# UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

# FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "A"

# TRABAJOS DE FÍSICA

N° 14/2012

# MEDICIÓN DE LA CONSTANTE DIELÉCTRICA

Máximo E. Ramia, Carlos A. Martín y Miguel A. Chesta



Editores: Miguel A. Chesta-Ricardo C. Zamar

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA



Serie A 2 (2012) 17-47

## MEDICIÓN DE LA CONSTANTE DIELÉCTRICA

Técnica Experimental y Estudio de Rocas Sedimentarias Máximo E. Ramia, Carlos A. Martín y Miguel A. Chesta Facultad de Matemática, Astronomía y Física – Universidad Nacional de Córdoba Ciudad Universitaria – X5016LAE Córdoba – Argentina ramia @famaf.unc.edu.ar

#### Resumen

La modelización de un sistema poroso natural requiere la determinación de la distribución de poros, es decir su abundancia versus su tamaño, y el grado de conectividad de éstos, es decir la densidad de gargantas porales, caracterizadas por su sección promedio y su tortuosidad. Estos resultados son de especial importancia a la hora de evaluar tanto reservorios hídricos como petrolíferos, ya que el conocimiento de estos datos determina la capacidad de explotación de los reservorios. Este trabajo presenta un método de obtención de la tortuosidad y sección de gargantas porales midiendo la constante dieléctrica de las muestras mediante la utilización de un analizador de redes, y los límites del método experimental, los que están condicionados por las distintas partes que forman el arreglo instrumental. Las mediciones se realizaron sobre rocas sedimentarias constituidas por una berea y una arenisca típica de la formación San Jorge.

## Introducción Teórica

Cuando un campo eléctrico externo,  $\vec{E}$ , es aplicado a la materia se establecen una densidad de corriente de conducción,  $\vec{J}_c$ , tal que

$$\vec{J}_c = \sigma_c \vec{E} \tag{1}$$

donde  $\sigma_c$  es la conductividad estática debido a cargas en movimiento, y una densidad de corriente de desplazamiento  $\vec{J}_D$  con

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2}$$

17

donde el campo de "Desplazamiento Eléctrico" o "Densidad de Flujo Eléctrico",  $\vec{D}$ , está relacionado al campo eléctrico por

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{3}$$

donde  $\varepsilon$  es la "Permitividad Eléctrica" del medio o "Permitividad o Constante Dieléctrica". Y para el caso en que  $\vec{E}$  dependa de t de manera armónica, es decir como  $e^{j\omega t}$ , de las ecuaciones de Maxwell obtenemos

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \vec{J}_c + \vec{J}_D$$
(4)

donde  $\vec{H}$  es la "Intensidad de Campo Magnético" y  $\vec{J}$  es la densidad de corriente total, que consta de dos partes una generada por la inyección de cargas por fuentes externas, la segunda por las cargas existentes en el dieléctrico y movidas por efecto del campo eléctrico, y el último término es la densidad de corriente de desplazamiento [1]. En nuestro arreglo experimental el dieléctrico no se encuentra en contacto con las placas del capacitor por lo tanto  $\vec{J}_i$  es cero, e introduciendo (1) en (4) se tiene

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma_c \vec{E} + j\omega \vec{D} \tag{5}$$

En la mayoría de los materiales existen en general tres tipos de dipolos eléctricos que pueden estar presentes y contribuir a la constante dieléctrica, a saber

- 1) Dipolos eléctricos pertenecientes a moléculas con momentos dipolares permanentes que se reorientan por efecto del campo eléctrico, por ejemplo las moléculas de agua.
- 2) Dipolos eléctricos que provienen de la contribución de dipolos iónicos debidos a la presencia de sales, por ejemplo  $Na^+Cl^-$  y de sus entornos de solvatación.
- Dipolos eléctricos debidos a la polarización de las nubes electrónicas de átomos por efecto del campo eléctrico.

Por lo tanto, cuando un campo eléctrico es aplicado al material causa que el desplazamiento eléctrico sea

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + j \varepsilon_r''$$
(6)

Donde  $\varepsilon_0 = 8.854 \ 10^{-12} \ Fm^{-1} = 8.854 \ pFm^{-1}$  es la permitividad eléctrica del vacío,  $\chi_e$  es la susceptibilidad eléctrica del medio y en general es una magnitud compleja, y  $\varepsilon_r$  se la define como la permitividad relativa del medio.

Cuando el campo eléctrico aplicado es dependiente del tiempo, en particular es oscilatorio con una frecuencia  $\omega$  angular, la permitividad relativa,  $\varepsilon_r$ , es una función compleja de la frecuencia y su componente imaginaria da cuenta de la pérdida de energía tanto rotacional de los dipolos eléctricos como por colisiones entre las cargas. Y cuanto más grande sea la componente imaginaria mayor será la energía disipada por los movimientos.

Definiendo la "Permitividad Dieléctrica compleja" como

$$\varepsilon^*(\omega) \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon' - j\varepsilon'' \tag{6}$$

Entonces de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma_c \vec{E} + j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\vec{E}$$
$$= (\sigma_c + \omega\varepsilon'')\vec{E} + j\omega\varepsilon'\vec{E}$$
$$= \sigma_e \vec{E} + j\omega\varepsilon'\vec{E}$$
(7)

Donde  $\sigma_e = \sigma_c + \omega \varepsilon''$  se la denomina "Conductividad Eléctrica Efectiva". Adicionalmente (7) puede reescribirse como

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon' \left(1 - j\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon'} - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)\vec{E}$$
(8)

En la cual el término  $\sigma_c/\omega\varepsilon'$  da cuenta de la pérdida de energía por colisiones entre electrones y el término  $\varepsilon''/\varepsilon'$  involucra todos los otros efectos de pérdida de energía de movimiento de los dipolos que se disipa como calor. En medios dieléctricos este término es dominante, pero en metales conductores eléctricos  $\varepsilon' \approx \varepsilon_0$ , y  $\varepsilon'' \approx 0$  por lo tanto su contribución es casi nula. En medios semiconductores ambos términos poseen contribuciones balanceadas. Así es que para metales (8) puede aproximares como

$$\nabla \times \vec{H} \cong j\omega\varepsilon' \left(1 - j\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon'}\right) \vec{E} = (\sigma_c + j\omega\varepsilon')\vec{E}$$
(9)

Y para medios dieléctricos con una conductividad pobre se tiene

$$\nabla \times \vec{H} \cong j\omega\varepsilon' \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \vec{E} = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'') \vec{E} = j\omega\varepsilon^* \vec{E} = j\omega\vec{D}$$
(10)

Como vemos de las ecuaciones (1) a la (7)

$$\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_D = (\sigma_c + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\vec{E}$$
(11)

Ecuación a partir de la cual nos permite definir una conductividad compleja  $\sigma^{*}$  como

19

$$\vec{J} = (\sigma_c + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\vec{E} = \sigma^*(\omega)\vec{E}$$

$$\sigma^*(\omega) = \sigma_c + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \equiv \sigma'(\omega) + j\sigma''(\omega)$$
(12)

Por otro lado podemos reescribir (8) como

$$(\sigma_c + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)\vec{E} = j\omega\varepsilon_0\left(\frac{\sigma_c}{j\omega\varepsilon_0} + \varepsilon_r\right)\vec{E} = j\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - j\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon_0}\right)\vec{E}$$
(13)

Que reintroducida en (4) permite definir

$$\varepsilon^*(\omega) = \left(\varepsilon_r - j\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon_0}\right) \equiv \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) \tag{14}$$

Y relacionar la conductividad eléctrica efectiva con la permitividad dieléctrica efectiva mediante

$$\sigma^*(\omega) = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r = j\omega\varepsilon^*(\omega) \tag{15}$$

siendo las partes real e imaginaria de la conductividad

$$\sigma'(\omega) = \omega \varepsilon''(\omega)$$

$$\sigma''(\omega) = \omega \varepsilon'(\omega)$$
(16)

Para un material dieléctrico que llena el espacio entre las placas de un capacitor, cuya área de cada placa es A y su separación d, la conductividad compleja  $\sigma^*(\omega)$  se relaciona con la admitancia compleja Y mediante

$$\sigma^* = Y \frac{d}{A} = \frac{Y}{\lambda_0} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r = j\omega\varepsilon^*$$
(17)

#### El Circuito de Medición o Cabezal Capacitivo

El método de medición consiste en llenar un capacitor de placas planas paralelas, con el material a medir, formando parte de un circuito conectado a un "Analizador de Redes". A los efectos de medir apropiadamente la constante dieléctrica es necesario conocer los límites y el comportamiento con la frecuencia del circuito capacitivo de medición. Dicho circuito, figura 1, se conecta en el nodo de medición, M, al analizador de redes y puede esquematizarse como



Figura 1: Circuito equivalente del cabezal capacitivo.



Figura 2: Capacitor de placas circulares.

Donde la impedancia del capacitor, figura 2, sin dieléctrico es  $Z_0$ ,  $Z_x$  es la impedancia de la porción del capacitor de medición ocupada por el material dieléctrico, y  $Z_f$  es la capacidad dispersa del capacitor de medición; por último  $Z_l$  y  $R_l$  son la impedancia de la línea y su resistencia respectivamente. Es importante destacar que  $Z_x$ ,  $Z_f$  y  $Z_l$  son impedancias capacitivas en paralelo a ser determinadas experimentalmente.

La Impedancia de un circuito está definida como

$$Z = R + jX \tag{18}$$

siendo R es la resistencia óhmica y X la reactancia del circuito. A partir de la cual definimos la "Admitancia" como

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j\frac{-X}{R^2 + X^2} = G + jB$$
(19)

donde G es la "Conductancia" y B es la "Suceptancia", y para un circuito capacitivo puro la reactancia es

$$X = \frac{-1}{\omega c} \tag{20}$$

El capacitor de "Placas Circulares": Por conveniencia debido a la forma cilíndrica de las muestras de rocas sedimentarias, el capacitor de medición es cilíndrico, de manera que está formado por dos placas planas, paralelas de radio *R* y separación *d*, tal que

$$c_0 = \varepsilon_0 \ \pi \frac{R^2}{d} = \varepsilon_0 \lambda_0 \tag{21}$$

Teniendo en cuenta que existen líneas de campo dispersas, "fringe lines", por fuera del volumen entre las placas, la verdadera capacidad utilizando la fórmula de Kirchhoff [2] resulta

$$c = \varepsilon_0 \pi \frac{R^2}{d} + \varepsilon_0 R \left[ ln \left( \frac{16\pi (d+t)R}{d^2} \right) + \frac{t}{d} ln \left( \frac{d+t}{d} \right) - 3 \right]$$
  
$$= \varepsilon_0 \pi \frac{R^2}{d} \left\{ 1 + \frac{d}{\pi R} ln \left( \frac{16\pi (d+t)R}{d^2} \right) + \frac{t}{\pi R} ln \left( \frac{d+t}{d} \right) - \frac{3d}{\pi R} \right\}$$
(22)  
$$\cong \varepsilon_0 \pi \frac{R^2}{d} \left\{ 1 + \frac{d}{R} \left[ \frac{1}{\pi} ln \left( \frac{16\pi R}{d} \right) - 1 \right] \right\} = c_0 f \left( \frac{d}{R} \right)$$

En la cual *t* es el espesor de las placas y ha sido despreciado en la aproximación final. Por ejemplo para un diámetro de 40 *mm* y una separación de 4 *mm*, se tiene

$$R = 20 mm = 0.02 m$$
,  $d = 4 mm = 0.004 m$ ,  $t = 1 mm = 0.001m$ 

El segundo, tercer y cuarto sumando entre las llaves en (22) poseen los siguientes valores respectivamente

$$0.1895$$
,  $3.5 \ 10^{-3}$ ,  $0.1911$ 

Lo cual justifica la aproximación realizada en la tercera línea de (22); y consecuentemente  $f(0.2) \cong$  1.161. Por lo tanto si consideramos que el capacitor real es la suma en paralelo de dos capacitores, uno que contiene las líneas de campo entre las placas y otro que da cuenta de las líneas dispersas, se tiene

$$c = c_0 + c_f \Rightarrow c_f = 0.161 c_0$$
 (23)

con  $c_0 \cong 2.2 \ pF$ . La figura 3 muestra un gráfico de f como función de d/R.

Otro punto relevante a tener en cuenta son los límites en frecuencia para los cuales el circuito de medición es el adecuado, es decir que éste se comporta como una impedancia puramente capacitiva. En el circuito real no sólo interviene el capacitor, sino que forman parte de éste los conductores que conectan las placas del capacitor y el conector que acopla el capacitor al analizador de redes en el punto *M*. Principalmente existen dos contribuciones que limitan la performance del circuito, siendo una el aumento de la resistencia de los conductores, debido a la disminución de la profundidad de penetración de la radio frecuencia, y la otra es el aumento de la inductancia parásita, debido a las curvas de los conductores y corrientes de Eddy o auto-inducidas en las placas del capacitor, ambas se incrementan a medida que aumenta la frecuencia. El límite inferior de frecuencia está determinado por la sensibilidad del analizador de redes a bajas frecuencias. Para un conductor de sección cilíndrica la profundidad de penetración puede verse como el espesor del metal,  $\delta$ , figura 4, por el cual circula la corriente

$$\delta = r_1 - r_2 \tag{24}$$
$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\,\mu}}$$



Figura 3: Fracción incremental f de la capacidad.



Figura 4: Esquema de penetración de un campo alternado en un conductor cilíndrico.

Siendo para el cobre  $\mu \cong \mu_0 = 4\pi \ 10^7 \ mkgC^{-2}$  y  $\rho = 1.68 \ 10^{-8} \ \Omega m$ ; por otro lado

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$$A = \pi (r_1^2 - r_2^2) \cong 2\pi \delta r_1$$
(25)

luego

$$R \cong \frac{\rho l}{2\pi r_1} \sqrt{\frac{2\pi\mu_0 \nu}{\rho}} = \frac{l}{r_1} 10^3 \sqrt{10 \ \rho \nu}$$
(26)

La figura 5 muestra *R* en función de la frecuencia para un alambre de cobre de 1 *mm* de sección y 50 *mm*.

Considerando que en el rango de medición la componente inductiva del circuito es  $L \approx 0$ . Los valores de la magnitud de X en el rango de frecuencias de trabajo y considerando  $c_0 = 2.2 \ pF$ , resultando

$$3.6 \ 10^9 \ge |X| \ge 3.6 \ 10^2$$
 en el rango  $20 \ Hz \ a \ 200 \ MHz$  (27)

Y como  $R \le 15 \Omega$  en todo el rango de frecuencias de interés, podemos aproximar el denominador de (19) como  $X^2$ , y por lo tanto

$$G = \frac{R}{X^2} = R\omega^2 c^2$$

$$B = -\frac{1}{X} = \omega c$$
(28)

A los efectos de justificar esta aproximación se midió tanto |Z|, el ángulo  $\theta$  de la impedancia,  $B_0 \neq G_0$  del capacitor sin dieléctrico en función de  $\nu$ , figuras 6, 7, 8 y 9.



Figura 5: Resistencia de un alambre de cobre vs frecuencia.



Figura 6: Módulo de la impedancia del cabezal capacitivo vs frecuencia.



Figura 7: Ángulo  $\theta$  de la impedancia vs frecuencia.



Figura 8: Resistencia del cabezal capacitivo vs frecuencia.

De la figura 6 es claro que existen dos zonas de frecuencia con dos mecanismos que dominan los valores de la impedancia. Adicionalmente, se puede ver a partir del comportamiento cuasi lineal de  $\theta(\omega)$  que no solo aumenta R sino que aparece una componente inductiva en serie a la capacidad. El cambio en los valores de  $\theta(\omega)$  van entre -89.9° a -79.2° aproximadamente en el rango de medición, ver figura 7. La figura 8 muestra los valores de la resistencia  $R = |Z| \cos \theta$  en función de la frecuencia. Por otra parte  $B_0(\omega)$ , figura 9, muestra un comportamiento cuasi lineal en el rango de 20  $H_z$  a 200 Mhz, tal como se espera de la ecuación (28), el gráfico también muestra los resultados de un ajuste lineal y cuadrático de los datos.

La figura 10 muestra el comportamiento de  $G_0(\omega)$  en el mismo rango de la figura 9. Los datos muestran un comportamiento cuasi cuadrático de los valores de la conductancia en función de la frecuencia tal como lo esperado a partir de la ecuación (28).



Figura 9: Susceptancia del cabezal capacitivo vs frecuencia.



Figura 10: Conductancia del cabezal capacitivo vs frecuencia.



Figura 11: Razón Susceptancia sobre frecuencia vs frecuencia del cabezal capacitivo.

Como método de determinación del rango adecuado de frecuencias para el cual el comportamiento del circuito de medición puede ser asumido como capacitivo se lo obtiene de considerar cuando el cociente de los valores de la suceptancia con la frecuencia, teniendo en cuenta sus errores experimentales, se apartan de un valor constante tal como lo esperado a partir de la ecuación (28). Como se muestra en la figura 11 un rango adecuado y seguro de medición para este circuito es para frecuencias  $\nu \leq 200 MHz$ .

#### **Resultados Vinculados a la Petrofísica**

Todo el desarrollo anterior tiene por objeto determinar la "Tortuosidad" de un sistema poroso mediante la ley de Archie [3]. En rigor de exactitud, la ley de Archie relaciona la tortuosidad promedio, *T*, la resistividad, a corriente continua, de la roca completamente hidratada,  $\rho_R$ , y la de la solución de saturación,  $\rho_{ss}$ , respectivamente y la porosidad,  $\phi$ , de la roca sedimentaria de manera que

$$\frac{\rho_R}{\rho_{ss}} = \frac{T}{\phi^2} \tag{29}$$



Figura 12: Modelo tortuoso de canal de poros.

Donde T es la tortuosidad y está definida como el cociente entre la longitud l del canal capilar promedio, que conecta dos extremos de la roca con la longitud L de ésta, siendo

$$T = \frac{l}{L} \tag{30}$$

una visualización de este concepto se encuentra en la figura 12.

A los efectos de determinar *T* es necesario medir ambas  $\rho_R \neq \rho_{ss}$  lo cual trae aparejado importantes inconvenientes experimentales, ya que debido a la rugosidad e irregularidad de la superficie de la roca es muy difícil realizar un contacto adecuado con electrodos para medir las resistividades correspondientes; más aún, considerando que la distribución de agua sobre la superficie es absolutamente heterogénea se termina midiendo resistividades superficiales. Por lo tanto el método adecuado es medir la conductividad para campo alternado mediante la corriente de desplazamiento, y extrapolar su valor a frecuencia cero, y de este valor obtener la resistividad. La relación entre la permitividad dieléctrica compleja, a la frecuencia $\omega$ , y la conductividad a corriente continua en una roca sedimentaria [4], es en primera aproximación, descripta por

$$\varepsilon_{r}(\omega) = \left[\varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_{s} - \varepsilon_{\infty}}{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_{rel}}\right)^{1-\beta}}\right] - \frac{j\sigma_{dc}}{\omega\varepsilon_{0}}$$
(31)

donde  $\varepsilon_s$  y  $\varepsilon_{\infty}$  son el valor estático y el límite a altas frecuencias de la permitividad dieléctrica respectivamente, por ejemplo para el agua estos valores son 80 y 4.22;  $\omega_{rel}$  es la frecuencia de relajación dieléctrica de la roca, para el agua su valor es 17.1 *GHz*;  $\beta$  es un parámetro empírico el cual describe el ensanchamiento en frecuencia de relajación del sistema, para agua pura y otros líquidos puros  $\beta = 0$  y para arenas sedimentarias hidratadas  $0.0125 \le \beta \le 0.2$ ; y  $\sigma_{dc}$  es la conductividad a corriente continua.

#### Método de Medición de la Constante Dieléctrica

Considerando el circuito de medición, figura 2, resulta evidente que cada vez que se mide la constante dieléctrica, de una muestra alojada en el capacitor, medimos simultáneamente las contribuciones de las líneas de campo en la entreplaca, no llenada completamente por la muestra, y el campo disperso del capacitor. Por lo tanto, y teniendo en cuenta la definición de la admitancia (19), el método propuesto consiste en medir la admitancia,  $Y_m$ , una vez con el capacitor sin la muestra,  $Y_m^0$ , y la otra con el capacitor con la muestra,  $Y_m^x$ . De manera tal que

$$Y_m^0 = Y_L + Y_f + Y_0$$

$$Y_m^x = Y_L + Y_f + Y_x$$
(32)

Donde  $Y_0$  e  $Y_x$  son las admitancias correspondientes a la porción del capacitor vacio que llenaría la muestra y la correspondiente a la misma porción del capacitor con la muestra. El resto de la capacidad sobrante está contenida en  $Y_f$ . Restando ambas ecuaciones de (32) y considerando el resultado de la ecuación (17) se obtiene

$$Y_m^x - Y_m^0 = Y_x - Y_0 = j\varepsilon_0\varepsilon_r \omega \lambda_0 - j\varepsilon_0 \omega \lambda_0$$
  
=  $j\varepsilon_0 \omega \lambda_0 [\varepsilon_r - 1] = j\omega\lambda_0 [\varepsilon' - j\varepsilon'' - \varepsilon_0]$  (33)  
=  $\omega\lambda_0 [\varepsilon'' + j(\varepsilon' - \varepsilon_0)]$ 

Teniendo en cuenta la definición de la admitancia, (19), podemos escribir

$$Y_m^x - Y_m^0 = G_m^x - G_m^0 + j(B_m^x - B_m^0)$$
(34)

Y combinando las ecuaciones (33) y (34) obtenemos

$$\Delta G = G_m^x - G_m^0 = \omega \lambda_0 \varepsilon''$$

$$\Delta B = B_m^x - B_m^0 = \omega \lambda_0 (\varepsilon' - \varepsilon_0)$$
(35)

Es importante notar que para rocas sedimentarias  $\varepsilon' \gg \varepsilon_0$  para frecuencias tales que  $\nu \leq 200 MHz$ , en el rango de esta aproximación y de la ecuación (35) para bajas frecuencias

$$\Delta G = \omega \,\lambda_0 \,\varepsilon'' = \lambda_0 \,\sigma'(\omega) \tag{36}$$
$$\Delta B \cong \omega \,\lambda_0 \,\varepsilon' \cong \lambda_0 \,\sigma''(\omega)$$

y en forma exacta a partir de (35) obtenemos

$$\Delta G = G_m^x - G_m^0 = \lambda_0 \ \sigma'$$

$$\Delta B = B_m^x - B_m^0 = \lambda_0 (\sigma'' - \varepsilon_0 \omega)$$
(37)

Por lo tanto

$$\sigma'(\omega) = \frac{\Delta G(\omega)}{\lambda_0}$$
(38)  
$$\sigma''(\omega) = \frac{\Delta B(\omega)}{\lambda_0} + \varepsilon_0 \omega$$

La aproximación de la ecuación (36) puede aplicarse a los resultados de medir la permitividad dieléctrica a bajas frecuencias, midiendo simultáneamente tanto las conductancias y suceptancias del cabezal de medición vacio y con la muestra, y de sus diferencias, por lo expresado en las ecuaciones (36) y (2-*B*), se obtiene a partir de estas para  $\alpha \ll 1, \beta \le 0.5$ 

$$\Delta G \cong \lambda_0 \frac{D}{\omega^{\alpha}} + \varepsilon_0 \lambda_0 \Delta \varepsilon \sqrt{2} \left(\frac{\omega}{\omega_{rel}}\right)^{1-\beta} \omega$$

$$\Delta B \cong \lambda_0 \left(\sqrt{2}\varepsilon_s - \frac{2}{5}\varepsilon_{\infty}\right) \omega + \frac{3}{2}\lambda_0 \alpha \frac{D}{\omega^{\alpha}}$$
(39)

Ajustando los datos experimentales medidos de  $\Delta G$  y  $\Delta B$ , con las ecuaciones (39), obtenemos los valores de la conductividad a frecuencia cero, tanto para una roca sedimentaria ceca como hidratada. La porosidad total la determinamos mediante comparación de pesos y volúmenes entre las rocas seca e hidratada. Y a partir de los valores de las resistividades y la porosidad introducidos en la ecuación (29) se obtiene la tortuosidad. Adicionalmente, a partir de la porosidad irreducible, la cual obtenemos realizando un procedimiento de centrifugación de la roca hidratada, y realizando el mismo conjunto de mediciones de  $\Delta G$  y  $\Delta B$ , obtenemos la tortuosidad asociada a la permeabilidad de los fluidos móviles y a los fluidos irreducibles respectivamente. Esto resultados pueden correlacionarse directamente a las distribuciones de tamaños de poros medidas por Resonancia Magnética Nuclear y otras técnicas obteniéndose un conjunto de datos valiosos sobre las rocas sedimentarias bajo estudio [5,6].

#### **Constante Dieléctrica en Rocas Sedimentarias**

La interacción de la energía electromagnética con la materia está gobernada por las características del material y la frecuencia del campo electromagnético. Esta última dependencia se debe a que la permitividad dieléctrica del material es afectada por pérdidas de energía debidas a mecanismos de relajación que operan a diferentes frecuencias. En una roca sedimentaria los mecanismos de relajación son atribuidos a los materiales que constituyen los granos de arena, al agua en los poros y a fenómenos de mojabilidad en las interfaces. La figura 13 muestra algunos de los diferentes tipos de mecanismos de absorción de energía y sus rangos de frecuencias donde son dominantes. La mayoría

de las herramientas geofísicas de superficie o bajadas en pozos operan en algún rango de estas frecuencias y donde el agua ligada es el principal mecanismo de interés. Como lo expresado en (6) la constante dieléctrica relativa  $\varepsilon_r$  posee tanto una parte real  $\varepsilon'_r$  como una parte imaginaria  $\varepsilon''_r$ , y es el comportamiento de estas partes que determinan permitividad eléctrica en función de la frecuencia. En el rango de 100  $H_z$  a 10  $GH_z$  la permitividad dieléctrica puede describirse como la superposición de cuatro términos, cada uno de ellos asociado a un rango de frecuencias en particular, y que representan el comportamiento de la ecuación (31). A saber: Un término real y constante,  $\varepsilon_{\infty}$ ; en el rango de 100  $H_z$  a 10  $kH_z$  una función compleja de potencias par bajas frecuencias,  $\varepsilon_{PBF}$ , que responde a mecanismos de transportes de carga; en el rango de 10  $kH_z$  a 1  $GH_z$  es una función compleja que describe la polarización molecular de acuerdo al modelo de Maxwell-Wagner,  $\varepsilon_{WM}$ ; y para frecuencias mayores a 1 GHz otra función compleja de potencias,  $\varepsilon_{PAF}$ , que da cuenta de distintos mecanismos dispersivos moleculares [7]. De manera que

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \varepsilon_{PBF}(\omega) + \varepsilon_{MW}(\omega) + \varepsilon_{PAF}(\omega)$$
(40)

donde

$$\varepsilon_{PBF}(\omega) = \frac{D}{\varepsilon_0(j\omega)^Q} \tag{41}$$

$$\varepsilon_{MW}(\omega) = \frac{\Delta\varepsilon}{1 + (j\tau\omega)^{1-\beta}}$$
(42)

$$\varepsilon_{PAF}(\omega) = \frac{A}{\varepsilon_0 (j\omega)^N} \tag{43}$$

y tanto  $\Delta \varepsilon$ ,  $\beta$ , con  $(0 < \beta < 1)$ , D, A, Q y N tal que  $(0 < N < Q \le 1)$  son parámetros reales,  $\tau \equiv \omega_{rel}^{-1}$ , y  $\Delta \varepsilon = (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})$ . Y utilizando la ecuación (15) obtenemos

$$\sigma^*(\omega) = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty + D(j\omega)^\alpha + \frac{j\omega\varepsilon_0\Delta\varepsilon}{1 + (j\tau\omega)^{1-\beta}} + A(j\omega)^\gamma$$
(44)

donde los exponentes  $\alpha = 1 - Q$  y  $\gamma = 1 - N$ , y

$$\sigma_{dc} = \frac{\sigma'(\omega)}{\omega^{\alpha}} = (2\pi)^{\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) D \tag{45}$$

34

Obteniendo los resultados experimentales mediante un ajuste simultáneo de las componentes real e imaginaria [8] de la constante dieléctrica y/o de la conductividad compleja.



Figura 13: Comportamiento esperado de las componentes de la constante dieléctrica relativa vs frecuencia.

# **Resultados Experimentales**

Las figuras 14 a 19 muestran las componentes real e imaginarias de la constante dieléctrica, la tangente de pérdida y la conductividad compleja de dos rocas totalmente diferentes. Las primeras, figura 14, 17 y 18, muestran la constante dieléctrica correspondiente a una berea totalmente lavada e hidratada, hasta alcanzar su saturación, centrifugada y seca. La figura 15 muestra la tangente de pérdida en función de la frecuencia. De la extrapolación de los datos de  $tg(\delta)$  a frecuencia cero [13-*A*] se obtiene un valor de la constante  $\alpha$  el cual difiere en menos del 0.1 % con respecto al valor final obtenido del ajuste de los datos. La figura 16 muestra la constante dieléctrica de una arena sedimentaria de relativamente baja porosidad y permeabilidad por consiguiente de baja conductividad y alta tortuosidad, adicionalmente con un contenido de petróleo bituminoso en los poros y gargantas porales. Del ajuste de los datos a bajas frecuencias nos permite obtener por substracción la componente imaginaria de la constante dieléctrica en la región de Maxwell Wagner,  $\varepsilon''_{MW}$ , figura 21. Los resultados muestran que existen dos zonas de mojabilidad superficial,

Muestra	$\tau(10^{-6}s)$	$\sigma_{dc}  (Sm^{-1})$	D	$\Delta \varepsilon$	$\varepsilon_{\infty}$	α	β	φ (%)	Т
Berea Hidratada	19 10 <sup>-3</sup>	1.13 10 <sup>-1</sup>	9.4 10 <sup>-2</sup>	207	16.1	0.101	0.21	22.5	5.8
Berea Centrifugada	2.02 10 <sup>-3</sup>	1.04 10 <sup>-5</sup>	8.8 10 <sup>-6</sup>	205	15.2	0.082	0.22	3.5	1476
Berea Seca	7.3 10 <sup>-2</sup>	7.72 10 <sup>-7</sup>	6.5 10 <sup>-7</sup>	50	7.5	0.019	0.28	0	
Roca Hidratada	0.24	3.74 10 <sup>-6</sup>	3.21 10 <sup>-6</sup>	88.4	7.1	0.09	0.42	18	$60.6\ 10^4$
Roca Centrifugada	0.24 108	1.05 10 <sup>-6</sup>	9.01 10 <sup>-7</sup>	75 44	5.3	0.09	0.42	14.5	$17.4\ 10^4$

correspondiendo a cada pico de la figura, con distintos valores del tiempo de relajación  $\tau$  y la amplitud  $\Delta \varepsilon$ , Tabla 1.

Tabla 1, donde  $\sigma_{\rm \scriptscriptstyle SS}=12.6~Sm^{-1}$ 



Figura 14: Componentes dieléctricas relativas vs frecuencia de la berea hidratada.



Figure 15 Tangente de pérdida vs frecuencia de la berea hidratada.



Figura 16: Componentes de la conductividad vs frecuencia de la berea hidratada.



Figura 17: Componentes dieléctricas relativa vs frecuencia de la berea centrifugada.



Figura 18: Componentes dieléctricas relativas vs frecuencia de la berea seca.



Figura 19: Componentes dieléctricas relativas vs frecuencia de la roca hidratada.



Figura 20: Componentes dieléctricas relativas vs frecuencia de la roca centrifugada.



Figura 21: Constante dieléctrica relativa vs frecuencia en la zona de Maxwell-Wagner de la roca centrifugada.

#### Conclusiones

Los resultados experimentales obtenidos muestran que el novedoso método experimental propuesto es excelente para medir constante dieléctrica, obteniendo a partir de ésta la tortuosidad del sistema de poros. También se logró determinar los rangos de medición adecuados para el cabezal capacitivo construido. Los resultados relacionados a la petrofísica de rocas sedimentarias porosas se muestran en la Tabla 1. Los sistemas estudiados fueron una berea y una roca sedimentaria de relativa permeabilidad. En particular, la berea muestra un comportamiento regular, para el cual la conductividad disminuye a medida que se extrae solución salina, por centrifugación. Adicionalmente no se observan cambios en la mojabilidad de las paredes de los poros con la disminución de la cantidad de agua en la roca. Esto se refleja en que la variación de los tiempos de relajación disminuye con el tamaño de poros hidratados, entre la muestra saturada y centrifugada, y no se observa la aparición de otros términos de polarización molecular en la constante dieléctrica [9]. En la berea seca la situación es diferente ya que no se tiene agua líquida y/o humedad condensada en las paredes de los poros. En la roca hidratada la situación es similar a la de la berea, pero al someterla a centrifugación observamos que se detecta la aparición de un segundo tipo de mojabilidad superficial de poros el cual se refleja en la aparición de un segundo mecanismo de polarización en la constante

dieléctrica, tal como lo reflejan los dos picos observados en la componente imaginaria, figura 21, correspondiendo cada uno de los máximos a un valor diferente del tiempo de relajación. Esto se debe a que la polarizabilidad molecular varía con la forma de las gotitas de agua que mojan la superficie de los poros y por lo tanto cambia la interacción con los elementos de ésta [9].

Adicionalmente, entendemos que una mejora significativa sobre el método de medición y sobre el análisis de los resultados obtenidos se dará profundizando los estudios de variaciones del tiempo de relajación en función de distintos tipos de sistemas porosos con diferentes característica superficiales conocidas.

## Apéndices

A) Racionalización y factorización de los términos de  $\varepsilon_r(\omega)$ 

En el rango de 100 Hz a 10 kHz la función compleja de potencias  $\varepsilon_{PBF}$  es

$$\varepsilon_{PBF}(\omega) = \frac{D\tau^Q}{\varepsilon_0(jx)^Q} = \left(\frac{D\tau^Q}{\varepsilon_0}\right) \frac{j^{-1+\alpha}}{x^{1-\alpha}} \tag{1-A}$$

donde  $Q \equiv 1 - \alpha \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 1$ , y  $x \equiv \tau \omega$ 

$$j^{-1+\alpha} = e^{-\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} = \cos\frac{\pi}{2}(1-\alpha) - j\sin\frac{\pi}{2}(1-\alpha)$$
$$= \sin\frac{\pi}{2}\alpha - j\cos\frac{\pi}{2}\alpha$$
$$(2-A)$$

Ecuación que en los casos extremos tanto para valores muy pequeños de  $\alpha$  como valores cercanos a 1 obtenemos en primer orden (se ha asumido  $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3}{2}$ )

$$j^{-1+\alpha} \cong \begin{cases} \frac{3}{2}\alpha - j & , \alpha \ll 1\\ \\ 1 - j\frac{3}{2}\alpha & , \alpha \le 1 \end{cases}$$
(3 - A)

por lo tanto aproximamos para ambos casos

$$\varepsilon_{PBF}(\omega) \cong \begin{cases} \left(\frac{D\tau^Q}{\varepsilon_0}\right) \frac{1}{x^{1-\alpha}} \left(\frac{3}{2}\alpha - j\right) &, \alpha \ll 1 \\ \\ \left(\frac{D\tau^Q}{\varepsilon_0}\right) \frac{1}{x^{1-\alpha}} \left(1 - j\frac{3}{2}\alpha\right) &, \alpha \le 1 \end{cases}$$

$$(4 - A)$$

En el rango de 10 kHz a 1 GHz la función compleja correspondiente al régimen de Maxwell-Wagner,  $\varepsilon_{WM}$ , es

$$\varepsilon_{MW}(\omega) = \frac{\Delta\varepsilon}{1 + (j\tau\omega)^{1-\beta}} \tag{5-A}$$

y considerando valores típicos de  $\omega_{rel}$  se tiene que para este rango de frecuencias

$$10^{-6} \le x \le 10^2$$

donde los valores reportados de son tales que

$$10^{-4} \le \beta \le 0.5$$

Para racionalizar (6-A) reescribimos esta ecuación como

$$\varepsilon_{MW}(\omega) = \frac{\Delta\varepsilon}{1 + jx^B j^{-\beta}} \tag{6-A}$$

 $con B \equiv 1 - \beta, y$ 

$$j^{-\beta} = \cos\frac{\pi}{2}\beta - j\sin\frac{\pi}{2}\beta \equiv a - jb$$

el denominador racionalizado de (8-A) es

$$(a + bx^B)^2 + a^2x^{2B} = a^2 + 2abx^B + x^{2B}$$

Resultando (7-A)

$$\varepsilon_{MW}(\omega) = \frac{\Delta \varepsilon \left[ \left( a + bx^{1-\beta} \right) - jax^{1-\beta} \right]}{a^2 + 2abx^{1-\beta} + x^{2-2\beta}} \tag{7-A}$$

Se distinguen dos límites extremos según sean los valores que toma el exponente  $\beta$ , de manera que

$$a \approx 1, \ b \approx \frac{3}{2}\beta \quad , \beta \ll 1$$
  
 $a \approx b \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \beta \le 0.5$   $(8-A)$ 

Evaluando (8-A) en ambos límites se tiene

$$\varepsilon_{MW}(\omega) \cong \frac{\Delta \varepsilon \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} \beta x^{1-\beta} \right) - j x^{1-\beta} \right]}{1 + 3\beta x^{1-\beta} + x^{2-2\beta}} \quad , \beta \ll 1 \tag{9-A}$$

у

$$\varepsilon_{MW}(\omega) \cong \frac{\Delta \varepsilon \sqrt{2} [(1+x^{1-\beta}) - jx^{1-\beta}]}{1+2x^{1-\beta}+2x^{2-2\beta}} , \beta \le 0.5$$
 (10-A)

Donde  $\Delta \varepsilon = (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})$ . A primera vista no existe un método que permita determinar cuál de estos límites es el adecuado, resultando la elección obtenida del el mejor ajuste de los datos experimentales. Sin embargo para una gran variedad de rocas sedimentarias los valores de  $\beta$  se encuentran en el rango  $0.25 \le \beta \le 0.5$ . Aproximando (11-A) para valores de  $\nu > 10 \ MHz$ , para lo cual generalmente x > 10, resulta

$$\varepsilon_{MW}(\omega) \cong \begin{cases} \frac{\Delta \varepsilon \left[ \left( 1 + \frac{3}{2}\beta x^{1-\beta} \right) - jx^{1-\beta} \right]}{x^{2-2\beta}} &, \beta \ge 0.25 \\ \\ \frac{\Delta \varepsilon \sqrt{2}(1-j)}{2x^{2-2\beta}} &, \beta \le 0.5 \end{cases}$$
(11 - A)

para valores de la frecuencia en el rango de  $0.1 \le \nu < 10 MHz$  y  $\tau \le 0.01 \mu s$  que son valores esperables para muchas rocas sedimentarias se tiene que  $x \ll 1$ , resultando (8-A)

$$\varepsilon_{MW}(\omega) \cong \begin{cases} \Delta \varepsilon (1 - j x^{1 - \beta}), & \beta \ll 1 \\ \\ \Delta \varepsilon \sqrt{2} (1 - j x^{1 - \beta}), & \beta \le 0.5 \end{cases}$$
(12 - A)

Es importante destacar que en estos casos que las componentes real y compleja de  $\varepsilon^*(\omega)$  son la suma de funciones cuasi hiperbólicas y cuasi lineales, por lo que es de esperar que  $\varepsilon_r(\omega)$  se comporte como una función suave y monótona decreciente con la frecuencia.

Adicionalmente la tangente de pérdida definida como

$$tg(\delta) \equiv \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \tag{13-A}$$

razón que es una medida de la pérdida de energía relativa a la energía almacenada por la radio frecuencia en la muestra, y extrapolando este cociente a bajas frecuencias se obtiene

$$tg\delta = \frac{\Delta G}{\Delta B} \cong \begin{cases} \frac{2}{3\alpha} & , \alpha \ll 1\\ \\ \frac{3\alpha}{2} & , \alpha \le 1 \end{cases}$$
(14 - A)

La primera ecuación de (14-A) se refiere a muestras que poseen valores de  $\varepsilon'' \gg \varepsilon'$  en el límite de frecuencias cero, y la segunda para muestras que poseen valores de  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ . Estos resultados son adecuados para saber cuál de las aproximaciones anteriores debe escogerse.

B) Soluciones aproximadas de  $\Delta G$  y  $\Delta B$  para frecuencias bajas e intermedias (zonas BF y M-W)

$$\Delta G = \lambda_0 \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r'' \cong \lambda_0 \sigma'(\omega)$$

$$\Delta B = \lambda_0 \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r' = \lambda_0 \sigma''(\omega)$$
(1-B)

Teniendo en cuenta que en general para las rocas sedimentarias en coeficiente  $\alpha \ll 1$ , que  $\beta \leq 0.5$ , siendo las conductividades típicas  $10^{-7} \leq \sigma_{dc} \leq 10^{-1} Sm^{-1}$ , y teniendo en cuenta los errores experimentales de las mediciones de  $\Delta G$  y  $\Delta B$  que son del orden de  $\pm 0.1 mmS = \pm 0.1 \mu S$ , inferimos en los distintos rangos de frecuencias y de las aproximaciones anteriores para  $100 Hz \leq \nu \leq 10 MHz$ 

$$\Delta G \cong \lambda_0 \frac{D}{\omega^{\alpha}} + \varepsilon_0 \lambda_0 \Delta \varepsilon \sqrt{2} \left(\frac{\omega}{\omega_{rel}}\right)^{1-\beta} \omega$$

$$\Delta B \cong \lambda_0 \left(\sqrt{2}\varepsilon_s - \frac{2}{5}\varepsilon_{\infty}\right) \omega + \frac{3}{2}\lambda_0 \alpha \frac{D}{\omega^{\alpha}}$$
(2-B)

y para  $10 < \nu \leq 200 \; MHz$ 

$$\Delta G \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_0 \lambda_0 \Delta \varepsilon \left(\frac{\omega_{rel}}{\omega}\right)^{2-2\beta} \omega$$

$$\Delta B \simeq \lambda_0 \left(\sqrt{2}\varepsilon_s - \frac{2}{5}\varepsilon_\infty\right) \omega + \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_0 \lambda_0 \Delta \varepsilon \left(\frac{\omega_{rel}}{\omega}\right)^{2-2\beta} \omega$$
(3-B)

C) La Ley de Archie

El sistema poroso de una roca sedimentaria conduce una corriente eléctrica provisto que los poros estén interconectados y las paredes de estos estén mojadas. El modelo más simple es suponer al sistema de poros como un conjunto de tubos capilares rectos y paralelos. La resistividad de la roca completamente saturada con una solución salina,  $\rho_R$ , y de la solución salina o agua de formación,  $\rho_{ss}$ , son respectivamente

$$\rho_R = \frac{A_n}{L} \frac{E}{I_R}$$

$$\rho_{ss} = \frac{A}{L} \frac{E}{I_{ss}}$$

$$(1 - C)$$

Donde  $A_n = \phi^{-m}A$  con la sección de área del conjunto de *n* tubos capilares y *A* el área de la roca,  $\phi$  es la porosidad de la roca, y se ha asumido que tanto la roca como la porción de solución salina poseen la misma longitud *L*. Realizando el cociente de las resistividades en (1-*C*) se tiene

$$F_R = \frac{\rho_R}{\rho_{ss}} = \frac{A_n I_{ss}}{A I_R} \tag{2-C}$$

Asumiendo que  $I_{ss} \approx I_0$  y reemplazando  $A_n$  en (2-*C*) se obtiene

$$F_R = \frac{1}{\phi^m} \tag{3-C}$$

Que es la relación más simple entre el factor de resistividad o de formación  $F_R$  y la porosidad. Pero los sistemas de tubos capilares son mucho más complejos que un conjunto de tubos paralelos, por lo tanto es conveniente introducir la tortuosidad, T, tal como se ejemplifica en la figura 12 y la ecuación (30), siendo el factor de tortuosidad

$$T = \frac{l}{L} \tag{4-C}$$

y de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$F_R = \frac{1}{\phi^m} \frac{l}{L} = \frac{T}{\phi^m} = \frac{\rho_R}{\rho_{ss}}$$
(5 - C)

Que es la expresión fenomenológica más general que ajusta mejor los datos medidos donde m es el factor cementación, o de concentración calcárea, su rango de valores son tales que  $1.8 \le m \le 2.15$ , y para la mayoría de las rocas  $m \cong 2$ . Existen en la literatura varias expresiones que representan la ley de Archie para distintos modelos de porosidad y conectividad de gargantas porales, sin embargo los datos del cociente de resistividades utilizados son los mismos que se obtiene experimentalmente como en este trabajo.

Medición de la constante dieléctrica

## Referencias

[1] Jackson J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, N.Y. (1982).

[2] Hartshorn L, *Radio-Frequency Measurements by Bridge and Resonance Methods*, John Wiley & Sons, N.Y. (1941).

[3] Djebar T. and Donaldson E.C., *Petrophysics*, Elsevier (2004).

[4] Cole K.S. and Cole R.H., *Dispersion and Adsorption in Dielectrics; Alternating Current Characteristics*, Jour. Chem. Phys., **9**, 341 – 351 (1941).

[5] A. M. Niell, C.A. Martín and M.E. Ramia, *Multi-Exponential Fit of Experimental Data: A Robust Method for Pore Size Distribution Determination*, Annals Mag. Res., **7**, 1, 44-62 (2008).

[6] C.A. Martín, M.E. Ramia and L. Barberis, *The Centrifuge as a Tool to Determine the Pore-Throat Size Distribution in Plugs*, Soc. Pet. Eng., 107781 (2007).

[7] Bona N., Rossi E. and Capaccioli S., *Electrical Measurements in the 100 Hz to 10 GHz Frequency Range for Efficient Rock Wet Ability Determination*, Soc. Pet. Eng. 69741, 80-87 (2000).

[8] C.A. Martín, M.E. Ramia and M.A. Chesta, *Integrated Analysis of Experimental Data*, enviado a publicaciones de FaMAF (2011).

[9] P.C. Lysne, A model for the HF Electrical Response of Wet Rocks, Geophysics 48, 775-786 (1983).