Práctico 6

1. Usando la definición, determinar en cada caso si la integral es convergente o no, y cuando sea convergente calcular su valor.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$. (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$. (c) $\displaystyle\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(x)dx$. (e) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x^2-x-2)}$. (f) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$.

2. Determinar para cuáles valores de $p \in \mathbb{R}$ es convergente cada una de las siguientes integrales, y calcularla cuando exista.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$. (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$. (c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$.

3. Determinar en cada caso si la integral es convergente o no, mayorando o minorando el integrando, según convenga.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}\,dx$. (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx$.

(d) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$. (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$.

4. Determinar si la integral converge o no, usando el segundo criterio de comparación para integrales impropias.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\,dx$. (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+8^{1000}}}$.

5. Determinar en cada caso si la integral es convergente o no.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+e^{2x}}$. (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x\operatorname{sen} x}$. (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$. (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{\sqrt{3}}}\,dx$.

6. Determinar el área bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^2-4}$, en la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3, y \geq 0\}$.

7. (a) Determinar en cada caso si existe: $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ y $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} x\,dx$.

(b) Mostrar que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existe, entonces también existe $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$ y su valor es igual a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

(c) Concluir por qué no sería apropiado definir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ como $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$.

Ejercicios adicionales

(para practicar antes de los exámenes)

8. Indicar en cada caso si es verdadero o falso. Justificar.

(a) Para todo $r \in \mathbb{R}$, $\int_0^\infty x^r\,dx$ no converge.

(b) Si $\int_1^\infty f\,dx$ converge, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.