

**Definición 6.19.** Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *aditiva* si

- $\mathcal{C}$ posee un objeto cero;
- para cada par de objetos $X, Y$ de $\mathcal{C}$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un grupo abeliano;

- la composición de morfismos es bilineal, es decir que para todo $f, f' : X \to Y$, $g, g' : Y \to Z$ se tiene que
$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f', \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$
- Para todo par de objetos de $\mathcal{C}$, existe el producto entre ellos.

***Observación*** 6.20. En una categoría aditiva, el producto de dos objetos $X_1, X_2$ es además un coproducto. Más aún, es una *suma directa*. Es decir, una colección $(Z, p_1, p_2, i_1, i_2)$ tal que

- $p_j : Z \to X_i$, $i_j : X_j \to Z$, $j = 1, 2$ son morfismos;
- se satisface que
$$p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_{X_1}, \quad p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_{X_2}, \quad i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{id}_Z.$$

Si tomamos $Z = X_1 \times X_2$, como $Z$ es un producto y se tienen morfismos $\mathrm{id} : X_1 \to X_1$, $0 : X_1 \to X_2$, entonces existe $\iota_1 : X_1 \to Z$. El morfismo $\iota_2$ se define de forma similar, y los axiomas de suma directa se satisfacen.
En una categoría aditiva, se denota el producto de $X, Y$ como $X \oplus Y$.

**Definición 6.21.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *aditivo* si para todo par de morfismos $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ se tiene que
$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

**Ejercicio 6.22.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo. Entonces para $X, Y \in \mathcal{C}$ se cumple
$$F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y).$$
Deducir que si $I$ es un conjunto finito y $X_i$ son objetos en $\mathcal{C}$ para todo $i \in I$, entonces $F(\oplus_{i \in I} X_i) \simeq \oplus_{i \in I} F(X_i)$.

**Ejemplo 6.23.**
1. Dado un anillo $R$, las categorías ${}_R\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Mod}_\mathrm{R}$ y ${}_R\mathrm{Mod}_\mathrm{R}$ son aditivas.
2. La categoría $Ab$ es aditiva.
3. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías, donde $\mathcal{D}$ es aditiva, entonces la categoría $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una categoría aditiva. En efecto, el objeto nulo es el funtor $\mathbf{0} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $\mathbf{0}(X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$. Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores, el conjunto $\mathrm{Nat}\,(F, G)$ es un grupo abeliano con la suma definida punto a punto: Si $\eta, \mu \in \mathrm{Nat}\,(F, G)$ entonces $(\eta + \mu)_X = \eta_X + \mu_X$ para todo $X \in \mathcal{C}$.
4. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías aditivas entonces $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es aditiva.

**Ejercicio 6.24.** Si $R$ es un anillo conmutativo y $2 \leq N \in \mathbb{N}$, demostrar que las categorías $\mathfrak{C}hain(R)$, $\mathfrak{C}hain_N(R)$ son aditivas.

**Ejercicio 6.25.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y sea $\mathcal{D}$ una subcategoría plena aditiva de $\mathcal{C}$. Para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ se denota por $\mathcal{D}(X, Y)$ al conjunto de morfismos $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ tales que existe $Z \in \mathcal{D}$ y morfismos $g : X \to Z, h : Z \to Y$ tal que $f = h \circ g$.

1. Demostrar que $\mathcal{D}(X, Y)$ es un subgrupo de $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$.

2. Se define la categoría $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ cuyos objetos son los mismos objetos de $\mathcal{C}$. Para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ se define el espacio de morfismos
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{D}(X,Y).$$
Demostrar que $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ está bien definida y que es una categoría aditiva.

Ahora se va a definir el concepto principal de esta sección: *las categorías abelianas.*

Las categorías Abelianas fueron introducidas por Alexander Grothendieck en 1957 con la intención de unificar la teoría de cohomología de sheaves y la teoría de cohomología de grupos. Las propiedades deseables de las categorías abelianas permitieron amplias aplicaciones a geometría algebraica y álgebra homológica. Dos años antes habían sido definidas de manera independiente por David Buchsbaum con el nombre de *categorías exactas.*

**Definición 6.26.** Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *abeliana* si:

- $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva;
- todo morfismo en $\mathcal{C}$ posee núcleos y conúcleos;
- todo monomorfismo es el núcleo de algún morfismo y todo epimorfismo es el conúcleo ded algún morfismo.

Algunos ejemplos de categorías abelianas son:

1. La categoría $Ab$ de grupos abelianos.
2. Si $R$ es un anillo entonces las categorías ${}_R\mathrm{Mod}, \mathrm{Mod}_\mathrm{R}, {}_\mathrm{R}\mathrm{mod}, \mathrm{mod}_\mathrm{R}$ son Abelianas.
3. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías Abelianas entonces $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ y $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ son Abelianas.
4. Si $R$ es un anillo conmutativo y $2 \leq N \in \mathbb{N}$, entonces las categorías $\mathfrak{C}hain(R)$ y $\mathfrak{C}hain_N(R)$ son Abelianas.

La demostración de que las categorías mencionadas anteriormente son Abelianas queda como ejercicio.

**Lema 6.27.** *Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana entonces la categoría* $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ *es Abeliana.*

***Observación*** 6.28*.* De ahora en más, si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías Abelianas, se denotará a $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ como $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$.

**Lema 6.29.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana. Todo epimorfismo en $\mathcal{C}$ es el conúcleo de su núcleo. Dualmente, todo monomorfismo en $\mathcal{C}$ es el núcleo de su conúcleo.*

*Demostración.* Sea $f : X \to Y$ un monomorfismo y $p : Y \to \mathrm{coKer}\, f \to X$ su núcleo. Por los axiomas de categoría Abeliana existe un morfismo $g : Y \to Z$ tal que $f = \ker g$. Como $g \circ f = 0$, por la universalidad de $k$, se tiene que existe un morfismo $\phi : \mathrm{coKer}\, f \to Z$ tal que $g = \phi \circ p$. Se demostrará que $f = \mathrm{Ker}\, p$.

Se sabe que $p \circ f = 0$. Sea $a : A \to Y$ un morfismo tal que $p \circ a = 0$. Entonces
$$g \circ a = \phi \circ p \circ a = 0.$$
Como $f = \mathrm{Ker}\, g$, por la universalidad del conúcleo, existe un morfismo $l : A \to X$ tal que $f \circ l = a$. $\square$

**Proposición 6.30.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $f : X \to Y$ un morfismo. Sea $k : \operatorname{Ker} f \to X$ el núcleo de $f$ y $q : Y \to \operatorname{coKer} f$ el conúcleo. Si $c : X \to \operatorname{coKer} k$ es el conúcleo de $k$ y $d : \operatorname{Ker} q \to Y$ es el núcleo de $q$, entonces existe un único morfismo $\phi : \operatorname{coKer} k \to \operatorname{Ker} q$ que hace que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c"'] & Y \\ \operatorname{coKer} k \arrow[r, "\phi"'] & \operatorname{Ker} q \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

*sea conmutativo.*

*Demostración.* Como $f \circ k = 0$, por la propiedad universal del conúcleo, existe $h : \operatorname{coKer} k \to Y$ tal que $f = h \circ c$. Como $q \circ f = 0$ entonces $q \circ h \circ c = 0$, y como $c$ es un epimorfismo debe ser que $q \circ h = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, se tiene que existe un único morfismo $\phi : \operatorname{coKer} k \to \operatorname{Ker} q$ tal que $d \circ \phi = h$.

□

La demostración del siguiente resultado es un ejercicio.

**Proposición 6.31.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $f : X \to Y$ un morfismo. Entonces el morfismo $\phi$ de la Proposición 6.30 es un isomorfismo. En particular,* $\operatorname{Ker}(\operatorname{coKer} f) \simeq \operatorname{coKer}(\operatorname{Ker} f)$. *Entonces el morfismo $f$ puede escribirse como*

$$f = d \circ c,$$

*donde $c$ es un epimorfismo y $d$ un monomorfismo.* □

**Corolario 6.32.** *Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría Abeliana es un isomorfismo si y sólo si es un monomorfismo y epimorfismo.*

*Demostración.* Se asume que $f$ es monomorfismo y epimorfismo. Por la Proposición 6.30 se sabe que $f = d \circ \phi \circ c$. Como $f$ es monomorfismo, entonces $c = \operatorname{id}$. Como $f$ es epimorfismo, $d = \operatorname{id}$. Por lo tanto, $f = \phi$ y, por la Proposición 6.31, $f$ es un isomorfismo. □

## 6.2. Sucesiones exactas, funtores exactos.

**Definición 6.33.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $f : X \to Y$ un morfismo. Se define la *imagen* y la *coimagen* de $f$ como $Imf = \operatorname{Ker}(\operatorname{coKer} f)$ y $coImf = \operatorname{coKer}(\operatorname{Ker} f)$, respectivamente.

**Ejercicio 6.34.** En una categoría abeliana, un morfismo $f : X \to Y$ es un epimorfismo si y sólo si $Imf = Y$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos en $\mathcal{C}$. Se dice que la sucesión

$$(S) \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es *exacta en* $Y$ si $Imf \simeq \operatorname{Ker} g$ como subobjetos de $Y$.

Se dice que la sucesión (S) se *escinde* si existe un morfismo $\iota : Z \to Y$ tal que $g \circ \iota = \mathrm{id}_Z$. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0.$$

que es exacta en $X, Y$ y $Z$. En este caso particular $f$ es un monomorfismo y $g$ un epimorfismo.

**Ejercicio 6.35.** Sean $X_1, X_2$ objetos en $\mathcal{C}$ y $(X_1 \oplus X_2, p_1, p_2, i_1, i_2)$ una suma directa. La sucesión

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{i_1} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{p_2} X_2 \longrightarrow 0$$

es exacta y se escinde.

**Definición 6.36.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ aditivo se dice *exacto a izquierda* si para toda sucesión exacta $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, la sucesión

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z),$$

es exacta. Análogamente es exacto a derecha si la sucesión

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0,$$

es exacta. $F$ se dice *exacto* si es exacto a izquierda y a derecha.

Observar que un funtor exacto a izquierda preserva monomorfismos y uno exacto a derecha preserva epimorfismos.

**Ejercicio 6.37.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo. Probar que $F$ es exacto a izquierda si y solo si para todo $f : X \to Y$, $\operatorname{Ker} F(f) \simeq F(\operatorname{Ker} f)$. Enunciar y demostrar un resultado análogo para funtores exactos a derecha.

**Definición 6.38.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas. Se denotará por $\operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ y $\operatorname{Lex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a las subcategorías plenas de $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ que consisten de funtores aditivos exactos a derecha y, respectivamente, exactos a izquierda.

**Ejercicio 6.39.** Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías aditivas y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores exactos (a derecha, izquierda respectivamente) entonces $F \oplus G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $(F \oplus G)(X) = F(X) \oplus G(X)$ es exacto (a derecha, izquierda respectivamente).

**Ejercicio 6.40.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Demostrar que para todo $X \in \mathcal{C}$ el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to Ab$ es exacto a izquierda.

**Ejercicio 6.41.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto y tal que si $X \in \mathcal{C}$ es un objeto no nulo, entonces $F(X)$ es no nulo. Demostrar que $F$ es fiel.

Con la ayuda de mónadas sobre categorías se pueden construir nuevos ejemplos de categorías abelianas.

**Proposición 6.42.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sea $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una mónada tal que como funtor es aditivo y exacto a derecha. Entonces la categoría $\mathcal{C}^T$ es abeliana.*

*Demostración.* Describimos brevemente la estructura aditiva de $\mathcal{C}^T$. El objeto cero es $0 \in \mathcal{C}$ con el morfismo cero asociado. Como $T$ es aditivo, por Ejercicio 6.22 existen isomorfismos $\varphi_{X,Y}$ : $T(X \oplus Y) \simeq T(X) \oplus T(Y)$ para todos $X, Y \in \mathcal{C}$. Entonces definimos $(X, r) \oplus (Y, t) = (X \oplus Y, s)$. $s$ resulta la composición $s = (r \oplus t)\varphi_{X,Y} : T(X \oplus Y) \to X \oplus Y$, la cual da una estructura de $T$-módulo a $X \oplus Y$.

No es difícil ver que la categoría $\mathcal{C}^T$ admite núcleos. Veamos que existen los conúcleos. Dado $f : (X, r) \to (Y, t)$, tenemos que $T(\operatorname{coKer} f) = \operatorname{coKer} T(f)$ en $\mathcal{C}$, por exactitud a derecha de $T$. Podemos elegir a $T(p) : T(Y) \to T(\operatorname{coKer} f)$ como morfismo con propiedad universal de conúcleo. Notar que

$$p \circ t \circ T(f) = p \circ f \circ r = 0.$$

Por definición de conúcleo para $T(f)$, existe $\beta : T(\operatorname{coKer} f) \to \operatorname{coKer} f$ tal que $\beta \circ T(p) = p \circ t$. Esta ecuación dice que $\beta$ es un morfismo en $\mathcal{C}^T$ si probamos que $(\operatorname{coKer} f, \beta) \in \mathcal{C}_T$. Notamos que

$$(\beta \circ T(\beta)) \circ T^2(p) = \beta \circ T(p) \circ T(t) = p \circ t \circ T(t) = p \circ t \circ \mu_Y,$$

donde aplicamos dos veces la definición de $\beta$ y la condición de $T$-módulo para $Y$. Por otro lado,

$$\beta \circ \mu_{\operatorname{coKer} f} \circ T^2(p) = \beta \circ T(p) \circ \mu_Y = p \circ t \circ \mu_Y,$$

usamos naturalidad de $\mu$ y definición de $\beta$. Como $T$ preserva epimorfismos, $T^2(p)$ es epimorfismo y en particular cancelable a derecha. Luego $(\operatorname{coKer} f, \beta) \in \mathcal{C}^T$.

Por último, si $q : (Y, t) \to (E, l)$ es un morfismo con $q \circ f = 0$, existe único $v : Q \to E$ con $q = v \circ p$. Resta probar que $v \in \mathcal{C}^T$. Esto se sigue de la siguiente cuenta donde post-componemos con $T(p)$ (el cual es epimorfismo):

$$l \circ T(v) \circ T(p) = l \circ T(q) = q \circ t = v \circ p \circ t = v \circ \beta \circ T(p).$$

□

**Proposición 6.43.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores aditivos tales que $(F, G)$ es una adjunción. Entonces $F$ es exacto a derecha y $G$ es exacto a izquierda.*

*Demostración.* Por el Ejercicio 6.37, basta probar que $G$ preserva núcleos y sumas directas. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$ con núcleo $\operatorname{Ker} f = k : K \to X$, y veamos $\operatorname{Ker}(G(f)) \simeq G(\operatorname{Ker} f)$.

Sean $c : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$, $u : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ la counidad y unidad de la adjunción $(F, G)$. Ver Teorema 2.21 . Sea $h : B \to G(X)$ un morfismo tal que $G(f)h = 0$. Se denota por $\widehat{h} = c_X F(h)$. Entonces

$$f\widehat{h} = f c_X F(h) = c_Y F(G(f))F(h) = c_Y F(G(f)h) = 0.$$

La segunda igualdad se debe a la naturalidad de $c$. Por lo tanto, como $k$ es el núcleo de $f$, existe un morfismo $\beta : F(B) \to K$ tal que $\widehat{h} = k\beta$. Se define $\alpha = G(\beta)u_B$. Entonces se tiene que

$$G(k)\alpha = G(k)G(\beta)u_B = G(\widehat{h})u_B = G(c_X)G(F(h))u_B = G(c_X)u_{G(X)}h = h.$$

La tercera igualdad se debe a la definición de $\widehat{h}$, la cuarta a la naturalidad de $u$ y la última igualdad se debe a (2.3). La demostración de que $G$ preserva sumas directas es similar. □

Como toda equivalencia de categorías posee adjunto a izquierda y derecha, el siguiente resultado es consecuencia inmediata de la Proposición anterior.

**Corolario 6.44.** *Todo funtor que es una equivalencia de categorías es exacto.* □

**Proposición 6.45.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor aditivo exacto a izquierda. Entonces $G$ preserva límites finitos. Si además $G$ preserva productos de forma $J$ entonces $G$ preserva límites de forma $J$.* □

Introducimos el grupo de Grothendieck de una categoría aditiva $\mathcal{C}$.

**Definición 6.46.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Se denota por $F(\mathcal{C})$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de objetos de $\mathcal{C}$. Si $X$ es un objeto, se va a denotar por $[X]$ a su clase de isomorfismo. El subgrupo $R(\mathcal{C})$ de $F(\mathcal{C})$ es el subgrupo generado por los elementos $[Z] - [X] - [Y]$ cada vez que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

Se define el *grupo de Grothendieck* $G_0(\mathcal{C})$ como el cociente $F(\mathcal{C})/R(\mathcal{C})$. La clase de un objeto $[X]$ en $G_0(\mathcal{C})$ se denotará $\langle X \rangle$. En particular, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ se tiene que $\langle X \oplus Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$ en $G_0(\mathcal{C})$.

Resulta que el grupo de Grothendieck es un invariante de categorías, es decir que no depende de la clase de equivalencia de la categoría en cuestión.

**Lema 6.47.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Entonces:*

1. *$F$ es exacto si y sólo si para toda sucesión exacta corta*
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$
*la sucesión*
$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$
*es exacta.*
2. *Si $F$ es exacto, entonces induce un homomorfismo de grupos abelianos $[F] : G_0(\mathcal{C}) \to G_0(\mathcal{D})$.*

*Demostración.* La primera parte del Lema sigue inmediatamente de la definición de funtor exacto. Se define $[F] : G_0(\mathcal{C}) \to G_0(\mathcal{D})$ por $[F](\langle X \rangle) = \langle F(X) \rangle$ para todo $X \in \mathcal{C}$. La buena definición de $[F]$ se deduce del primer enunciado del Lema.

□

**Ejercicio 6.48.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. El funtor representación $H : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{Fun}(\mathcal{C}, Ab)$, $H(X)(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, es exacto a izquierda. (Notar que una sucesión exacta a izquierda en $\mathcal{C}^{\text{op}}$ es una sucesión exacta a derecha en $\mathcal{C}$).

**Proposición 6.49.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$P \in Ob(\mathcal{C})$ es un objeto proyectivo.*

2. *Toda sucesión exacta*
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$
*se escinde.*
3. *El funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,-) : \mathcal{C} \to Ab$ *es exacto.* □

La demostración de este resultado es similar a la demostración para categorías de módulos sobre un anillo, por lo cual queda como ejercicio.

**Proposición 6.50.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $Q \in Ob(\mathcal{C})$ *es un objeto inyectivo.*
2. *Toda sucesión exacta*
$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$$
*se escinde.*
3. *El funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Q) : \mathcal{C} \to Ab$ *es exacto.* □

La siguiente Proposición fue tomada de [19].

**Proposición 6.51.** *Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores aditivos entre categorías abelianas. Sea $Proj(\mathcal{A})$ la subcategoría plena de objetos proyectivos de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y $F$ es exacto a derecha, entonces toda transformación natural $\{\alpha_P : F(P) \to G(P)\}_{P\in Proj(A)}$ se extiende de forma única a una transformación natural $\overline{\alpha} : F \to G$.*

*Demostración.* Sea $X \in \mathcal{A}$ y $p : P \to X$ un epimorfismo, donde $P$ es proyectivo. Como $\mathcal{A}$ es abeliana, $p = \mathrm{coKer}\,(\mathrm{Ker}\,(p))$. Sea $q : Q \to \mathrm{Ker}\,p$ un epimorfismo. Es inmediato comprobar que $p = \mathrm{coKer}\,(\iota q)$, donde $\iota : \mathrm{Ker}\,p \to P$. Notar que
$$G(p)\alpha_P F(\iota q) = G(p)G(\iota q)\alpha_Q = G(0)G(q)\alpha_Q = 0.$$
Como $F$ es exacto a derecha, $\mathrm{coKer}\,F(\iota q) = F(\mathrm{coKer}\,\iota q) = F(p)$, luego existe $\overline{\alpha}_X : F(X) \to G(X)$ tal que $\overline{\alpha}_X F(p) = G(p)\alpha_P$. Veamos que no depende del epimorfismo elegido. Sea $p' : P' \to X$ otro epimorfismo y $\alpha'_X : F(X) \to G(X)$ el morfismo inducido. Como $P$ es proyectivo y $p'$ es epimorfismo, existe $s : P \to P'$ tal que $p = p' \circ s$. Calculamos ahora
$$\alpha'_X F(p) = \alpha_X F(p')F(s) = G(p')\alpha_{P'}F(s) = G(p')G(s)\alpha_P = G(p)\alpha_P = \overline{\alpha}_X F(p).$$
Cancelando $F(p)$ (que es epimorfismo por exactitud a derecha de $F$) obtenemos $\alpha_X = \alpha'_X$. Notar que esto prueba además que $\alpha$ se extiende de manera única.
Resta probar que $\overline{\alpha}$ es natural. Sea $f : X \to Y$ un morfismo y $\overline{\alpha}_X, \overline{\alpha}_Y$ inducidos por $p : P \to X, q : Q \to Y$ respectivamente. Por proyectividad de $P$, existe un morfismo $l : P \to Q$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "l"'] \arrow[d, "f\circ p"] & \\
Q \arrow[r, "q"'] & Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es suficiente ahora calcular

$$[\overline{\alpha}_Y F(f)]F(p) = \overline{\alpha}_Y F(q)F(l) = G(q)\alpha_Q F(l) = G(q)G(l)\alpha_P = G(f)G(p)\alpha_P = [G(f)\overline{\alpha}_X]F(p).$$

Cancelando el epimorfismo $F(p)$, obtenemos el axioma de naturalidad. □

El siguiente resultado será útil más adelante.

**Proposición 6.52.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas. Sea $(F, U) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una adjunción de funtores aditivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *El funtor $U$ es fiel;*
(ii) *Si $c : F \circ U \to \mathrm{Id}$ es la counidad de la adjunción, se verifica que $c_X$ es epimorfismo para todo $X \in \mathcal{D}$.*

*Si además de cumplir con alguna condición de las anteriores el funtor $U$ es exacto, entonces $U$ refleja isomorfismos.*

*Demostración.* Se va a probar que (ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{D}$ tal que $U(f) = 0$. La naturalidad de $c$ implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(U(X)) \arrow[r, "c_X"] \arrow[d, "F(U(f))"'] & X \arrow[d, "f"] \\ F(U(Y)) \arrow[r, "c_Y"] & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo tanto, $f \circ c_X = 0$. Como $c_X$ es un epimorfismo, entonces $f = 0$.

Ahora se va a probar que (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $X \in \mathcal{D}$ y sea $q = \mathrm{coKer}\,(c_X) : X \to Q$. Se quiere ver que $q = 0$. Como $q \circ c_X = 0$, entonces $U(q) \circ U(c_X) = 0$. Sea $u : \mathrm{Id} \to U \circ F$ la unidad de la adjunción. Por (2.3) se tiene que

$$\mathrm{id}_{U(X)} = U(c_X)u_{U(X)}.$$

Por lo tanto, $U(q)U(c_X)u_{U(X)} = U(q) = 0$. Como $U$ es fiel, entonces $q = 0$.

Ahora se asumirá que ambas condiciones (i), (ii) se satisfacen y que el funtor $U$ es exacto. Sea $f : X \to Y$ un morfismo tal que $U(f)$ es un isomorfismo. Sean $k = \mathrm{Ker}\,(f) : K \to X$ y $q = \mathrm{coKer}\,(f) : Y \to Q$ el núcleo y conúcleo, respectivamente. Se va a ver que $k = 0$ y que $q = 0$. Como $U(f)$ es un isomorfismo, entonces

$$0 = \mathrm{Ker}\, U(f) = U(k).$$

La segunda igualdad se debe a que $U$ es exacto. Análogamente, se tiene que $U(q) = 0$. Como $U$ es fiel, entonces $k = 0$ y $q = 0$. □

**Proposición 6.53.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sea $(T, \mu, u) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una mónada tal que como funtor es aditivo y exacto a derecha. Entonces el funtor de olvido $\mathcal{U} : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ es un funtor exacto y fiel.*

*Demostración.* Sean $(M, s), (N, t)$ objetos en $\mathcal{C}^T$ y sea $f : (M, s) \to (N, t)$ un morfismo en $\mathcal{C}^T$. Sea $k = \ker f : (K, r) \to (M, s)$ el núcleo de $f$. Se va a demostrar que $k : K \to M$ es el núcleo de $f$ en $\mathcal{C}$. Claramente $f \circ k = 0$. Sea $q : Q \to M$ un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ q = 0$. Se puede demostrar que

$$s \circ T(q) : (T(Q), \mu_Q) \to (M, s)$$

es un morfismo en $\mathcal{C}^T$. Además,

$$f \circ s \circ T(q) = t \circ T(f) \circ T(q) = 0.$$

La primera igualdad se debe a que $f$ es un morfismo en $\mathcal{C}^T$. Como $k$ es el núcleo de $f$ en $\mathcal{C}^T$, existe un morfismo $g : T(Q) \to K$ tal que $k \circ g = s \circ T(q)$. Se define $h = g \circ u_Q : Q \to K$. Entonces

$$k \circ h = k \circ g \circ u_Q = s \circ T(q) \circ u_Q = s \circ u_M \circ q = q.$$

La tercera igualdad se debe a la naturalidad de $u$ y la cuarta es (5.4). Así $\mathcal{U}(\ker f) = \ker \mathcal{U}(f)$.

Como el conúcleo de un morfismo en $\mathcal{C}^T$ se construye, en la Proposición 6.42, usando el conúcleo de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{U}$ preserva conúcleos también. □

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 5.16 de monadicidad de Beck.

**Proposición 6.54.** *Sea $(F, G) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una adjunción tal que $G$ es exacto a derecha y fiel, entonces la adjunción $(F, G)$ es mónadica.* □

### 6.3. La longitud de un objeto.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana.

**Definición 6.55.** Sea $X$ un objeto de $\mathcal{C}$.

- Una filtración finita de $X$ es una sucesión de subobjetos

$$0 = X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X_1 \subseteq X_0 = X.$$

- Una *serie de composición* de $X$ es una filtración finita de $X$

$$0 = X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X_1 \subseteq X_0 = X$$

tal que los objetos $X_i/X_{i+1}$ son simples para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Ver Definición 6.17 para la definición de cociente. Los objetos simples $X_i/X_{i+1}$ se llaman los *factores de composición* de $X$. Si $S$ es un objeto simple, la *multiplicidad* de $S$ en $X$ es la cantidad de $i$ tal que $S \simeq X_i/X_{i+1}$. Se denotará a ese número por $[X : S]$.

La demostración de la siguiente proposición queda como ejercicio para el lector.

**Proposición 6.56.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El objeto $X$ posee una serie de composición*

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X.$$

2. *Existe un número natural $n$ tal que para cualquier sucesión $0 = X_m \subset X_{m-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X_0 = X$ se tiene que $m \leq n$. Es decir, $X$ es artiniano.*
3. *Cualquier sucesión decreciente $\cdots \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X_0 = X$ y creciente $X \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ se estabiliza. Es decir, $X$ es noetheriano.* □

**Definición 6.57.** Si cualquiera de las condiciones de la proposición anterior se satisface, se dice que $X$ es de *longitud finita* y $n$ es su *longitud*.

**Teorema 6.58.** *(Teorema de Jordan-Hölder) Sea $X$ un objeto de longitud finita. Cualquier filtración finita de $X$ puede ser extendida a una serie de composición. Dos series de composición tienen a un objeto simple dado con la misma multiplicidad.* $\square$

**Proposición 6.59.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana donde todo objeto es de longitud finita. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples. Entonces el grupo de Grothendieck $G_0(\mathcal{C})$ es el grupo libre generado por $\mathcal{S}$.*

*Demostración.* Para todo objeto simple $S$ se denota por $1_S$ al elemento del grupo libre $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}}$ que tiene un 1 en la componente $S$ y 0 en las demás. Se define $\phi : \mathbb{Z}^{\mathcal{S}} \to G_0(\mathcal{C})$ y $\psi : G_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}^{\mathcal{S}}$ como sigue. Para cada objeto simple $S$

$$\phi(1_S) =< S >, \qquad \psi(< M >) = \sum_{S \in \mathcal{S}} [M : S] 1_S.$$

Observar que se puede definir el entero $[M : S]$ ya que todo objeto tiene longitud finita. El morfismo $\psi$ es aditivo y claramente $\phi$ es suryectivo. Se puede observar que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ evaluando en $1_S$ para objetos simples $S$. Esto demuestra que $\phi$ es inyectiva. $\square$

La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio.

**Proposición 6.60.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas, $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor que preserva monomorfismos y refleja isomorfismos. Si todo objeto en $\mathcal{D}$ es de longitud finita, entonces todo objeto en $\mathcal{C}$ es de longitud finita.* $\square$

### 6.4. Ejercicios.

1. Si $X$ no es un objeto nulo en una categoría aditiva, entonces $\mathrm{id}_X \neq 0_X^X$
2. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo. Demostrar que si $F$ es fiel entonces $F$ refleja sucesiones exactas.
3. Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana y $X \in \mathcal{C}$ es un objeto de longitud finita, entonces la cantidad de clases de isomorfismos de objetos simples $S$ que son subobjetos de $X$ es finita.
4. Si $X, Y$ son objetos en una categoría aditiva y se tiene un monomorfismo $\iota : Y \to X$. Demostrar que si $\iota = 0$ entonces $Y = 0$.
5. Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores aditivos tales que existen isomorfismos naturales $F \circ G \simeq \mathrm{Id}\,, \;\; G \circ F \simeq \mathrm{Id}\,$. Entonces $F$ y $G$ son exactos
6. Sea $G$ un grupo finito y $\Bbbk$ un cuerpo. Demostrar que para todo $V \in \mathrm{Rep}\,(\Bbbk G)$ los funtores
$$-\otimes_{\Bbbk} V,\ V \otimes_{\Bbbk} - : \mathrm{Rep}\,(\Bbbk G) \to \mathrm{Rep}\,(\Bbbk G),$$
son exactos. El mismo resultado sigue válido si reemplazamos $\Bbbk G$ por un álgebra de Hopf $H$ de dimensión finita.
7. Sean $R, S$ anillos con unidad, y sea $M$ un $(R, S)$-bimódulo. Demostrar que el funtor
$$M \otimes_S - : {}_S\mathrm{Mod} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$$

es exacto a derecha.

8. Demostrar que todo funtor exacto a derecha o izquierda es aditivo.
9. Demostrar que la categoría de grupos Grp no es Abeliana con los núcleos y conúcleos usuales.

## 7. Los teoremas de Eilenberg-Watts

En esta sección se recordarán los resultados de Eilenberg y Watts, en los cuales describen ciertos funtores entre categorías de módulos. Ver [10], [36]. Una buena referencia es también el trabajo [18].

**Teorema 7.1.** *Sean $A, B$ anillos. Sea $F : {}_A\mathrm{Mod} \to {}_B\mathrm{Mod}$ un funtor exacto a derecha que preserva sumas directas (de índices arbitrarios). Entonces $F(A)$ es un $(B, A)$-bimódulo y existe un isomorfismo natural*

$$F \simeq F(A)\otimes_A - .$$

*Demostración.* Si $M \in {}_A\mathrm{Mod}$ y $m \in M$, se denota por

$$r^M_m : A \to M, \quad r^M_m(a) = a \cdot m.$$

El morfismo $r^M_m$ pertenece a la categoría ${}_A\mathrm{Mod}$. Entonces $F(r^M_m) : F(A) \to F(M)$. Utilizando estos morfismos se puede definir una acción a derecha de $A$ sobre $F(A)$ como sigue:

$$x \triangleleft a := F(r^A_a)(x),$$

para todo $x \in F(A)$, $a \in A$. Como $r^A_{ab} = r^A_b \circ r^A_a$ entonces $\triangleleft$ define una acción. Se puede comprobar además que $F(A)$ es un $(B, A)$-bimódulo.

Por otro lado, se puede comprobar que las funciones

$$F(A) \times M \to F(M), (x, m) \mapsto F(r^M_m)(x),$$

son $A$-bilineales y, por lo tanto, determinan un morfismo

$$\psi^M : F(A)\otimes_A M \to F(M).$$

No es difícil verificar que $\psi^M$ son transformaciones naturales. Se va mostrar que son isomorfismos. Como $\psi^A$ es un isomorfismo, entonces, como $F$ preserva sumas directas, $\psi^L$ es un isomorfismo para todo $A$-módulo libre $L$. Aquí se está usando que $F$ preserva sumas directas. Ahora sea $M$ un $A$-módulo arbitrario. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to R \to L \to M \to 0$$

donde $L$ es un $A$-módulo libre. Como el funtor $F$ es exacto a derecha y $F(A)\otimes_A -$ también es exacto a derecha, se tienen dos sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
F(A)\otimes_A R \arrow[r] \arrow[d, "\psi^R"] & F(A)\otimes_A L \arrow[r] \arrow[d, "\psi^L"] & F(A)\otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\psi^M"] & 0 \\
F(R) \arrow[r] & F(L) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $\psi^L$ es un isomorfismo entonces $\psi^M$ es un epimorfismo. Rastreando a través del diagrama y usando que $\psi^R$ es un epimorfismo sigue que $\psi^M$ es un monomorfismo. $\square$

El siguiente resultado se deduce de la demostración del teorema anterior.

**Corolario 7.2.** *Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $A, B$ $\Bbbk$-álgebras de dimensión finita. Sea $F : {}_A\text{mod} \to {}_B\text{mod}$ un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal exacto a derecha. Entonces $F(A)$ es un $(B, A)$-bimódulo y existe un isomorfismo natural*

$$F \simeq F(A)\otimes_A - .$$

$\square$

Existe una versión dual del teorema anterior. Para su demostración ver [36].

**Teorema 7.3.** *Sean $A, B$ anillos. Sea $F : \mathrm{Mod_A} \to \mathrm{Mod_B}$ un funtor exacto a izquierda que preserva productos directos (de índices arbitrarios). Entonces existe un $(B, A)$-bimódulo $X$ y existe un isomorfismo natural*

$$F \simeq \mathrm{Hom}_A(X, -).$$

$\square$

**Ejercicio 7.4.** Sean $A, B$ $\Bbbk$-álgebras de dimensión finita. Demostrar que existe una equivalencia de categorías

$$\mathrm{Rex}\,({}_A\mathrm{mod}\,, {}_B\mathrm{mod}\,) \simeq {}_B\mathrm{mod}\,{}_A.$$

## 8. Categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas

**Definición 8.1.** Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ se dice $\Bbbk$-*lineal* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial para todo par de objetos $X, Y$ y la composición es $\Bbbk$-bilineal.

Una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$ se dice *finita* si

(a) Todo objeto de $\mathcal{C}$ posee longitud finita;
(b) $\dim_{\Bbbk}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) < \infty$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$;
(c) todo objeto simple de $\mathcal{C}$ posee cubrimiento proyectivo;
(d) la cantidad de clases de isomorfismos de objetos simples es finita.

**Definición 8.2.** Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías abelianas $\Bbbk$-lineales, se dice que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es $\Bbbk$-*lineal* si es aditivo y para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, los morfismos $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ son transformaciones lineales.

**Ejemplo 8.3.** Si $\Bbbk$ es un cuerpo. La categoría $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita es finita.

**Lema 8.4.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Sean $\{S_i\}$ un conjunto finito de clases de isomorfismos de objetos simples y $P_i$ sus cubrimientos proyectivos. Si se define $P = \oplus_i P_i$, entonces el funtor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk},$$

*es exacto y fiel.*

*Demostración.* Como $P$ es proyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,-)$ es exacto. Se va a ver por inducción en la longitud de $Y$que si $Y \neq 0$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Y) \neq 0$. Si $Y$ es simple entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Y) \neq 0$. Si $Y$ no es simple, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to X \to Y \to S \to 0,$$

donde $S$ es simple y la longitud de $X$ es estrictamente menor a la longitud de $Y$. Luego, se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,S) \to 0.$$

Por inducción, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,X) \neq 0$ y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,S) \neq 0$ se debe cumplir que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Y) \neq 0$. □

**Teorema 8.5.** *Sea $R$ un anillo con unidad, y $M \in {}_R\mathrm{Mod}$. Entonces $\mathrm{Hom}_R(P,-) : {}_R\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}$ preserva límites finitos. Más aún, si $M$ es finitamente generado, entonces $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ preserva límites pequeños.*

*Demostración.* Como $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ es exacto a izquierda, preserva productos finitos y ecualizadores, luego preserva límites finitos.
Para la segunda parte, probamos el caso donde $M$ es finitamente presentado. Sea

$$R^q \to R^n \to M \to 0, \tag{8.1}$$

una sucesión exacta, con $n, q \in \mathbb{N}$ (existe pues $M$ es finitamente presentado).
Recordemos que para $m \in \mathbb{N}$, $A \in {}_R\mathrm{Mod}$, vale que $\mathrm{Hom}_R(R^m, A) \simeq \Pi_{i=1}^m A := A^m$ como grupos abelianos. Usemos esto para ver que $\mathrm{Hom}_R(R^m,-)$preserva límites: sabemos que preserva ecualizadores, y si $(M_j)_{j\in J}$ es un conjunto posiblemente infinito de $R$-módulos, entonces

$$\mathrm{Hom}_R(R^m, \prod_{j\in J} M_j) \simeq \big(\prod_{j\in J} M_j\big)^m \simeq \prod_{j\in J} M_j^m \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(R^m, M_j).$$

En particular vale para $m = q, m = n$. Sea ahora $I$ una categoría pequeña y $F : I \to {}_R\mathrm{Mod}$ un funtor que admite límite. Por definición de límite, tenemos un mapa canónico $\varphi : \mathrm{Hom}_R(P, \varprojlim F(i)) \to \varprojlim \mathrm{Hom}_R(P, F(i))$. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(-, \varinjlim F(i))$ a la sucesión exacta dada en 8.1, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(P, \varprojlim F(i)) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_R(R^n, \varprojlim F(i)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_R(R^q, \varprojlim F(i)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[d] \\
\varprojlim \mathrm{Hom}_R(P, F(i)) \arrow[r] & \varprojlim \mathrm{Hom}_R(R^n, F(i)) \arrow[r] & \varprojlim \mathrm{Hom}_R(R^q, F(i)) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

con filas exactas. Como todos los morfismos verticales (salvo $\varphi$) son isomorfismos, por el Lema de los 4, $\varphi$ es un isomorfismo. □

**Proposición 8.6.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales. Sea $(F, U) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una adjunción, donde los funtores $F, U$ son aditivos $\Bbbk$-lineales. Asumir que $U$ es exacto y fiel. Si $\mathcal{C}$ es una categoría finita, entonces $\mathcal{D}$ también es finita.*

*Demostración.* Como el funtor $U$ es fiel, los espacios vectoriales $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ son subespacios de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U(X),U(Y))$, que son de dimensión finita. Como además $U$ es exacto, por la Proposición 6.52 se sabe que $U$ refleja isomorfismos. Por lo tanto, $U$ preserva cadenas estrictamente decrecientes de subobjetos, ver Ejercicio 6.60. Luego, todo objeto en $\mathcal{D}$ es de longitud finita. Se probará que $\mathcal{D}$ posee suficientes proyectivos. Sea $X \in \mathcal{D}$ y $P \in \mathcal{C}$ un objeto proyectivo con un epimorfismo $p : P \twoheadrightarrow U(X)$. Como $F$ es adjunto a izquierda, por la Proposición 6.43 $F$ preserva epimorfismos. Como $U$ es fiel, por la Proposición 6.52 resulta que si $e : F \circ U \to \mathrm{Id}$ es la counidad de la adjunción, entonces $e_X$ es un epimorfismo. Luego, la composición

$$F(P) \xrightarrow{F(p)} F(U(X)) \xrightarrow{e_X} X$$

es un epimorfismo. Además,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, U(-)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(P), -)$$

es exacto. Por lo tanto, $F(P)$ es proyectivo. Así $\mathcal{D}$ posee suficientes proyectivos.

Falta demostrar que $\mathcal{D}$ posee una cantidad finita de clases de isomorfismos de objetos simples. Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de representantes de clases de isomorfismos de objetos simples de $\mathcal{C}$. Se define $W = \oplus_{i=1}^n S_i$.

Se afirma que para todo objeto no nulo $X \in \mathcal{D}$ existe un morfismo no nulo $F(W) \to X$. En efecto, como $X \neq 0$, entonces $U(X) \neq 0$. Luego, existe un objeto simple $S$ que es un subobjeto de $U(X)$, es decir un monomorfismo $\iota : S \to U(X)$. Sea $f : F(S) \to X$ el morfismo que corresponde bajo el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, U(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(S), X).$$

Es decir que $\iota = U(f)\eta_S$, donde $\eta : \mathrm{Id} \to U \circ F$ es la unidad de la adjunción. Como $\iota \neq 0$ entonces $f \neq 0$. Basta definir entonces $fF(\pi_S) : F(W) \to X$, el cual es nuevamente no nulo ya que $F(\pi_S)$ es un epimorfismo.

Si $T \in \mathcal{D}$ es simple, entonces, por lo anterior, existe un morfismo no nulo $F(W) \to T$. Esto dice que todo objeto simple de $\mathcal{D}$ aparece como factor de composición de $F(W)$. Como $F(W)$ tiene longitud finita, entonces posee una cantidad finita de factores de composición. ☐

El siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición anterior.

**Corolario 8.7.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita y sea $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una mónada tal que como funtor es aditivo $\Bbbk$-lineal exacto a derecha. Entonces la categoría de $T$-módulos $\mathcal{C}^T$ es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita.*

*Demostración.* Sigue de la Proposición 6.53 usando la Proposición 8.6. ☐

**Corolario 8.8.** *Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, entonces la categoría ${}_A\mathrm{mod}$ de representaciones de $A$ de dimensión finita es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita.*

*Demostración.* El funtor $T_A : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ dado por $T_A(V) = A \otimes_{\Bbbk} V$ es una mónada. Por el Corolario anterior la categoría $(\mathrm{vect}_{\Bbbk})^{T_A} \simeq {}_A\mathrm{mod}$ es finita. ☐

**8.1. Adjunciones y representabilidad de funtores lineales en categorías finitas.** Muchas de las demostraciones de esta Sección han sido tomadas de [8]. Se comenzará con una definición un poco técnica, pero que será de utilidad.

**Definición 8.9.** Se dice que un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ satistisface la *solución conjuntista* si: para todo objeto $C \in \mathcal{C}$ existe un conjunto finito $I$ y una colección de morfismos $f_i : C \to G(D_i)$ en $\mathcal{D}$ tal que, todo morfismo $h : C \to G(D)$ puede ser escrito como la composición $h = G(t) \circ f_i$ para algún $i \in I$ y algún $t : D_i \to D$.

**Lema 8.10.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores tales que $(F, G)$ es una adjunción. Si $G$ es aditivo entonces $F$ es aditivo. Si $G$ es $\Bbbk$-lineal entonces $F$ es $\Bbbk$-lineal.*

**Teorema 8.11.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales finitas, y sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor $\Bbbk$-lineal. Son equivalentes:*

(i) *$G$ es exacto a izquierda;*
(ii) *$G$ es exacto a izquierda y satisface la solución conjuntista;*
(iii) *$G$ posee un funtor adjunto a izquierda $\Bbbk$-lineal.*

*Demostración.* La implicación (iii) $\Rightarrow$ (i) fue demostrada en la Proposición 6.43.

Se probará que (i) $\Rightarrow$ (ii). Como, para todo $X \in \mathcal{C}$, el funtor de olvido $\mathcal{U} : (X \downarrow G) \to \mathcal{D}$ preserva monomorfismos y refleja isomorfismos, por el Ejercicio 6.60 se sabe que todo objeto de la categoría $(X \downarrow G)$ es de longitud finita. En particular, para todo objeto $(f, Y) \in (X \downarrow G)$ existe un objeto simple contenido en $(f, Y)$.

Sea $S_X = \{(f_i, Y_i)\}$ el conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples de $(X \downarrow G)$. Si $S_X$ es un conjunto finito, entonces este conjunto puede utilzarse para que $G$ satisfaga la solución conjuntista.

Sea $J$ el conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de $\mathcal{D}$ y sea $Q = \oplus_{S \in J} S$. Como el espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Q))$ es de dimensión finita, se va a elegir una base $\{e_l\}_{l \in L}$. Se define entonces

$$D = \oplus_{l \in L} (e_l, Q) \oplus (0, Q) \in (X \downarrow G).$$

Para demostrar que $(X \downarrow G)$ posee una cantidad finita de clases de isomorfismos de objetos simples, se demostrará que todo objeto de $S_X$ se incluye en $D$. Sea $(f, Y) \in S_X$. Si $f = 0$ entonces necesariamente $Y$ es simple y, por lo tanto, $(f, Y)$ se incluye en $(0, Q)$. Se asume entonces que $f \neq 0$. Se tiene la composición

$$\gamma : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Q) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(Y), G(Q)) \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha \circ f} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, G(Q)). \tag{8.2}$$

Sea $\kappa : Y \to Q$ un morfismo en el núcleo de esta composición. Es decir que $G(\kappa) \circ f = 0$. Sea $h : K \to Y$ el núcleo de $\kappa$. Como $G$ es exacto a izquierda, se tiene que $\operatorname{Ker} G(\kappa) = G(h)$. Luego, como $G(\kappa) \circ f = 0$, debe existir un morfismo $d : X \to G(K)$ tal que $f = G(h) \circ d$. Esto dice que $h : (d, K) \to (f, Y)$ es un morfismo en $(X \downarrow G)$ que es un monomorfismo. Como $(f, Y)$ es simple, entonces $K = 0$ o $h$ es un isomorfismo. Si $K = 0$ entonces $\kappa$ es un monomorfismo y, por lo tanto, $G(\kappa)$ también es un monomorfismo. Como $G(\kappa) \circ f = 0$, entonces $f = 0$. Luego, la única opción es que $h$ sea un isomorfismo y entonces $\kappa = 0$. Es decir que se ha demostrado que si $f \neq 0$, la composición $\gamma$ presentada en (8.2) es un morfismo inyectivo.

Ahora se probará que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Usando el Lema 8.10, basta con demostrar que $G$ posee un adjunto a izquierda. Utilizando la Proposición 2.26, alcanza con demostrar que para todo $X \in \mathcal{C}$ la categoría coma $(X \downarrow G)$ posee un objeto inicial. Como $\mathcal{D}$ posee ecualizadores y productos finitos, entonces por el Teorema 3.16, $\mathcal{C}$ posee límites pequeños. Como $G$ es exacto a izquierda, entonces preserva límites finitos, ver Proposición 6.45. Se sigue entonces de la Proposición 3.24 que la categoría coma $(X \downarrow G)$ posee límites pequeños y que el funtor de olvido $\mathcal{U} : (X \downarrow G) \to \mathcal{D}$ crea límites finitos. Luego, se deduce que $(X \downarrow G)$ posee límites finitos.

Como $G$ satisface la solución conjuntista, existe un conjunto finito $I$ y una colección de morfismos $f_i : X \to G(C_i)$, $i \in I$ que satisfacen las condiciones de la Definición 8.9. Los morfismos $f_i$ son objetos en la categoría coma $(X \downarrow G)$, entonces se puede considerar el producto de ellos

$$\Pi_{i\in I} f_i : X \to \Pi_{i\in I} G(C_i) \simeq G(\Pi_{i\in I} C_i).$$

Definimos $W = (\Pi_i f_i, \Pi_{i\in I} C_i)$. Como los espacios Hom en $(X \downarrow G)$ son espacios vectoriales de dimensión finita y $(X \downarrow G)$ posee límites finitos, podemos tomar el ecualizador $h$ de los elementos de una base de $\mathrm{Hom}_{(X\downarrow G)}(W, W)$, y este ecualiza a cualquier par de ellos. Se denota a dicho morfismo por

$$h : (e, Y) \to (W, \Pi_{i\in I} C_i),$$

$(e, Y) \in (X \downarrow G)$. Se demostrará que $(e, Y)$ es un objeto inicial en $(X \downarrow G)$.

Sea $(\phi, Z) \in (X \downarrow G)$ un objeto arbitrario. Como $\phi : X \to G(Z)$ y se satisface la solución conjuntista, debe existir un $j \in I$ y un morfismo $t : C_j \to Z$ tal que

$$\phi = G(t) \circ f_j.$$

Se tiene entonces una composición de morfismos, que se denotará por $\alpha$:

$$\alpha : Y \xrightarrow{h} \Pi_{i\in I} C_i \xrightarrow{p_j} C_j \xrightarrow{t} Z,$$

donde $p_j$ es la proyección canónica. Además,

$$G(\alpha) \circ e = G(t) \circ G(p_j) \circ G(h) \circ e = G(t) \circ G(p_j) \circ \Pi_{i\in I} f_i = G(t) \circ f_j = \phi.$$

Observar que aquí se esta usando que $G$ es aditivo y, por lo tanto, los morfismos $G(p_i)$ son las proyecciones canónicas de $\Pi_{i\in I} G(C_i)$. La igualdad anterior implica que $\alpha : (e, Y) \to (\phi, Z)$ es un morfismo en $(X \downarrow G)$. La demostración concluye una vez que demostremos que $\alpha$ es único.

Sean $\beta, \omega : (e, Y) \to (\phi, Z)$ dos morfismos en $(X \downarrow G)$. Sea $k : (\xi, K) \to (e, Y)$ el ecualizador de estos dos morfismos. Se sabe que existe porque la categoría coma posee límites pequeños. Como $\xi : X \to G(K)$ y $G$ cumple con la solución conjuntista, entonces existe un $l \in I$ y un morfismo $t : C_l \to K$ tal que

$$\xi = G(t) \circ f_l.$$

Se afirma que el morfismo

$$h \circ k \circ t \circ p_l : \Pi_{i\in I} C_i \to \Pi_{i\in I} C_i$$

es un morfismo en $(X \downarrow G)$. En efecto,

$$\begin{aligned} G(h \circ k \circ t \circ p_l) \circ \Pi_{i \in I} f_i &= G(h) \circ G(k) \circ G(t) \circ f_l \\ &= G(h) \circ G(k) \circ \xi = G(h) \circ e = \Pi_{i \in I} f_i. \end{aligned}$$

La tercera y cuarta igualdades se deben a que $k$ y $h$ son morfismos en $(X \downarrow G)$. Como $h$ es el ecualizador de todos los endomorfismos en $(X \downarrow G)$ del objeto $(W, \Pi_{i \in I} C_i)$ se debe cumplir que

$$(h \circ k \circ t \circ p_l) \circ h = h \circ \mathrm{id}_Y.$$

Como $h$ es un monomorfismo, se debe cumplir que

$$k \circ (t \circ p_l \circ h) = \mathrm{id}_Y.$$

Esto dice que $k$ posee un inverso a derecha y, por lo tanto, es un epimorfismo. Como $k$ es un ecualizador debe ser también un monomorfismo y, por lo tanto, un isomorfismo. Así $\beta = \omega$, lo cual concluye la demostración del teorema. □

*Observación* 8.12. En el Teorema 8.11 ambas categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son abelianas $\Bbbk$-lineales finitas. Sin embargo, no todas las hipótesis han sido utilizadas. Por ejemplo, no se ha utilizado que ambas categorías posean suficientes proyectivos.

En lo que sigue se mostrarán varias consecuencias importantes del resultado anterior.

**Corolario 8.13.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita y $G : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ un funtor. Son equivalentes:*

1. *$G$ es exacto a izquierda;*
2. *$G$ es representable.*

*Demostración.* Ya se vió en el Ejercicio 6.40 que si un funtor es representable, es exacto a izquierda. Recíprocamente, si $G$ es exacto a izquierda entonces, por el Teorema 8.11, $G$ posee un adjunto a izquierda $F : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Luego, para todo $X \in \mathcal{C}$, se tienen isomorfismos

$$G(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk, G(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(F(\Bbbk), X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(\Bbbk)).$$

□

**Ejercicio 8.14.** Encontrar un contraejemplo (en categorías no finitas) del corolario anterior.

**Corolario 8.15.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales y tal que $\mathcal{D}$ es finita. Sea $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal. Si el end $\int_{X \in \mathcal{C}} S(X, X)$ existe, entonces para todo objeto $M \in \mathcal{D}$ el end*

$$\int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X, X))$$

*existe y hay un isomorfismo*

$$\int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X, X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \int_{X \in \mathcal{C}} S(X, X)).$$

*Más aún, si $\int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X, X))$ existe para todo $M$, entonces el end $\int_{X \in \mathcal{C}} S(X, X)$ existe.*

*Demostración.* Supóngase que $\int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X)$ existe y que tiene transformaciones dinaturales asociadas

$$\pi_X : \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X) \to S(X,X).$$

Para todo $M \in \mathcal{D}$ se define

$$\widehat{\pi}_X^M : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X,X)),$$

$$\widehat{\pi}_X^M(f) = \pi_X \circ f.$$

No es difícil comprobar que $\widehat{\pi}_X^M$ son dinaturales para el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(-,-)) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$. Sea $E$ un espacio vectorial munido de transformaciones dinaturales $\lambda_X^M : E \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X,X))$. La dinaturalidad en este caso implica que para todo $e \in E$ y todo morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ se satisface

$$S(\mathrm{id}_X, f)\lambda_X^M(e) = S(f, \mathrm{id}_Y)\lambda_Y^M(e).$$

Por la universalidad del end, debe existir un morfismo $h_e : M \to \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X)$ tal que

$$\pi_X \circ h_e = \lambda_X^M(e).$$

Si se define $h : E \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X,X))$ por $h(e) = h_e$, se ve que el objeto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X))$ satisface la propiedad universal del end y así

$$\int_{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X,X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \int_{X\in\mathcal{C}} S(X,X)).$$

Ahora se va a asumir que el end $\int_{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X,X))$ existe para todo $M \in \mathcal{D}$. Se define el funtor

$$\Phi : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$$

$$\Phi(M) = \int_{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X,X)).$$

Se ve que $\Phi$ es exacto a izquierda. Notar que los núcleos en $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ son conúcleos en $\mathcal{D}$. Dado $f : M \to N$ morfismo en $\mathcal{D}$ se debe demostrar que $\Phi(\mathrm{coKer}\, f) = \mathrm{Ker}\, \Phi(f)$. Se va a denotar

$$(\alpha_f)_{(X,Y)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N, S(X,Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S(X,Y)),$$

$$(\alpha_f)_{(X,Y)}(g) = g \circ f.$$

Luego, por el Teorema 4.4 (i), existe un morfismo

$$\widehat{f} : \Phi(N) \to \Phi(M)$$

tal que

$$\widehat{\pi}_X^M \widehat{f} = (\alpha_f)_{(X,X)} \widehat{\pi}_X^N.$$

Luego $\Phi(f) = \widehat{f}$. Sea $q : N \to Q$ un conúcleo de $f$ en $\mathcal{D}$ y sea $h : K \to \Phi(N)$ un morfismo tal que $\Phi(f) \circ h = 0$. Luego,

$$\widehat{\pi}_X^M \circ \Phi(f) \circ h = (\alpha_f)_{(X,X)} \circ \widehat{\pi}_X^N \circ h = 0.$$

Por el Ejercicio 6.40 el $\mathrm{Hom}(X,-)$ es exacto a izquierda y, por lo tanto, $\mathrm{Ker}\,\alpha_f = \alpha_q$. Luego, para todo $X \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $l_X : K \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Q, S(X,X))$ tal que

$$(\alpha_q)_{(X,X)} \circ l_X = \widehat{\pi}_X^N \circ h.$$

La dinaturalidad de $\widehat{\pi}_X^N$ implica que los morfismos $l_X$ son dinaturales. Luego, por la universalidad del end, existe un único morfismo $t : K \to \Phi(Q)$ tal que $l_X = \widehat{\pi}_X^Q \circ t$. Reuniendo toda esta información, se tiene que

$$\widehat{\pi}_X^N \circ \Phi(q) \circ t = (\alpha_q)_{(X,X)} \circ \widehat{\pi}_X^Q \circ t = (\alpha_q)_{(X,X)} \circ l_X = \widehat{\pi}_X^N \circ h.$$

Así, $\Phi(q) \circ t = h$. Se demostró entonces que $\Phi(q) = \mathrm{Ker}\,\Phi(f)$. Luego, el funtor $\Phi$ está representado por un objeto $E \in \mathcal{D}$. La comprobación de que $E \simeq \int_{X \in \mathcal{C}} S(X,X)$ es inmediata pues los morfismos $\widehat{\pi}_X^E(\mathrm{id}_E)$ son dinaturales y satisfacen la propiedad universal del end. $\square$

Existe una versión dual para coends del resultado anterior. La demostración se deja como ejercicio para el lector.

**Ejercicio 8.16.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales y tal que $\mathcal{D}$ es finita. Sea $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal. Si el coend $\int^{X \in \mathcal{C}} S(X,X)$ existe, entonces para todo objeto $M \in \mathcal{D}$ el end

$$\int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(X,X), M)$$

existe y hay un isomorfismo

$$\int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(X,X), M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\int^{X \in \mathcal{C}} S(X,X), M).$$

Más aún, si $\int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(X,X), M)$ existe para todo $M$, entonces el coend $\int^{X \in \mathcal{C}} S(X,X)$ existe.

**Corolario 8.17.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Entonces existe una $\Bbbk$-álgebra $A$ de dimensión finita y una equivalencia de categorías*

$$\mathcal{C} \simeq {}_A\mathrm{mod}\,.$$

*Demostración.* Sea $\{S_i\}$ un conjunto de representantes de clases de isomorfismos de objetos simples y $P_i$ sus cubrimientos proyectivos. Si se define $P = \oplus_i P_i$, por el Lema 8.4 se tiene que el funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$$

es exacto y fiel. Por lo tanto, dicho funtor posee un adjunto a izquierda $\mathcal{U} : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathcal{C}$. Utilizando el Teorema de monadicidad de Beck, ver Proposición 6.54, resulta que la adjunción $(\mathcal{U}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,-))$ es monádica. Entonces, si $T : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ es la mónada asociada, resulta que

$$\mathcal{C} \simeq (\mathrm{vect}_{\Bbbk})^T,$$

donde $T$ es exacto a derecha como funtor. Por los resultados de Watts, ver Corolario 7.2, existe un espacio vectorial $A$ tal que $T \simeq A \otimes_{\Bbbk} -$. Se deduce de la estructura de mónada de $T$ que $A$ posee una estructura de $\Bbbk$-álgebra. Luego, $\mathcal{C} \simeq {}_A\mathrm{mod}\,.$ $\square$

**8.2. La acción de $\operatorname{vect}_{\Bbbk}$ sobre cualquier categoría $\Bbbk$-lineal finita.** Para toda $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita $A$ existe una *acción* de $\operatorname{vect}_{\Bbbk}$ sobre ${}_A\text{mod}$, es decir un funtor

$$\triangleright : \operatorname{vect}_{\Bbbk} \times {}_A\text{mod} \to {}_A\text{mod},$$

$$X \triangleright M = X \otimes_{\Bbbk} M,$$

para todo $X \in \operatorname{vect}_{\Bbbk}$, $M \in {}_A\text{mod}$. La estructura de $A$-módulo sobre $X \otimes_{\Bbbk} M$ es sobre el segundo tensorando. Esta acción puede ser definida para cualquier categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita de una forma natural.

**Proposición 8.18.** *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Entonces existe un funtor*

$$\triangleright : \operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

*exacto en cada variable. Tal funtor satisface que, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall V, W \in \operatorname{vect}_{\Bbbk}$, existen isomorfismos naturales*

$$\Bbbk \triangleright A \simeq A, \quad (V \otimes_{\Bbbk} W) \triangleright A \simeq V \triangleright (W \triangleright A).$$

*Demostración.* Sea $V \in \operatorname{vect}_{\Bbbk}, A \in \mathcal{A}$. El funtor

$$\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)) : \mathcal{A} \to \operatorname{vect}_{\Bbbk},$$

es una composición de los funtores

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \to \operatorname{vect}_{\Bbbk}, \;\; \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, -) : \operatorname{vect}_{\Bbbk} \to \operatorname{vect}_{\Bbbk}.$$

Como ambos funtores son exactos a izquierda, entonces $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -))$ es exacto a izquierda; luego es representable. Se va a llamar $V \triangleright A \in \mathcal{A}$ al objeto que representa dicho funtor, es decir que hay isomorfismos naturales

$$\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(V \triangleright A, B).$$

$\square$

**Ejercicio 8.19.** Demostrar que, en efecto, el funtor $- \triangleright - : \operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es exacto en cada variable.

**Lema 8.20.** *Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son dos categorías abelianas $\Bbbk$-lineales finitas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal exacto a derecha, entonces $F$ respeta la acción de $\operatorname{vect}_{\Bbbk}$. Es decir que existen isomorfismos naturales*

$$c_{V,X} : F(V \triangleright X) \to V \triangleright F(X).$$

*Demostración.* En efecto, como $F$ es exacto a derecha, posee un adjunto a derecha $G$. Luego, para todo $B \in \mathcal{D}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(V \triangleright F(A), B) &\simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B)) \simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B))) \simeq \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(V \triangleright A, G(B)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(V \triangleright A), B).\end{aligned}$$

$\square$

**Ejercicio 8.21.** Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Demostrar que existe un funtor exacto en cada variable

$$\triangleleft : \mathcal{A} \times \operatorname{vect}_{\Bbbk} \to \mathcal{A}$$

tal que existen isomorfismos naturales

$$\gamma_{V,M,U} : (V \triangleright M) \triangleleft U \xrightarrow{\simeq} V \triangleright (M \triangleleft U).$$

Si $\mathcal{B}, \mathcal{P}$ son otras categorías abelianas $\Bbbk$-lineales finitas y $H : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{P}$ es un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal exacto a derecha **en cada variable**, entonces, para todo $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, V \in \operatorname{vect}_{\Bbbk}$, existen isomorfismos naturales

$$\delta^V_{A,B} : H(A \triangleleft V, B) \xrightarrow{\simeq} H(A, V \triangleright B).$$

Además, se verifica que

$$\delta^{V \otimes_{\Bbbk} W}_{A,B} = \delta^V_{A, W \triangleright B}\, \delta^W_{A \triangleleft V, B}. \tag{8.3}$$

La demostración del siguiente Lema se deja como ejercicio para el lector.

**Lema 8.22.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Si $- \triangleright - : \operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es la acción canónica de $\operatorname{vect}_{\Bbbk}$ en $\mathcal{C}$, entonces la acción de $\operatorname{vect}_{\Bbbk}$ en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ está dada por*

$$\blacktriangleright - : \operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}},$$
$$V \blacktriangleright X = V^* \triangleright X.$$

□

### 8.3. Funtores en categorías $\Bbbk$-lineales finitas.

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineakes finitas. En esta sección se dará una nueva descripción de ciertos funtores y sus adjuntos.

**Proposición 8.23.** *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal. Existen isomorfismos naturales*

$$F \simeq \int^{X \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \triangleright F(X), \tag{8.4}$$

$$F \simeq \int_{X \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)^* \triangleright F(X). \tag{8.5}$$

*Demostración.* Tomamos $Y \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\Big(\int^{X \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \triangleright F(X), D\Big) &\simeq \int_{X \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \triangleright F(X), D) \\
&\simeq \int_{X \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^* \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), D) \\
&\simeq \int_{X \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), D)) \\
&\overset{(4.2)}{\simeq} \operatorname{Nat}\left(\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y), \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), D)\right) \\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), D).
\end{aligned}$$

El último isomorfismo es el Lema de Yoneda. $\square$

**Proposición 8.24.** *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor.*

1. *Si $F$ posee adjunto a derecha entonces existe un isomorfismo natural*

$$F^{\mathrm{ra}} \simeq \int^{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), -) \blacktriangleright X. \tag{8.6}$$

2. *Si $F$ posee adjunto a izquierda entonces existe un isomorfismo natural*

$$F^{\mathrm{la}} \simeq \int_{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, F(X))^* \triangleright X. \tag{8.7}$$

*Demostración.* Demostremos (1), la prueba de (2) sigue de forma similar. Aplicando (8.4) al funtor $F^{\mathrm{ra}} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{ra}} &\simeq \int^{D\in\mathcal{D}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, -) \triangleright F^{\mathrm{ra}}(D) \\ &\overset{(4.5)}{\simeq} \int^{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), -) \triangleright X. \end{aligned}$$

$\square$

**8.4. Funtores de fibra y teoremas de reconstrucción.** En la Sección anterior se ha reconstruido una $\Bbbk$-álgebra a partir de una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Más aún, a dicha categoría se le asoció un *funtor de fibra*, es decir un funtor exacto y fiel $F : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$. Ver Lema 8.4.

En esta Sección se describirá brevemente los resultados obtenidos en [26], donde a partir de un funtor de fibra se puede reconstruir una coálgebra. Ver también los trabajos [25], [34]. La diferencia fundamental con lo realizado anteriormente es que se va a prescindir de la hipótesis de finitud sobre $\mathcal{C}$.

Si $C$ es una $\Bbbk$-coálgebra, entonces se sabe que el funtor de olvido $\mathcal{U} : {}^{C}\mathrm{mod} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ es un funtor exacto y fiel.

**Teorema 8.25.** [26, Teo. 2.2.8] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal y sea $F : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal exacto y fiel. El objeto*

$$C = \int^{X\in\mathcal{C}} F(X)^* \otimes_{\Bbbk} F(X),$$

*posee una estructura de $\Bbbk$-coálgebra y el funtor $F$ se factoriza*

$$\begin{tikzcd} & {}^{C}\mathrm{mod} \arrow[dr, "\mathcal{U}"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\widehat{F}"] \arrow[rr, "F"'] & & \mathrm{vect}_{\Bbbk}. \end{tikzcd} \tag{8.8}$$

*Además, el funtor $\widehat{F}$ es una equivalencia de categorías.* $\square$

Se explicará únicamente cómo darle a $C$ estructura de coálgebra y la descripción del funtor $\widehat{F}$. Sean

$$\pi_X : F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \to C$$

las dinaturales asociadas al coend. Para todo $X \in \mathcal{C}$ se va a denotar la evaluación y coevaluación por

$$\mathrm{ev_X : F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \to \Bbbk,}$$

$$\mathrm{ev_X(f\otimes y) = f(y),}$$

$$\mathrm{coev_X : \Bbbk \to F(X)\otimes_{\Bbbk}F(X)^*,}$$

$$\mathrm{coev_X(1) = \sum_i y_i\otimes f^i,}$$

donde $\{y_i\}, \{f^i\}$ son bases duales de $F(X)$. Se puede comprobar que la evaluación

$$\mathrm{ev_X : F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \to \Bbbk,}$$

es una transformación dinatural. Por lo tanto, por la propiedad universal del coend, existe un morfismo $\epsilon : C \to \Bbbk$ tal que el diagrama

(8.9)
$$\begin{tikzcd} F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "ev_X"'] & C \arrow[dl, "\epsilon"] \\ \Bbbk, & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Los morfismos dados por la composición

$$F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes coev_X\otimes \mathrm{id}} F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X)\otimes_{\Bbbk}F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \xrightarrow{\pi_X\otimes\pi_X} C\otimes_{\Bbbk}C,$$

también son transformaciones dinaturales. Luego, existe un morfismo $\Delta : C \to C\otimes_{\Bbbk}C$ tal que el diagrama

(8.10)
$$\begin{tikzcd} F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_X"'] & F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X)\otimes_{\Bbbk}F(X)^*\otimes_{\Bbbk}F(X) \arrow[d, "\pi_X\otimes\pi_X"] \\ C \arrow[r, "\Delta"'] & C\otimes_{\Bbbk}C \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

**Lema 8.26.** *La terna* $(C, \Delta, \epsilon)$ *es una* $\Bbbk$*-coálgebra.*

*Demostración.* Se va a ver la coasociatividad, es decir que $(\Delta\otimes\mathrm{id}\,)\circ\Delta = (\mathrm{id}\,\otimes\Delta)\circ\Delta$. Se observa que

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\mathrm{id}\,) \circ \Delta \circ \pi_X &= (\Delta\otimes\mathrm{id}\,)(\pi_X\otimes\pi_X)(\mathrm{id}\,\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id}\,)\\ &= (\pi_X\otimes\pi_X\otimes\pi_X)(\mathrm{id}\,\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id}\,\otimes\mathrm{id}\,\otimes\mathrm{id}\,)(\mathrm{id}\,\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id}\,).\end{aligned}$$

La primera y segunda igualdad sigue de la conmutatividad del diagrama 8.10. Por otro lado, nuevamente usando dos veces 8.10, se obtiene que

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta\circ\pi_X &= (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\pi_X\otimes\pi_X)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id}) \\ &= (\pi_X\otimes\pi_X\otimes\pi_X)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id}).\end{aligned}$$

Notar que las composiciones de $\mathrm{coev_X}$ coinciden en ambas ecuaciones.Por la propiedad del coend, se deduce la coasociatividad. Ahora se demostrará, utilizando la misma estrategia, que

$$(\epsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = \mathrm{id}_C = (\mathrm{id}\otimes\epsilon)\circ\Delta.$$

Por un lado se tiene

$$\begin{aligned}(\epsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta\circ\pi_X &= (\epsilon\otimes\mathrm{id})(\pi_X\otimes\pi_X)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id}) \\ &= (\mathrm{ev_X}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev_X}\otimes\mathrm{id})\pi_\mathrm{X} = \pi_\mathrm{X}.\end{aligned}$$

Luego, $(\epsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = \mathrm{id}_C$. La otra igualdad se demuestra de forma análoga. □

**Lema 8.27.** *Para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, el espacio vectorial $F(X)$ posee una estructura natural de $C$-comódulo a izquierda.*

*Demostración.* Se tienen isomorfismos naturales

$$\psi^U_{Y,Z} : \mathrm{Hom}_\Bbbk(Y^*\otimes_\Bbbk Z, U) \simeq \mathrm{Hom}_\Bbbk(Z, Y\otimes_\Bbbk U),$$

$$\psi^U_{Y,Z}(h) = (\mathrm{id}_Y\otimes h)(\mathrm{coev_Y}\otimes\mathrm{id_Z}).$$

Para todo $X \in \mathcal{C}$, se define

$$\rho : F(X) \to F(X)\otimes_\Bbbk C,$$

$$\rho = \psi^C_{F(X),F(X)}(\pi_X).$$

Para ver que $(F(X), \rho)$ es un $C$-comódulo, se debe demostrar que se satisface

$$(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\circ\rho = \mathrm{id}, \quad (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\rho = (\rho\otimes\mathrm{id})\circ\rho.$$

Estas igualdades quedan como ejercicio. □

*Observación* 8.28. Cuando $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial y el funtor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{vect}_\Bbbk$ tiene estructura monoidal, a la coálgebra $C$ se le puede dar estructura de álgebra de tal forma que es una biálgebra. Si $\mathcal{C}$ posee objetos duales, es decir es rígida, entonces $C$ posee estructura de álgebra de Hopf tal que existe una equivalencia monoidal $\mathcal{C} \simeq {}^C\mathrm{mod}$. Recíprocamente, toda álgebra de Hopf de dimensión finita $H$ posee un *funtor de fibra* canónico, el funtor de olvido

$$\mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{vect}_\Bbbk$$

que es monoidal, exacto y fiel. La propiedad de la categoría $\mathcal{C}$ de poseer un funtor de fibra caracteriza a las categorías tensoriales que aparecen como representaciones de álgebras de Hopf de dimensión finita. Los distintos funtores de fibra que puede poseer una misma categoría tensorial están parametrizados por ciertos ”2-cociclos”del álgebra de Hopf.

## 9. El producto tensorial de Deligne

Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales. En esta Sección se presentará el producto tensorial introducido por Deligne, ver [7]. Este producto tensorial es un artefacto muy interesante que está en el corazón de muchas demostraciones en categorías tensoriales. Una buena referencia es también el trabajo [20]. Todos los funtores en esta Sección serán aditivos $\Bbbk$-lineales.

Un *producto tensorial de Deligne* de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{A}$ munida de un funtor $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{A}$ exacto a derecha en cada variable tal que, para toda categoría abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{D}$, el funtor

$$\operatorname{Rex}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto G \circ F} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D})$$

es una equivalencia de categorías. Aquí la categoría $BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D})$ denota los bifuntores aditivos $\Bbbk$-lineales exactos a derecha en cada variable.

**Lema 9.1.** *Si el producto tensorial de dos categorías abelianas $\Bbbk$-lineales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ existe, es único salvo equivalencia.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales y funtores

$$F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{A}, \quad F' : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{A}'$$

tales que los funtores

$$\operatorname{Rex}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto G \circ F} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}),$$

$$\operatorname{Rex}(\mathcal{A}', \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto G \circ F'} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}),$$

son equivalencias de categorías para cualquier categoría abeliana $\mathcal{D}$. Usando las definiciones anteriores para $\mathcal{D} = \mathcal{A}'$, $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ respectivamente, existen funtores $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $\Psi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ tales que

$$\Phi \circ F \sim F', \quad \Psi \circ F' \sim F.$$

Entonces $\Phi \circ \Psi \circ F' \sim F' \sim \operatorname{Id}_{\mathcal{A}'} \circ F'$. Como componer con $F'$ induce una equivalencia, $\Phi \circ \Psi \sim \operatorname{Id}_{\mathcal{A}'}$. Análogamente se demuestra que $\Psi \circ \Phi \sim \operatorname{Id}_{\mathcal{A}}$ y, por lo tanto, las categorías $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ son equivalentes. □

De ahora en más, si el producto tensorial de dos categorías abelianas $\Bbbk$-lineales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ existe, se denotará por $\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$.

***Observación*** 9.2. Al funtor $F$ de la definición de producto tensorial se lo denota

$$\boxtimes : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2.$$

Para cada par $X \in \mathcal{C}_1, Y \in \mathcal{C}_2$, la imagen de este funtor se denota por $X \boxtimes Y$. Para enfatizar, a veces se denotará a este funtor $\boxtimes_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2} : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$. Si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}_1$, $g : X' \to Y'$ es un morfismo en $\mathcal{C}_2$, se denotará $f \boxtimes g : X \boxtimes X' \to Y \boxtimes Y'$ al morfismo en $\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$ dado por $f \boxtimes g = \boxtimes_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(f, g)$.

***Observación*** 9.3. Que el funtor

$$\operatorname{Rex}(\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2, \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto G \circ \boxtimes} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D})$$

sea una equivalencia de categorías implica que para toda categoría Abeliana $\mathcal{D}$ y toda transformación natural $\mu : F \circ \boxtimes \to G \circ \boxtimes$, donde $F, G : \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$ son dos funtores, existe una única transformación natural $\widetilde{\mu} : F \to G$ tal que $\widetilde{\mu} \circ \boxtimes = \mu$.

**Ejercicio 9.4.** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías abelianas $\Bbbk$-lineales tal que existe el producto $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$. Demostrar que existe una equivalencia $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \simeq \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C}$.

El siguiente resultado muestra que la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita tiene el rol de unidad para el producto tensorial de Deligne.

**Lema 9.5.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Existe una equivalencia* $\operatorname{vect}_{\Bbbk} \boxtimes \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$.

*Demostración.* Se mostrará que para toda categoría abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{A}$ existe una equivalencia

$$\operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \simeq BiFun_{e.d.}(\operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C}, \mathcal{A}).$$

Recordar de la Proposición 8.18, que existe un funtor exacto en cada variable

$$\triangleright : \operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}. \tag{9.1}$$

Sea $\Phi : \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to BiFun_{e.d.}(\operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C}, \mathcal{A})$ el funtor definido por

$$\Phi(F)(V, X) = F(V \triangleright X),$$

y el funtor $\Psi : BiFun_{e.d.}(\operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ definido por

$$\Psi(H)(X) = H(\Bbbk, X).$$

Como el funtor (9.1) es exacto en cada variable, si $F \in \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ entonces $\Phi(F)$ es exacto a derecha en cada variable. Se quiere ver que los funtores $\Psi$ y $\Phi$ dan una equivalencia de categorías. Si $F \in \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ entonces

$$\Psi(\Phi(F))(X) = \Phi(F)(\Bbbk, X) = F(\Bbbk \triangleright X) \simeq F(X).$$

El isomorfismo natural $F(\Bbbk \triangleright X) \simeq F(X)$ proviene del isomorfismo natural $\Bbbk \triangleright X \simeq X$ descripto en la Proposición 8.18. Así, $\Psi \circ \Phi \simeq \operatorname{Id}$. Por otro lado, si $H \in BiFun_{e.d.}(\operatorname{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C}, \mathcal{A})$ entonces

$$\begin{aligned} \Phi(\Psi(H))(V, X) = \Psi(H)(V \triangleright X) = H(\Bbbk, V \triangleright X) \simeq \\ \simeq H(\Bbbk \triangleleft V, X) \simeq H(V, X). \end{aligned}$$

El primer isomorfismo natural se debe al Ejercicio 8.21. $\square$

La demostración del siguiente resultado ha sido tomada de [8]. Ver también [20, Prop. 21].

**Proposición 9.6.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales finitas.*

(i) *El producto tensorial de Deligne $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ existe y es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita.*
(ii) *Si $A, B$ son $\Bbbk$-álgebras de dimensión finita, entonces existe una equivalencia de categorías*

$$_A\operatorname{mod} \boxtimes \operatorname{mod}_B \simeq {}_A\operatorname{mod}_B.$$

(iii) *El funtor* $\boxtimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ *es exacto en cada variable y satisface que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}}(X \boxtimes Y, X' \boxtimes Y') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y'),$$

*para todo* $X, X' \in \mathcal{C}$, $Y, Y' \in \mathcal{D}$.

*Demostración.* Se probará (ii). Para ls demostraciones de los otros enunciados referimos a [8]. El funtor

$$\otimes_{\Bbbk} : {}_A\mathrm{mod} \times \mathrm{mod}_B \simeq {}_A\mathrm{mod}_B$$

es exacto a derecha en cada variable. Se quiere ver que, para toda categoría abeliana 𝕜-lineal $\mathcal{A}$, el funtor

$$\Psi : \mathrm{Rex}\,({}_A\mathrm{mod}_B, \mathcal{A}) \to BiFun_{e.d.}({}_A\mathrm{mod} \times \mathrm{mod}_B, \mathcal{A})$$
$$\Psi(G) = G \circ \otimes_{\Bbbk},$$

es una equivalencia de categorías. Se define el funtor

$$\Phi : BiFun_{e.d.}({}_A\mathrm{mod} \times \mathrm{mod}_B, \mathcal{A}) \to \mathrm{Rex}\,({}_A\mathrm{mod}_B, \mathcal{A})$$

de la siguiente manera. Sea $H \in BiFun_{e.d.}({}_A\mathrm{mod} \times \mathrm{mod}_B, \mathcal{A})$ y se toma un objeto $X \in {}_A\mathrm{mod}_B$. Las acciones a derecha e izquierda de $X$ se denotarán por

$$\lambda^X : A \otimes_{\Bbbk} X \to X, \;\; \rho^X : X \otimes_{\Bbbk} B \to X.$$

Recordar del Ejercicio 8.21 que, el funtor $H$ posee isomorfismos naturales

$$\delta^V_{M,N} : H(M \otimes_{\Bbbk} V, N) \xrightarrow{\simeq} H(M, V \otimes_{\Bbbk} N),$$

Aquí la acción de $A$ sobre $M \otimes_{\Bbbk} V$ es en el primer tensorando y la acción de $B$ sobre $V \otimes_{\Bbbk} N$ es en el segundo tensorando. Se tienen dos morfismos:

$$f^H_X, g^H_X : H(X, B \otimes_{\Bbbk} B) \to H(X, B),$$
$$f^H_X = H(\rho^X, \mathrm{id}_B) \circ (\delta^B_{X,B})^{-1}, \quad g^H_X = H(\mathrm{id}_X, m_B),$$

donde $m_B$ es el producto del álgebra $B$. Se define entonces

$$\Phi(H)(X) = \mathrm{coKer}\,(f^H_X - g^H_X).$$

Queda como ejercicio para el lector demostrar que en efecto $\Phi(H)$ define un funtor y que si $H$ es exacto a derecha en cada variable, entonces $\Phi(H)$ es un funtor exacto a derecha. Se demostrará que existen isomorfismos naturales tales que

$$\Phi \circ \Psi \sim \mathrm{Id}\,, \quad \Psi \circ \Phi \sim \mathrm{Id}\,.$$

Para demostrar que existen isomorfismos naturales tales que $\Phi \circ \Psi(G) \sim G$ para todo $G \in \mathrm{Rex}\,({}_A\mathrm{mod}_B, \mathcal{A})$, basta con demostrar que para todo $X \in {}_A\mathrm{mod}_B$ existen isomorfismos naturales

$$G(X) \simeq \mathrm{coKer}\,(f^{G\circ\otimes_{\Bbbk}}_X - g^{G\circ\otimes_{\Bbbk}}_X). \tag{9.2}$$

Para todo $X \in {}_A\mathrm{mod}_B$, el conúcleo de la diferencia de los morfismos $\rho^X \otimes \mathrm{id}_B - \mathrm{id}_X \otimes m_B$

$$X \otimes_{\Bbbk} B \otimes_{\Bbbk} B \underset{\mathrm{id}_{X\otimes m_B}}{\overset{\rho^X \otimes \mathrm{id}_B}{\rightrightarrows}} X \otimes_{\Bbbk} B \xrightarrow{\rho^X} X \to 0 \tag{9.3}$$

resulta $(X, \rho_X)$. Como $G$ es exacto a derecha, preserva conúcleos y, por lo tanto, se tiene el isomorfismo (9.2).

Ahora se demostrará que existen isomorfismos naturales $\Psi \circ \Phi \sim \mathrm{Id}$. Se van a tomar $M \in {}_A\mathrm{mod}$ y $N \in \mathrm{mod}_B$ y $H \in BiFun_{e.d.}({}_A\mathrm{mod} \times \mathrm{mod}_B, \mathcal{A})$. Se deben encontrar isomorfismos naturales

$$\Phi(H)(M \otimes_{\Bbbk} N) \simeq H(M, N).$$

En pocas palabras, se debe calcular el conúcleo de la diferencia $f^H_{M\otimes_{\Bbbk} N} - g^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}$. Se mostrará que este conúcleo es $H(M, N)$, es decir que se tiene un diagrama de la forma:

$$H(M \otimes_{\Bbbk} N, B \otimes_{\Bbbk} B) \underset{g^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}}{\overset{f^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}}{\rightrightarrows}} H(M \otimes_{\Bbbk} N, B) \xrightarrow{H(\mathrm{id}\,, \rho^N)\delta^N_{M,B}} H(M, N). \tag{9.4}$$

Primero se probará que el morfismo $H(\mathrm{id}\,, \rho^N)\delta^N_{M,B}$ iguala a $f^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}$ y $g^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}$. En efecto,

$$\begin{aligned} H(\mathrm{id}\,, \rho^N)\delta^N_{M,B} f^H_{M\otimes_{\Bbbk} N} &= H(\mathrm{id}\,, \rho^N)\delta^N_{M,B} H(\rho^{M\otimes_{\Bbbk} N}, \mathrm{id}\,_B)(\delta^B_{M\otimes_{\Bbbk} N, B})^{-1} \\ &= H(\mathrm{id}\,, \rho^N) H(\mathrm{id}\,, \rho^N \otimes \mathrm{id}\,_B)\delta^{N\otimes_{\Bbbk} B}_{M,B} \\ &= H(\mathrm{id}\,, \rho^N(\mathrm{id}\,_N \otimes m_B))\delta^N_{M, B\otimes_{\Bbbk} B} \\ &= H(\mathrm{id}\,, \rho^N)\delta^N_{M,B} H(\mathrm{id}\,_N \otimes m_B) = H(\mathrm{id}\,, \rho^N)\delta^N_{M,B} g^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad sigue de la naturalidad de $\delta$ y de que $\rho^{M\otimes_{\Bbbk} N} = \mathrm{id}\,_M \otimes \rho^N$, la tercera sigue de la asociatividad de la acción de $N$ y (8.3). La cuarta igualdad se debe a la naturalidad de $\delta$.

Ahora se va a demostrar la propiedad universal del conúcleo. Tomar un morfismo

$$\alpha : H(M \otimes_{\Bbbk} N, B) \to Z$$

tal que $\alpha f^H_{M\otimes_{\Bbbk} N} = \alpha g^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}$. Utilizando (9.3) para $X = M \otimes_{\Bbbk} N$ y usando que $H$ es exacto a derecha en cada variable, se tiene que

$$\mathrm{coKer}\,(H(\mathrm{id}\,_M, \rho^N \otimes \mathrm{id}\,_B) - H(\mathrm{id}\,_M, \mathrm{id}\,_N \otimes m_B)) = H(\mathrm{id}\,_M, \rho^N). \tag{9.5}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha g^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}(\delta^N_{M,B\otimes B})^{-1} &= \alpha H(\mathrm{id}\,_{M\otimes_{\Bbbk} N}, m_B)(\delta^N_{M,B\otimes B})^{-1} \\ &= \alpha(\delta^N_{M,B})^{-1} H(\mathrm{id}\,_M, \mathrm{id}\,_N \otimes m_B). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a la naturalidad de $\delta$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \alpha f^H_{M\otimes_{\Bbbk} N}(\delta^N_{M,B\otimes B})^{-1} &= \alpha H(\mathrm{id}\,_M \otimes \rho^N, \mathrm{id}\,_B)(\delta^B_{M\otimes_{\Bbbk} N, B\otimes B})^{-1}(\delta^N_{M,B\otimes B})^{-1} \\ &= \alpha H(\mathrm{id}\,_M \otimes \rho^N, \mathrm{id}\,_B)(\delta^{N\otimes_{\Bbbk} B}_{M,B})^{-1} \\ &= \alpha(\delta^N_{M,B})^{-1} H(\mathrm{id}\,_M, \rho^N \otimes \mathrm{id}\,_B). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a (8.3) y la tercera por la naturalidad de $\delta$. Entonces se cumple que

$$\alpha(\delta^N_{M,B})^{-1} H(\mathrm{id}\,_M, \rho^N \otimes \mathrm{id}\,_B) = \alpha(\delta^N_{M,B})^{-1} H(\mathrm{id}\,_M, \mathrm{id}\,_N \otimes m_B).$$

Luego, por la universalidad del conúcleo (9.5), debe existir un morfismo $\beta : H(M, N\otimes_{\Bbbk}B) \to Z$ tal que

$$\alpha(\delta^N_{M,B})^{-1} = \beta H(\mathrm{id}\,, \rho^N).$$

Por lo tanto, $\alpha = \beta H(\mathrm{id}\,, \rho^N)\delta^N_{M,B}$.

Usando el Corolario 8.17 se puede ver que (ii) implica (i) y (iii). Observar que $\otimes_{\Bbbk}$ es exacto en cada variable. □

El siguiente Corolario se deduce de la demostración del resultado anterior. Más precisamente, se deduce de (9.3).

**Corolario 9.7.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales finitas. Para todo objeto $P \in \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ existen objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, $U, V \in \mathcal{D}$ y una sucesión exacta corta*

$$X \boxtimes U \to Y \boxtimes V \to P \to 0.$$

□

El siguiente resultado aparece en [31, Lemma 3.2]. Recordar de la Sección 8.2 que si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal, entonces $\mathcal{C}$ posee una acción de $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ que se denota por $\triangleright : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Los siguientes resultados se encuentran en los trabajos [28], [30].

**Teorema 9.8.** *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales finitas entonces el funtor*

$$\Psi : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathrm{Rex}\,(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

$$\Psi(X \boxtimes Y)(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)^* \triangleright Y,$$

*es una equivalencia de categorías. El funtor*

$$\Phi : \mathrm{Rex}\,(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{D}$$

$$\Phi(F) = \int_{X \in \mathcal{C}} X \boxtimes F(X),$$

*está bien definido y es un cuasi inverso de $\Psi$.*

*Demostración.* Como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías finitas, se puede asumir que existen álgebras de dimensión finita $A$ y $B$ tales que

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{mod}_A, \quad \mathcal{D} \simeq \mathrm{mod}_B.$$

En este caso la acción de $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ en $\mathrm{mod}_B$ es $V \triangleright X = V\otimes_{\Bbbk}X$, donde la acción de $B$ en $V\otimes_{\Bbbk}X$ está concentrada en el segundo tensorando. Observar que $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = {}_A\mathrm{mod}$. Se puede comprobar que el funtor $\Psi$ es la composición de las dos siguientes equivalencias:

$${}_A\mathrm{mod} \boxtimes \mathrm{mod}_B \to {}_A\mathrm{mod}_B,$$

$$X \boxtimes Y \mapsto X\otimes_{\Bbbk}Y,$$

$${}_A\mathrm{mod}_B \to \mathrm{Rex}\,(\mathrm{mod}_A, \mathrm{mod}_B),$$

$$M \mapsto (-)\otimes_A M.$$

Luego, $\Psi$ es una equivalencia de categorías. Si $\overline{\Psi}$ es un cuasi inverso de $\Psi$, entonces, para todo $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$, $F \in \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{D}}(X \boxtimes Y, \overline{\Psi}(F)) &\simeq \operatorname{Nat}(\Psi(X \boxtimes Y), F) \\
&\simeq \int_{Z \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\Psi(X \boxtimes Y)(Z), F(Z)) \\
&\simeq \int_{Z \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)^* \triangleright Y, F(Z)) \\
&\simeq \int_{Z \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)^*, \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, F(Z))) \\
&\simeq \int_{Z \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Z) \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, F(Z)) \\
&\simeq \int_{Z \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{D}}(X \boxtimes Y, Z \boxtimes F(Z)) \\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{D}}(X \boxtimes Y, \int_{Z \in \mathcal{C}} Z \boxtimes F(Z)).
\end{aligned}$$

El anteúltimo isomorfismo se debe a la Proposición 9.6 (iii). Notar que se ha usado el Corolario 8.15. Esto demuestra que $\Phi$ está bien definido y que es un cuasi inverso de $\Psi$. ☐

El siguiente importante resultado es debido a P. Deligne.

**Teorema 9.9.** [7, Proposition 5.13] *Sea $\Bbbk$ un cuerpo perfecto y sean $\mathcal{B}, \mathcal{N}, \mathcal{A}$ categorías abelianas$\Bbbk$-lineales finitas. Si $B : \mathcal{B} \times \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ es un funtor bilineal exacto en cada variable, entonces existe un untor exacto $B' : \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ tsl que $B' \circ \boxtimes \simeq B$ como funtores bilineales.* ☐

El siguiente resultado es un hermoso corolario del Teorema anterior. Este resultado fue tomado de [29].

**Corolario 9.10.** *Sea $\Bbbk$ un cuerpo perfecto y sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales finitas y sea $F \in \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ un funtor con adjunto a derecha $G$. El funtor $F$ es un objeto proyectivo de $\operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ si y sólo si*

(i) *para todo $X \in \mathcal{C}$ el objeto $F(X) \in \mathcal{D}$ es proyectivo;*
(ii) *para todo $Y \in \mathcal{D}$ el objeto $G(Y) \in \mathcal{C}$ es inyectivo.*

*Demostración.* El funtor $F \in \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es un objeto proyectivo si y solo si el funtor

$$\operatorname{Nat}(F, -) \circ \Psi : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{D} \to \operatorname{vect}_{\Bbbk}$$

es exacto. Aquí $\Psi : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{D} \to \operatorname{Rex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, es la equivalencia presentada en el Teorema 9.8. Sigue de [7, Proposition 5.13] que el funtor $\operatorname{Nat}(F, -) \circ \Psi$ es exacto si y solo si el bifuntor

$$\operatorname{Nat}(F, -) \circ \Psi \circ \boxtimes : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \operatorname{vect}_{\Bbbk}$$

es exacto en cada variable. Sean $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nat}(F,-)\circ\Psi\circ\boxtimes(X,Y) = \operatorname{Nat}(F,\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)^*\triangleright Y) &\overset{(4.2)}{\simeq} \int_{Z\in\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Z),\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)^*\triangleright Y)\\
&\simeq \int_{Z\in\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)^*\otimes_{\Bbbk}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Z),Y)\\
&\simeq \int_{Z\in\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)\triangleright F(Z),Y)\\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\int^{Z\in\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)\triangleright F(Z),Y)\\
&\overset{(8.4)}{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X,G(Y)).
\end{aligned}$$

De lo cual se deduce el resultado. □

## 10. Acciones de grupos en categorías

Sea $G$ un grupo finito y $\mathcal{C}$ una categoría abeliana 𝕜-lineal. Una *acción* de $G$ sobre $\mathcal{C}$ es una colección de funtores aditivos 𝕜-lineales $\{F_g : \mathcal{C}\to\mathcal{C}\}_{g\in G}$ equipados de isomorfismos naturales

$$\gamma_{g,h} : F_g\circ F_h \to F_{gh}, \quad \gamma_0 : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to F_1,$$

tales que para todo $g,h,f\in G$, $X\in\mathcal{C}$

$$(\gamma_{gh,f})_X(\gamma_{g,h})_{F_f(X)} = (\gamma_{g,hf})_X F_g((\gamma_{h,f})_X), \tag{10.1}$$

$$(\gamma_{g,1})_X F_g((\gamma_0)_X) = (\gamma_{1,g})_X(\gamma_0)_{F_g(X)}. \tag{10.2}$$

Un objeto $X\in\mathcal{C}$ se dice *equivariante* si está equipado de una familia de isomorfismos $s=\{s_g : F_g(X)\to X\}_{g\in G}$ tales que $s_1(\gamma_0)_X = \operatorname{id}_X$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} F_g(F_h(X)) \arrow[r, "F_g(s_h)"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_X"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\ F_{gh}(X) \arrow[r, "s_{gh}"'] & X \end{tikzcd} \tag{10.3}$$

es conmutativo para todo $g,h\in G$.

**Definición 10.1.** Decimos que la acción de $G$ en $\mathcal{C}$ es *unitaria* si $F_1 = \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$, $\gamma_0 = \operatorname{id}$, $\gamma_{g,1} = \operatorname{id} = \gamma_{1,g}$ para todo $g\in G$.

**Definición 10.2.** La categoría $\mathcal{C}^G$ es la categoría cuyos objetos son pares $(X,s)$ donde $X$ es un objeto equivariante. Si $(X,s)$, $(Y,r)$ son dos objetos equivariantes, un morfismo $f:(X,s)\to(Y,r)$ entre ellos es un morfismo $f:X\to Y$ en $\mathcal{C}$ tal que $f\circ s_g = r_g\circ F_g(f)$ para todo $g\in G$. La categoría $\mathcal{C}^G$ se llama la *equivariantización* de $\mathcal{C}$ por $G$.

**Ejemplo 10.3.** Sea $G$ un grupo finito. Entonces $G$ actua sobre $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ de forma trivial; es decir que para todo $g \in G$ los funtores

$$F_g : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$$

son las identidades. Además $\gamma_{g,h} = \mathrm{id}$. Veamos que existe una equivalencia $(\mathrm{vect}_{\Bbbk})^G \simeq \mathrm{Rep}(G)$. Sea $(X, s) \in (\mathrm{vect}_{\Bbbk})^G$. Vamos a definir una acción de $G$ en $X$ de la siguiente forma:

$$g \cdot x = s_g(x).$$

La conmutatividad del diagrama (10.3) implica que esta acción está bien definida. Este funtor $(\mathrm{vect}_{\Bbbk})^G \to \mathrm{Rep}(G)$ es claramente una equivalencia de categorías.

La demostración de la siguiente proposición queda como ejercicio para el lector.

**Proposición 10.4.** *Sea $G$ un grupo finito y $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal tal que $G$ actúa en $\mathcal{C}$.*

1. *La categoría $\mathcal{C}^G$ es Abeliana $\Bbbk$-lineal.*
2. *El funtor de olvido $\mathcal{F} : \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$, $\mathcal{F}(X, s) = X$ para todo $(X, s) \in \mathcal{C}^G$, es fiel.*
3. *Definamos el funtor $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^G$ dado por $L(X) = (\oplus_{h\in G} F_h(X), s^X)$, donde*
$$s^X_g : \oplus_{h\in G} F_g(F_h(X)) \to \oplus_{h\in G} F_h(X)$$
*está dado, componente a componente, por $\gamma_{g,h}$. Entonces $L$ es adjunto a derecha e izquierda de $\mathcal{F}$. En particular $\mathcal{F}$ es exacto.*
4. *Si $\mathcal{C}$ es además finita entonces $\mathcal{C}^G$ es finita.*
5. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana semisimple entonces $\mathcal{C}^G$ es semisimple.* □

Toda acción de un grupo $G$ en una categoría $\mathcal{C}$ produce una mónada asociada.

**Proposición 10.5.** *Asumamos que un grupo finito $G$ actua sobre una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$. Si definimos*

$$T = \oplus_{g\in G} F_g.$$

*Entonces $T$ tiene estructura de mónada sobre $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}^T \simeq \mathcal{C}^G$.*

*Demostración.* $T = \mathcal{F} \circ L$, donde $(L, \mathcal{F})$ es una adjunción, por lo que tiene estructura natural de mónada. □

**Ejemplo 10.6.** Sea $A$ un álgebra de dimensión finita. Asumamos que para todo $g, h \in G$ existen

- morfismos de álgebras $g_* : A \to A$;
- elementos $\theta_{g,h} \in A^\times$,

tales que para todo $a \in A$ y para todo $g, h, f \in G$

$$1_* = \mathrm{id}_A, \quad \theta_{g,h} h_*(g_*(a)) = (gh)_*(a)\theta_{g,h}, \quad \theta_{gh,f} f_*(\theta_{g,h}) = \theta_{g,hf}\theta_{h,f},$$

$$\theta_{g,1} = 1 = \theta_{1,g}.$$

Para todo $g \in G$ definimos

$$F_g : {}_A\text{mod} \to {}_A\text{mod}, \quad F_g(M) = M.$$

La acción de $A$ en $F_g(M)$ está dada por $a \triangleright m = g_*(a) \cdot m$, para todo $a \in A, m \in M$. Además definamos para todo $g, h \in G$, $M \in {}_A\text{mod}$, $m \in M$

$$\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh}, \quad (\gamma_{g,h})_M(m) = \theta_{g,h} \cdot m.$$

Es inmediato comprobar que esto induce una acción del grupo $G$ en la categoría ${}_A\text{mod}$. Si definimos sobre el espacio vectorial $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ el siguiente producto

$$(a \otimes g)(b \otimes h) = \theta_{g,h} h_*(a) b \otimes gh,$$

para todo $a, b \in A, g, h \in G$. Se puede comprobar que con esta estructura el espacio $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ es un álgebra.

**Afirmación 10.1.** *Se tiene una equivalencia de categorías*

$$({}_A\text{mod})^G \simeq {}_{A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G}\text{mod}.$$

*Demostración de la afirmación.* Sean $\Phi : ({}_A\text{mod})^G \to {}_{A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G}\text{mod}$, $\Psi : {}_{A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G}\text{mod} \to ({}_A\text{mod})^G$ los funtores definidos de la siguiente manera. Para todo $(X, s) \in ({}_A\text{mod})^G, M \in {}_{A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G}\text{mod}$ definamos

$$\Phi(X, s) = X, \quad \Psi(M) = (M, r).$$

Donde la acción de $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ en $X$ está dada por $(a \otimes g) \cdot x = s_g(a \cdot x)$. Para todo $g \in G$ los morfismos $r_g : M \to M$ se definen $r_g(m) = (1 \otimes g) \cdot m$. $\square$

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales equipadas de acciones de un grupo $G$ via funtores $F_g$ y $\widetilde{F}_g$, respectivamente. Sea $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que $H$ es $G$-*equivariante* si está equipado de isomorfismos naturales

$$\pi_g : H \circ F_g \to \widetilde{F}_g \circ H,$$

para todo $g \in G$, tales que

$$(\pi_1)_X H(\gamma_0)_X = (\widetilde{\gamma}_0)_{H(X)}, \quad (\pi_{gh})_X H(\gamma_{g,h})_X = (\widetilde{\gamma}_{g,h})_{H(X)} \widetilde{F}_g((\pi_h)_X)(\pi_g)_{F_h(X)}, \tag{10.4}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Si $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor $G$-equivariante, entonces podemos definir un funtor $H^G : \mathcal{C}^G \to \mathcal{D}^G$ de la siguiente forma. Si $(X, s) \in \mathcal{C}^G$ entonces $H^G(X, s) = (H(X), t)$, donde

$$t_g = H(s_g)(\pi_g^{-1})_X,$$

para todo $g \in G$. La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio.

**Proposición 10.7.** *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales equipadas de acciones de un grupo $G$.*

1. *Demostrar que existe una acción de $G$ en $\mathcal{C}$ unitaria y una equivalencia $G$-equivariante $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.*
2. *Si $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia $G$-equivariante, entonces $H^G : \mathcal{C}^G \to \mathcal{D}^G$ es una equivalencia de categorías.* $\square$

## Referencias

[1] M. Auslander, I. Reiten , S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No. 36, (1995).

[2] B. Bakalov y A. Jr. Kirillov, *Lectures on Tensor categories and Modular Functors* University Lecture Series **21**, AMS Providence, RI (2001).

[3] A.J. Berrick y M.E. Keating, *Categories and modules with K-theory in view*, Cambridge studies in advanced mathematics, volume 67 (2000).

[4] A. Bruguières y S. Natale, *Exact sequences of tensor categories*, Int. Math. Res. Not. **2011** (24) (2011) 5644–5705.

[5] A.Bruguières and A. Virelizier. *Quantum double of Hopf monads and categorical centers.* Trans. Amer. Math. Soc., 364(3) (2012) 1225–1279.

[6] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory-with aplications to finite groups and orders*, Wiley Classics Library Edition (1981).

[7] P. Deligne. *Cateories tannakiennes.* In The Grothendieck Festschrift, Vol. II, volume 87 of Progr. Math., pages 111–195. Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

[8] C.L. Douglas. C. Schommer-Pries and N. Snyder. *The balanced tensor product of module categories*, Kyoto J. Math. Volume 59, Number 1 (2019), 167–179.

[9] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob y E. Yudovina, *Introduction to representation theory*, American Mathematical Soc. Disponible en https://math.mit.edu/ etingof/reprbook.pdf.

[10] S. Eilenberg, *Abstract description of some basic functors*, J. Indian Math. Soc. 24, 231–234, (1960).

[11] P. Freyd, *Abelian Categories*, New York, Harper & Row (1966).

[12] J. Fuchs, G. Schaumann, and C. Schweigert. *Eilenberg-Watts calculus for finite categories and a bimodule Radford $S^4$ Theorem.* Transactions of the American Mathematical Society, 373(1) (2020) 1–40.

[13] J. Fuchs, G. Schaumann and C. Schweigert, *Module Eilenberg-Watts calculus*, Contemp. Math. 771, 117–136 (2021).

[14] J. Fuchs, G. Schaumann and C. Schweigert, *A modular functor from state sums for finite tensor categories and their bimodules*, Hamburger Beiträge zur Mathematik Nr. 812, preprint arxiv:1911.06214.

[15] J. Fuchs and C. Schweigert, *Internal natural transformations and Frobenius algebras in the Drinfeld center*, Transform. Groups 28, No. 2, (2023) 733–768.

[16] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323–448.

[17] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, AMS Chelsea Publishing, Providence, (1998).

[18] S.O. Ivanov, *Nakayama functors and Eilenberg-Watts theorems*, J. Math. Sci. 183 (2012) 675–-680.

[19] F. Constantino, N. Geer, B. Patureau-Mirand, A. Virelizier,*Chromatic Maps for Finite Tensor Categories*, https://arxiv.org/abs/2305.14626

[20] I. López Franco, *Tensor products of finitely cocomplete and abelian categories*, J. Algebra 396, (2013) 207–219.

[21] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, Graduate texts in mathematics; volume 5 (1971).

[22] M. Movshev, *Twisting in group algebras of finite groups*, Func. Anal. Appl. **27** (1994), 240–244.

[23] S. Natale, *Álgebras de Hopf y categorías tensoriales.* Trabajos de Matemática B 04/47. FaMAF. Notas de curso II Encuentro Nacional de Álgebra, La Falda, Agosto 2004.

[24] E. Riehl, Category theory in context. Mineola, NY: Dover Publications (2016; Zbl 1348.18001)

[25] N. Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes.* Bull. Soc. Math. Fr. 100, 417–430 (1972; Zbl 0246.14003)

[26] P. Schauenburg, *Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras.* München: R. Fischer (1992; Zbl 0830.16029)
[27] K. Shimizu. *The monoidal center and the character algebra.* J. Pure Appl. Algebra 221, No. 9, 2338–2371 (2017).
[28] K. Shimizu, *Further results on the structure of (Co)ends in fintite tensor categories*, Applied Categorical Structures, volume 28, (2020) 237-–286.
[29] K. Shimizu. *Integrals for finite tensor categories*, Algebr. Represent. Theory (2018). https://doi.org/10.1007/s10468-018-9777-5.
[30] K. Shimizu. *Relative Serre functor for comodule algebras*, Preprint arXiv:1904.00376.
[31] K. Shimizu. *On unimodular finite tensor categories*, Int. Math. Res. Notices 2017 (2017) 277–322.
[32] L. Silver, *Noncommutative Localizations and Applications,* J. of Alg. 7 (1964) 44–67.
[33] K.-H. Ulbrich, *Galois extensions as functors of comodules*, Manuscripta math. **59**, 391–397 (1987).
[34] K. H. Ulbrich, *On Hopf algebras and rigid monoidal categories.* Isr. J. Math. 72, No. 1–2, 252–256 (1990; Zbl 0727.16029)
[35] C. Walton, *Symmetries of Algebras*, Vol. 1. 619 Wreath Publishing, Oklahoma City, OK, 2024.
[36] C. E. Watts, *Intrinsic characterizations of some additive functors*, Proc. AMS **11** (1969), 5–8.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física,
Universidad Nacional de Córdoba,
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria,
(5000) - Córdoba, Argentina