UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “A”

TRABAJOS DE FISICA

Nº 5/07

El universo en expansión

Lorenzo Marcos Iparraguirre

Editores: Miguel A. Chesta–Ricardo C. Zamar

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

EL UNIVERSO EN EXPANSIÓN

LORENZO MARCOS IPARRAGUIRRE
Facultad de Matemática Astronomía y Física (FaMAF). Universidad Nacional de Córdoba.
Haya de la Torre y Medina Allende. Ciudad Universitaria. 5000. Córdoba. Argentina.
TE: (0351) 334051/.../55. Fax.: (0351) 334054. Email: ipa@famaf.unc.edu.ar

INTRODUCCIÓN

Actualmente el modelo de la gran explosión inicial y los primeros minutos del Universo es un tema común en la literatura de divulgación, en la cual se suele enfocar principalmente la descripción de las diferentes etapas y procesos de transformación por las que va pasando la materia a medida que se van dando las diferentes condiciones.

Uno de los aspectos fascinantes de esta historia es la participación de la Teoría General de la Relatividad en la descripción del modelo cosmológico que sustenta todo el proceso, y en general éste suele ser el aspecto más difícil de tratar porque la teoría involucrada presenta núcleos de gran dificultad tanto conceptual como matemática.

El propósito de estas páginas es explorar algunos aspectos accesibles de este modelo cosmológico adaptados para lectores con cierta base matemática y conceptual, tales como profesores de física, o profesionales de disciplinas científicas, que no quedan satisfechos con una descripción cualitativa y pueden enriquecerse con algunos procedimientos y cálculos que sustenten los conceptos, sin llegar a encarar un estudio profundo de una teoría tan compleja.

NOCIONES PRELIMINARES

Las leyes de la mecánica clásica en su formulación tradicional, que es la denominada newtoniana, se enuncian para referenciales especiales denominados inerciales. Cuando se habla de un observador o referencial, debe entenderse un sistema de referencia en el cual puede definirse la posición y el instante de cualquier suceso o evento.

La mecánica clásica asume que el espacio es de tal manera que es posible concebir líneas rectas con todas las propiedades correspondientes a la geometría de Euclides, y que con estas líneas es posible definir ejes coordenados (cartesianos) que constituyen sistemas de referencia respecto de los cuales se puede ubicar la posición de cualquier cuerpo. También se asume que el tiempo transcurre de manera absoluta, independiente del observador o sistema de referencia.

La geometría enunciada por Euclides en el siglo III a.C. contiene todas las nociones geométricas que nos resultan familiares a partir de nuestra experiencia cotidiana o del aprendizaje escolar. Para nuestra intuición todas estas nociones geométricas suelen adquirir ribetes de verdad absoluta, porque suele ser extremadamente difícil, sino imposible, siquiera imaginar que no se cumplan algunos enunciados.

Sin embargo algunos aspectos de esta geometría han sido fuente de inquietud para el espíritu humano durante mucho tiempo. Se ha dicho que Euclides fue el primer geómetra no euclidiano, porque al enunciar su famoso quinto postulado, llamado “de las paralelas”, no lo enunció como teorema que pudiese demostrarse a partir de los postulados anteriores, sino como postulado. Éste dice que por un punto exterior a una recta (se sobreentiende que en el plano determinando por ambos elementos) siempre puede trazarse una y sólo una recta que no intersecte a la anterior. Al ser un postulado, este enunciado podía aceptarse o rechazarse, pero no demostrarse, contrariamente a lo que parece sugerir la intuición. Muchos pensadores trataron de demostrarlo sin lograrlo. Pero tampoco supieron cómo rechazarlo. Testigo de ello es el siguiente fragmento de una carta que Wolfgang Bolyai escribía a su hijo Johann (quien luego sería uno de los creadores de la geometría no euclidiana) [1]:

"*Te ruego que no intentes tú también luchar con la teoría de las paralelas. Perderías el tiempo y sus teoremas quedarían sin demostrar. Estas impenetrables tinieblas pueden derribar a miles de torres como Newton. Nunca se aclararán en la Tierra, y el desdichado género humano nunca poseerá en el mundo nada completo, ni aún en la geometría. Esto constituye una grande y eterna herida en mi alma.*"

Recién en el siglo XIX dos grandes matemáticos, el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) y el húngaro Johann Bolyai (1802-1860), recién aludido, lograron independientemente desarrollar las primeras geometrías no euclidianas, que negaban el quinto postulado. En una de ellas se tiene que por un punto exterior a una recta se pueden concebir infinitas rectas paralelas a la dada, y en la otra, ninguna. Estas geometrías constituyeron inicialmente juegos del pensamiento que podían verificarse sobre ciertas superficies curvas, en un espacio real que seguía siendo euclidiano. Por ejemplo, sobre la superficie de la esfera es posible trazar líneas que cumplen con la definición de recta: línea que no se desvía hacia ningún lado (imagínense los círculos máximos en la esfera). Por dos puntos cualesquiera puede trazarse una y sólo una. Por cada punto exterior a una recta puede trazarse una y sólo una perpendicular a la misma. Pero por cada punto exterior no se puede trazar ninguna paralela, es decir ninguna recta que no corte a la anterior.

Si bien esto significó un gran avance en el pensamiento geométrico, comenzó a plantear una inquietud para el pensamiento científico: ¿por qué el espacio real, tridimensional, el espacio en el cual tienen lugar los sucesos físicos, es euclidiano? ¿Es más real la geometría euclidiana que sus otras hermanas posibles?

Esta inquietud no había existido hasta entonces: el espacio siempre se había considerado euclidiano porque esa era la única posibilidad *concebible*. En esa línea de pensamiento se desarrolla la mecánica de Newton, o "clásica", con sistemas de referencia cuyos ejes son rectilíneos y tienen las propiedades que se imaginan usualmente: la intuición geométrica práctica ni siquiera entiende cómo cuestionar estas ideas porque no puede concebir alguna imposibilidad en ello.

Si existe un sistema de referencia con los ejes rectos graduados uniformemente en el cual se pueden describir las posiciones de todos los cuerpos, también se pueden describir respecto de él otros sistemas similares moviéndose de manera arbitraria, y fórmulas para transformar las expresiones del movimiento de un cuerpo en uno de ellos a las expresiones en cualquier otro.

Ahora bien, Newton consideraba la existencia de un espacio absoluto, con respecto al cual el movimiento de cualquier cuerpo sobre el que no actuaran fuerzas debía ocurrir recorriendo uniformemente líneas rectas. A partir de este postulado, enunciado como "Principio de Inercia", Newton mostró que esto también debía cumplirse en cualquier sistema de referencia que se moviera *libre de rotación*, y de *aceleración*, respecto del espacio absoluto. Y actualmente, habiéndose desechado la idea del espacio absoluto, aún se conserva (en el marco clásico) la idea de estos sistemas de referencia, denominados *inerciales*, en los cuales los cuerpos libres de fuerza se mueven según el Principio de Inercia. Estos sistemas de referencia se consideran especiales: sólo en ellos vale la formulación habitual de las leyes físicas, y en particular las restantes leyes de la mecánica para el movimiento de cualquier cuerpo, libre o no de fuerzas.

Las trayectorias rectilíneas seguidas por cuerpos libres de fuerza en un referencial inercial, al ser recorridas uniformemente son rectas también en el “espacio-tiempo”, es decir en cualquiera de los diagramas, (x,t), (y,t), o (z,t), en los que se podrían describir las diferentes proyecciones de un movimiento en función del tiempo.

Una consecuencia directa de esto es que dado un referencial inercial, A, todo otro referencial B cuyos puntos tienen movimiento rectilíneo uniforme respecto de A también es inercial, con las mismas leyes para el movimiento de cualquier cuerpo. Trivialmente todos los cuerpos considerados libres de fuerzas por A, lo son para B, y sus trayectorias deben ser líneas rectas en el espacio y en el espacio-tiempo para ambos.

En este esquema de ideas, la universalidad de la ley de gravitación plantea un problema que molestó a muchos pensadores, desde el mismo Newton en adelante: un sistema de ejes de referencia sólo tiene sentido definido con respecto a algún conjunto de cuerpos materiales (no se puede definir la ubicación de algo respecto de la nada), y dado que los cuerpos materiales inexorablemente son fuente de fuerza gravitatoria que influirá sobre el movimiento de cualquier cuerpo que se estudie, la condición de “cuerpo libre de fuerzas” moviéndose en línea recta, nunca pasará de ser una idealización imposible de verificar en manera alguna. Para la teoría de Newton esto constituyó siempre un problema filosófico muy molesto, que se solucionó (desde el punto de vista práctico) pensando que se podía hacer abstracción de los efectos gravitatorios para definir ejes y referenciales. Es decir que, aunque no se podía materializar ningún referencial inercial, se podría concebir la gravitación como una fuerza que aparta a los cuerpos de las trayectorias rectas ideales que ellos seguirían respecto de hipotéticos referenciales inerciales, en la hipotética ausencia de las fuerzas gravitatorias. Esto es bastante molesto desde el punto de vista filosófico y teórico, pero en la práctica funcionó muy bien durante mucho tiempo, y continúa funcionando muy bien ahora en un amplio campo de aplicaciones.

Algunos intentos de modificar esta situación no progresaron mucho porque realmente las cosas funcionaban bien en la práctica; y la situación se mantuvo hasta que hubo algunos problemas serios con la teoría electromagnética, los cuales si bien no tenían que ver directamente con el punto, obligaron a replanteos básicos de las nociones de tiempo y espacio.

El problema fue esencialmente que la velocidad de la luz en el vacío (y en general de las ondas electromagnéticas) se manifestaba ***en la teoría***, más allá de experiencias que pudieran corroborarlo, con un valor constante, totalmente ***independiente de los movimientos de emisor y receptor***. La teoría de la relatividad especial solucionó este problema introduciendo cambios fundamentales en las nociones básicas de tiempo y espacio: el espacio continuó pudiendo ser considerado euclídeo, pero el espacio tiempo debió interpretarse de cierta manera denominada “seudoeuclídea”.

Revisemos algunos elementos del problema.

Intervalo (galileano) entre dos sucesos.

Si para determinado observador un suceso A ocurre en el lugar (x_A, y_A, z_A), en el instante t_A, y el B ocurre en (x_B, y_B, z_B) en el instante t_B, se definen los intervalos de espacio y tiempo existentes entre ellos como:

Intervalo espacial: s = distancia entre (x_A, y_A, z_A), y (x_B, y_B, z_B)

Intervalo temporal: $\Delta t = t_B - t_A$

El intervalo espacial, s, se define como la distancia entre los dos puntos en que ocurre cada suceso.

La ubicación de cada punto en un referencial queda especificada por sus coordenadas, y la distancia entre dos puntos se calcula con alguna función de estas coordenadas, denominada ***métrica***, que depende del tipo particular de coordenadas.

Si bien las posiciones de los puntos se expresan necesariamente en forma dependiente del sistema de coordenadas, la distancia entre ellos es un *invariante*: su expresión cambia con el sistema de coordenadas, de manera de expresar un resultado independiente del mismo.

Si por ejemplo las coordenadas son cartesianas ortogonales (ejes cartesianos perpendiculares entre sí), la expresión para el intervalo espacial es:

$$s = \{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2\}^{½} = \{\sum(\Delta x_i)^2\}^{1/2}$$

En adelante, según la costumbre que es usual para evitar manejar raíces cuadradas, se escribirán las funciones métricas con el intervalo elevado al cuadrado. En este caso se tiene la expresión usual de la métrica de un espacio euclídeo en coordenadas cartesianas ortogonales:

$$s^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = \sum(\Delta x_i)^2 \qquad (1)$$

Los mismos puntos podrían tener otras coordenadas, y la expresión de la misma distancia sería otra. Por ejemplo si los ejes fuesen oblicuos, con ángulo α_{ij} entre los ejes x_i' y x_j' , para los mismos puntos tendríamos coordenadas (x’, y’, z’), y la función métrica que expresaría la misma distancia sería:

$$s^2 = \sum(\Delta x_i')^2 - 2 \sum \Delta x_i' \Delta x_j' \cos \alpha_{ij}$$

Y en principio, para sistemas de coordenadas definidos arbitrariamente, se podrían tener funciones métricas muy diferentes.

Ahora bien, dados el par de sucesos A, B, descriptos por un observador, para otro observador que se desplaza mientras transcurre el tiempo, con los ejes ubicados de diferente manera, y con otro origen para el tiempo, cada suceso ocurre en nuevas coordenadas (x’, y’, z’) y en nuevos instantes t’. Como resultado del movimiento relativo entre los observadores, los sucesos no sólo cambian de coordenadas, sino de posición relativa: los lugares en que ocurren dos sucesos pueden ser muy cercanos entre sí para un observador, y muy lejanos para otro.

Esto no ocurre con el intervalo temporal. Como resultado de la concepción (clásica) fundamental de que el tiempo transcurre de manera absoluta, igual para todos los observadores de cualquier tipo que sean, se tiene que $\Delta t' = \Delta t$ a pesar de los diferentes orígenes considerados para el tiempo por los dos observadores cuyas descripciones se comparan.

Si dos sucesos son simultáneos para un observador, entonces lo son para todos, y la distancia entre ellos debe mantenerse igual para todos los observadores ($\Delta t = \Delta t' = 0$, y $s = s'$). Pero si dos sucesos no son simultáneos, entonces la distancia entre ellos registrada en un referencial, se modifica respecto del otro por la distancia que él se desplaza mientras transcurre Δt. En particular, dos sucesos que ocurren en el mismo lugar de un referencial ($s = 0$), separados por un intervalo temporal Δt, ocurren en dos lugares diferentes, separados por una distancia $s' = v\,\Delta t$, para un referencial que viaja con velocidad v respecto del anterior. Y si dos sucesos separados por un intervalo temporal Δt, ocurren en dos lugares diferentes de un referencial, separados por una distancia s, siempre puede elegirse un referencial moviéndose con velocidad $v = s/\Delta t$ en la dirección desde A hacia B, para el cual ocurrirán en el mismo lugar ($s' = 0$).

Por otra parte, si el suceso A consiste en la partida de un rayo de luz de un lugar, y el B consiste en su llegada a otro lugar, a lo cual se le dice que los dos sucesos pueden ser *unidos por un rayo de luz*, entonces se tiene la condición que define el viaje de la luz: $s = c\,\Delta t$.

Ahora bien, la teoría especial de la relatividad, en la necesidad de explicar que todos los observadores veían viajar a la luz con la misma velocidad c, debió modificar las nociones de tiempo y espacio, de manera que si para dos sucesos $s = c\,\Delta t$ en un referencial, entonces debe cumplirse $s' = c\,\Delta t'$ en todos los referenciales.

Podemos expresar esta situación escribiendo $c\,\Delta t - s = 0$, o la expresión equivalente, que evita raíces cuadradas:

$$c^2\,(\Delta t)^2 - s^2 = 0$$

Intervalo relativista

Un elemento fundamental (que no se demostrará aquí) de la teoría relativista es el hecho de que la cantidad $c^2\,(\Delta t)^2 - s^2$, que puede construirse con los intervalos espacial y temporal entre dos sucesos, *es invariante* (independiente del observador que la calcule) no sólo cuando los sucesos pueden ser unidos por un rayo de luz, en cuyo caso da cero, sino *en cualquier caso*.

De manera que se define el *intervalo relativista*, s_R , entre dos sucesos cualesquiera, como:

$$s_R^2 = c^2\,(\Delta t)^2 - s^2 \qquad (2)$$

El cual resulta un invariante, independiente del observador que lo calcule.

El intervalo nulo corresponde a sucesos que pueden ser unidos por un rayo de luz, y separa los sucesos para los cuales $s_R^2 > 0$ (intervalo relativista tipo *temporal*), de los sucesos para los cuales $s_R^2 < 0$ (intervalo relativista tipo *espacial*). La invariancia garantiza que todos los observadores están de acuerdo en afirmar si un intervalo es de tipo espacial, temporal, o nulo.

Si el intervalo relativista entre dos sucesos es tipo temporal, se tiene $c\,\Delta t > s$, o sea que $s/\Delta t < c$, y ello significa que $v = s/\Delta t$ puede ser la velocidad de un observador, ya que en esta teoría ningún cuerpo material puede alcanzar la velocidad de la luz (ni, por supuesto, superarla). Un observador O* con esta velocidad en la dirección adecuada, puede tener a los dos sucesos ocurriendo en el mismo lugar, separados sólo por un intervalo de tiempo, Δt^*, el cual se denomina intervalo de tiempo *propio* entre los sucesos, y se puede calcular haciendo $s = 0$ en (2), con s_R calculado por cualquier observador:

$$\Delta t^* = \frac{s_R}{c} \qquad (3)$$

En este caso, además, todos los observadores coincidirán en cuál es el suceso que ocurre antes, y cuál después, no habiendo ningún observador para el cual ambos sucesos ocurran simultáneamente.

Si en cambio el intervalo relativista entre dos sucesos es tipo espacial, se tiene $c\,\Delta t < s$, y ello significa que no es posible que un observador tenga a los dos sucesos ocurriendo en el mismo lugar, porque para ello debería moverse más rápido que la luz (lo cual ya hemos dicho que no es posible en esta teoría). En este caso A precederá a B para algunos observadores, B precederá a A para otros, y ambos sucesos serán simultáneos para otros (como se discute un poco más en el Anexo1, la noción de tiempo absoluto de la física clásica es alterada de tal manera por la teoría relativista, que lo que es simultáneo para un referencial puede no serlo para otro). Para un observador para el cual los sucesos son simultáneos, la distancia entre los puntos en los que ocurren ambos se obtiene haciendo $\Delta t = 0$ en (2), y vale $s = |s_R|$.

La idea de que dos puntos del espacio pueden ser expresados de formas muy diferentes eligiendo distintos sistemas de coordenadas, y no obstante es posible construir para ellos un invariante que es la distancia entre los puntos, es generalizada al espacio-tiempo por la idea de intervalo relativista, independiente del referencial en que se lo calcula. La invariancia del intervalo relativista establece la posibilidad de tratar el espacio-tiempo como un espacio de cuatro dimensiones (el tiempo más las tres coordenadas espaciales que se elijan), en el cual el intervalo relativista, cuya expresión contiene la métrica, es indicativo de una "distancia en el espacio-tiempo".

En algunos problemas la métrica puede llegar a ser muy complicada, y se logra un manejo más accesible escribiéndola en forma diferencial. Así, los ejemplos de métrica espacial de más utilidad serían:

Métrica espacial en coordenadas cartesianas:

$$(ds)^2 = \sum(dx_i)^2 \qquad (1')$$

Métrica espacial del espacio euclídeo en coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,(d\varphi)^2 \qquad (4)$$

Líneas geodésicas

Para determinar la longitud de una línea cualquiera Γ que une dos puntos A y B, debemos integrar ds a lo largo de Γ. El resultado será una cierta longitud s, función de la curva Γ. Si se determina cuál es la curva que pasa por los dos puntos dados y tiene mínima longitud, ella será una línea recta, y del procedimiento surgirá cuál es la expresión de la línea recta en función de las coordenadas cualesquiera que se hayan elegido.

Ahora bien, podría ocurrir que el espacio tuviese alguna condición que impidiese la existencia de líneas rectas. Por ejemplo, si se trata de adaptar las ideas geométricas a la superficie de una esfera de radio R, y se consideran dos puntos A y B que están sobre esa superficie, cuando se los une con la línea más corta posible, ella es una línea contenida en la superficie curva, que recibe el nombre de *geodésica* (obviamente el nombre proviene de los procedimientos para determinar distancias sobre la superficie terrestre). Una línea geodésica cumple con la idea de línea recta, pero constreñida a una determinada condición, como por ejemplo en este caso, pertenecer a la superficie esférica. No cumple con la idea de línea recta si se la juzga en el espacio tridimensional habitual.

Ahora bien, el espacio tridimensional, o digamos, a gran escala, el Universo, se supuso euclidiano durante mucho tiempo por la simple razón de que no se comprendía otra posibilidad. Esa situación ha sido superada, y aunque sea difícil, o imposible, imaginar otras posibilidades, se sabe que existen. Si se considera la marcha de un rayo de luz hacia alguna dirección, dado que es afectado por la presencia de la materia, no es posible negar, a priori, la posibilidad de que llegue en algún momento al punto de partida proveniente del sitio opuesto del espacio. Tampoco es posible decretar a priori que existen las líneas rectas.

¿Qué es posible hacer?

Es posible aplicar las leyes de la física para tratar de determinar la métrica del espacio. Si se logra eso, con la métrica es posible determinar cuáles son las geodésicas. Conociendo las geodésicas es posible revisar sus propiedades y decidir si se corresponden con las intuiciones geométricas euclidianas, mereciendo en ese caso la simple denominación de ***rectas***, o si se deben esperar propiedades geométricas sorprendentes.

Las leyes de la física que se debe aplicar para estas cuestiones, son las que están contenidas en la Teoría General de la Relatividad, a la luz de la cual se han desarrollado modelos que se han mostrado muy adecuados para explicar un sinnúmero de fenómenos. Para entender las posibilidades del Universo a gran escala es muy importante el *modelo de Friedmann*.

LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD Y EL MODELO DE FRIEDMANN

La teoría de la relatividad general es la teoría del campo gravitatorio. Esta teoría agrega a los principios básicos de la relatividad especial la idea de que la presencia de materia es inseparable de la presencia de la gravitación, y considera que plantear un movimiento rectilíneo idealizado de los cuerpos en ausencia de gravitación es una ficción sin sentido físico.

Einstein muestra, a partir de experimentos pensados sencillos, que aceptando ciertas premisas simples se encuentra que la marcha de la luz es afectada por los campos gravitatorios *exactamente de la misma manera que las partículas materiales*.

Dado que las “partículas de luz” (fotones), son extremadamente rápidas, sus trayectorias son curvas extremadamente suaves, que pueden muy bien confundirse con líneas rectas, pero no son rigurosamente rectas. Es decir que las líneas rectas que necesitaríamos como ejes de referencia no existen más que de manera local, y nuestros sistemas inerciales son artificios sólo compatibles con ciertos tratamientos limitados y simplificados de la dinámica, válidos tal vez para muchos problemas de la vida práctica, pero inadmisibles para problemas cosmológicos, o tratamientos que pretendan validez global.

Un modelo que se considera adecuado para representar la evolución del Universo a gran escala es el de Friedmann, en el cual se propone esencialmente que el universo está constituido por materia uniformemente distribuida con total isotropía y uniformidad. Se considera que las agrupaciones de materia que se observan (estrellas, galaxias, cúmulos de ellas, etc.) con sus movimientos particulares pueden ser tratados como accidentes incapaces de alterar un esquema global de isotropía y uniformidad.

En este modelo se definen observadores privilegiados que están en reposo en cada lugar localmente con esta materia uniforme ideal. Cada uno de ellos ve lo mismo, mide la misma densidad de materia, etc., y se considera en reposo con respecto a los objetos de su vecindad.

Tratar este universo con las ideas de la mecánica de Newton no sería posible debido a que una extensión infinita llena homogéneamente de materia no permite definir si debe haber o no alguna fuerza gravitatoria resultante sobre cada partícula. No obstante es interesante pensar en una cantidad muy grande pero finita de materia distribuida de manera homogénea en una extensión también grande pero finita, por ejemplo una esfera de radio R. En tal caso cada partícula de materia sería atraída hacia el centro con una fuerza (gravitatoria) proporcional a la distancia a dicho centro, y el conjunto no podría permanecer en reposo, sino que podría estar en expansión (revelando que en el pasado hubo una gran explosión a partir de un estado de densidad infinitamente grande, o algo similar), o en contracción, colapsando hacia un estado final enorme densidad. En el caso de expansión cabe la posibilidad de que la gravitación pueda detener esta expansión en algún momento, pasándose luego a la etapa de contracción, o que eso no ocurra y el universo se expanda indefinidamente.

La teoría de la relatividad general, por otra parte, no trata a la gravedad como una fuerza que actúa a distancia, sino como una propiedad del espacio-tiempo tal que, en la cercanía de grandes cantidades de masa, para un cuerpo abandonado libremente, no es posible permanecer en reposo ni moverse uniformemente en línea recta. Se considera que la presencia de cuerpos de gran masa modifica de tal manera las propiedades geométricas del espacio-tiempo, que sus líneas geodésicas pasan a ser precisamente las trayectorias que siguen los cuerpos lanzados con diferentes velocidades allí.

Para el modelo que se analiza aquí, resulta que la presencia de la materia impone a este universo una métrica de características tales que se dice que el espacio resulta uniformemente “curvado”, con una curvatura que puede ser, o bien positiva, o bien negativa, o bien cero (como caso límite particular).

Para que el tema resulte más accesible, a continuación se revisarán resumidamente las características de estos espacios curvos, dejando inicialmente de lado las consideraciones sobre el transcurso del tiempo.

La curvatura del espacio

Sea un espacio homogéneo e isótropo cubierto o descripto por las coordenadas esféricas habituales r , θ , φ, para el cual la métrica que define el elemento de longitud ds puede escribirse:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 \mp \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (\mathrm{sen}^2\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2) \qquad (5)$$

Donde R es una constante denominada “radio de curvatura”, que ya se verá qué efectos causa. Para cualquier valor de R el signo menos en la expresión corresponde al caso de espacio “cerrado”, de curvatura denominada positiva, y el otro signo corresponde al caso “abierto”, o de curvatura negativa. El caso $R \to \infty$ corresponde al espacio euclídeo, plano, común.

Aquí se desarrollará *sólo el caso cerrado*, y al final se agregarán las fórmulas principales del caso abierto. De manera que la métrica espacial será con el signo negativo:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (\mathrm{sen}^2\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2) \qquad (6)$$

Esta elección del signo determina que los valores de r quedan limitados entre cero y R.

Todos los lugares son equivalentes para ser origen de este sistema: el origen O se ubica en algún lugar arbitrario, y todo lo que se diga para este punto vale también para cualquier otro. La recta radial que va desde el origen O hasta un punto designado por el valor r tiene una longitud s dada por:

$$s = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-\frac{r'^2}{R^2}}} = R \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \tag{7}$$

Es decir,
$$r = R \operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}\right) \tag{8}$$

Hay una distancia máxima en este espacio, que es $s_{máx} = \pi$ R ; superar ese valor haría negativo r, lo que se considera sin sentido.

Puede verse que cualquier valor de r < R, define dos lugares diferentes (están a distinta distancia del origen).

Una buena ayuda a comprender este modelo es considerar la analogía con un espacio bidimensional curvado con forma esférica en un espacio tridimensional plano, como ilustra la figura 1.

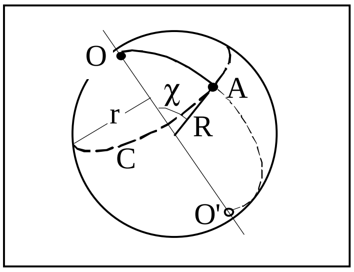


Fig. 1: esquema de los elementos contenidos en la métrica de un espacio de curvatura constante positiva.

Para los habitantes bidimensionales de la superficie esférica su habitat es un espacio curvo cerrado, homogéneo, isótropo, de curvatura constante, con radio de curvatura R. Desde cualquier punto O se debe recorrer una distancia OA para llegar a un punto A.

Todos los puntos que equidistan de O como A, definen una circunferencia C *cuyo radio es OA*, y cuya longitud vale 2πr (esto es porque el elemento de longitud "transversal" es r dθ, o r senθ dφ). Podemos definir r como (1/2π) de la longitud de la circunferencia de radio OA, y es claro que r < OA. Para puntos suficientemente cercanos a O, r se parece mucho a OA, pero en general puede ser bastante diferente: la relación exacta es $r = R \operatorname{sen}\left(\frac{OA}{R}\right)$.

Como ya se dijo, para cada punto O existe un punto más lejano posible, situado a distancia $s_{máx} = \pi$ R , y para él las coordenadas son las mismas que las de O: r = 0, φ y θ cualquier valor. Cualquier desplazamiento desde ese punto en cualquier dirección hace disminuir la distancia al O.

Es útil utilizar χ , el ángulo polar en nuestra analogía, como una coordenada muy conveniente para la ubicación de posiciones en la dirección radial en reemplazo de r. Para ello podemos definir en general, más allá de la analogía:

$$\chi = \frac{OA}{R} = \arcsin(r/R) \tag{9}$$

Con esta variable la métrica puede escribirse de la siguiente manera (que interesa sumamente aquí porque es la que permite plantear en términos simples la evolución temporal):

:

$$ds^2 = R^2 \{d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi\, (\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\} \qquad (10)$$

La analogía presentada es muy útil para visualizar que:

a) La distancia a cualquier punto es $s = \chi\, R = R \arcsen(r/R)$

b) El punto más lejano de O es $\tilde{O}$, a distancia $s_{máx} = \pi\, R$

c) La circunferencia determinada por los puntos cercanos a la distancia máxima de O, tiende a un punto (el $\tilde{O}$). Un viajero ideal que se aleje de O en línea recta en una dirección, luego de pasar por $\tilde{O}$, se hallará en la dirección opuesta del espacio, acercándose, ya que toda la circunferencia de radio $s_{máx}$ centrada en O, es un único punto.

d) χ varía desde 0 hasta π , y cada punto del espacio queda determinado unívocamente por el valor de las coordenadas χ , θ, y φ (y no así por r, θ, y φ). Los puntos $\chi = 0$, y $\chi = \pi$, son puntos singulares del sistema de coordenadas, pero no del espacio en realidad, el cual es perfectamente regular y homogéneo.

Para el caso tridimensional que interesa, conviene tener en claro que se puede recurrir a la analogía presentada para facilitar la interpretación de situaciones y el recuerdo de las fórmulas, y que puede ser útil imaginar que "es como si el espacio de tres dimensiones estuviera curvado en un espacio de cuatro dimensiones", pero: ese *espacio de cuatro dimensiones no es el espacio-tiempo de la relatividad, no tiene porqué existir, y en principio no existe*. El espacio tridimensional es, o puede concebirse, como una entidad curvada en sí mismo, descripto por ese tipo de geometría.

Hechas estas aclaraciones, es posible utilizar con cierta libertad las expresiones y encontrar cosas como que, los puntos que equidistan de O, situados a distancia s, definen circunferencias de longitud $2\pi\, r$ (con $r = R\, \operatorname{sen}(s/R)$), o esferas de superficie $4\pi\, r^2$, cuyo volumen vale:

$$V(r) = \int_0^r \frac{4\pi r'^2}{\sqrt{1-\frac{r'^2}{R^2}}}\, dr' = 2\,\pi\, R^2 \left(s - r\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} \right)$$

Si s es la distancia máxima se obtiene el volumen de todo el espacio, que vale:

$$V = 2\,\pi^2\, R^3 \qquad (11)$$

Evolución temporal del modelo de universo cerrado

La materia, y con ella los observadores privilegiados que constituyen el sistema de referencia, se consideran distribuidos como ya se ha dicho en este modelo, permaneciendo en χ , θ, y φ, fijos.

Para cualquier observador (y todos son equivalentes) la métrica completa, es decir el intervalo relativista se escribe:

$$ds_R^2 = c^2\, dt^2 - ds^2 \tag{12}$$

con ds^2, la métrica espacial, dada por (10), con la novedad de que el radio de curvatura es una función R(t) que queda determinada por la presencia de la materia según las leyes correspondientes (aquí no se mostrará el proceso de determinar R(t), sino sólo cómo funciona el modelo de universo con ella; los detalles pueden encontrarse en [2]).

Cada observador ve el mismo Universo isótropo, y define el transcurso del tiempo propio, $ds_R/c = dt$, manteniéndose en reposo ($d\chi = d\varphi = d\theta = 0$). De manera que simplemente t puede representar el tiempo propio para cada observador.

Ahora bien, como se verá enseguida, R(t) se hace cero en un instante inicial que puede denominarse t = 0. En ese instante toda la materia y observadores coinciden en el único punto r = 0, por lo que es posible definir ese instante como t = 0 para todos los observadores. Y además, en función de la equivalencia que resulta entre todos ellos, tiene sentido definir un tiempo "universal", t, que es en cada lugar, el tiempo propio tanscurrido desde el instante inicial.

A partir de estas consideraciones básicas y algunas otras particulares que no viene al caso analizar, aplicando la Relatividad, se puede determinar la función R(t), para la cual se obtiene, después de los instantes iniciales (en los cuales R sería muy pequeño y la densidad correspondientemente grande), en la etapa que se dice "dominada por la materia":

$$R(t) = R_0\,(1 - \cos\eta) \tag{13}$$

$$t = \frac{R_0}{c}\,(\eta - \mathrm{sen}\,\eta) \tag{14}$$

En donde η es una función del tiempo definida por (14), y R_0 es una constante dada por:

$$R_0 = \frac{4\pi\, G\, \delta(t)\, R^3(t)}{3\, c^2} \tag{15}$$

Siendo G la constante de gravitación universal y δ la densidad.

Queda claro en (15) que el producto $\delta\, R^3$ debe permanecer constante aunque ambas variables dependen del tiempo. Si ahora recordamos que según (11) para este caso de curvatura positiva el volumen de todo el universo es $V=2\pi^2R^3$, una cantidad finita, entonces tiene sentido hablar de la masa total $M = \delta\, V = 2\pi^2\, \delta\, R^3$, que es una cantidad finita que se mantiene constante.

En función de la masa total la constante R_0 también se escribiría:

$$R_0 = \frac{2\, G\, M}{3\, \pi\, c^2} \tag{15´}$$

Aunque la variable η no es el tiempo propio, resulta muy cómodo utilizarla a partir de la siguiente expresión (para obtenerla derivar (14) y comparar con (13)):

$$\boxed{c\, dt = R(t)\, d\eta} \tag{16}$$

Con esta expresión la métrica puede escribirse:

$$\boxed{ds_R^2 = R^2\, \{d\eta^2 - d\chi^2 - \mathrm{sen}^2\chi\, (\mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\}} \tag{17}$$

La forma (17) de escribir la métrica indica que la marcha de los rayos radiales de luz ($ds_R = 0$, $d\theta = d\varphi = 0$), está dada por $d\chi = \pm\, d\eta$.

Aprovechando esto en gráficas con χ en abscisas y η en ordenadas podemos analizar de manera muy simple procesos en los que un observador emite señales que son recibidas por otros.

Como podremos ver en la figura 2, que ilustra un ejemplo que será de interés en el próximo punto, la evolución en el tiempo de cada observador está dada por la línea vertical con el valor de χ que le corresponde (denominada "línea de mundo" en la jerga relativista).

Por otra parte, como t es un tiempo universal, y así mismo la coordenada η lo es (aunque no sea el tiempo propio sino sólo una función de él), cada línea horizontal indica un mismo instante para todo el universo, y la marcha de la luz está indicada por rectas inclinadas ±45º. Un poco más adelante se discutirán algunos problemas asociados con la dificultad para decidir si tiene sentido pensar lo que es el mismo instante para puntos que están muy alejados; por ahora comenzamos aplicando directamente las definiciones tal como han sido presentadas.

El corrimiento al rojo y la expansión del universo

Consideremos un observador O cualquiera (situamos el origen sobre él) que recibe, en el instante dado por η_0 , rayos de luz que han partido del lugar A en el instante $\eta_1 = \eta_0 - \chi_A$ (figura 2).

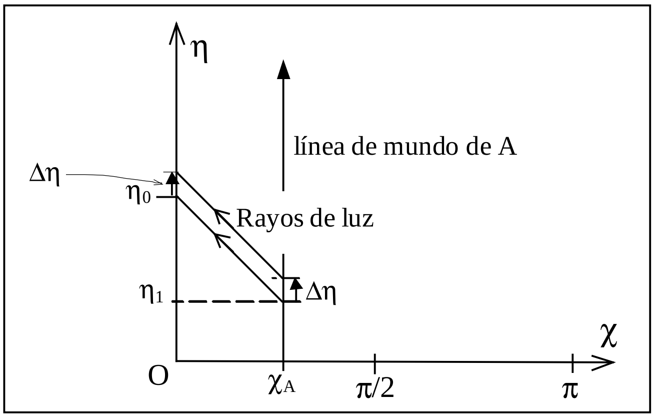


Fig. 2: Esquema de la evolución temporal para los observadores en el modelo cerrado de Universo. Siguiendo la costumbre relativista, el transcurso del tiempo se indica en ordenadas. En abscisas se indica la coordenada radial. Para estas coordenadas, de acuerdo con la métrica (16), la marcha de la luz está dada por rectas a 45º.

Como la marcha de la luz está dada por rectas a 45º y el eje de ordenadas está graduado uniformemente con η, en el esquema se puede ver que una señal que haya partido de A un cierto $\Delta\eta$ después de η_1, llegará a O exactamente el mismo $\Delta\eta$ después de η_0 . Claro que el mismo $\Delta\eta$ en distintos instantes representa diferente tiempo transcurrido, y es muy interesante considerar el caso $\Delta\eta$ pequeño. En este caso, según (16), tendremos $c\,\Delta t_0 = R(\eta_0)\,\Delta\eta$ y $c\,\Delta t_1 = R(\eta_1)\,\Delta\eta$, de manera que:

$$\frac{\Delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{R(t_1)}, \quad \text{para } \Delta t \text{ pequeño} \tag{18}$$

Para la fase de expansión del universo tenemos $R(t_0) > R(t_1)$, y entonces, para el caso en que Δt sea el período de una onda luminosa emitida desde A y recibida en O, resulta que la onda será recibida con período Δt_0 , mayor que el período Δt_1 con que fue emitida. A través de esta relación tan simple este modelo relativista da cuenta del famoso "corrimiento al rojo", como se denomina al fenómeno de disminución de la frecuencia de la radiación que se recibe de los astros suficientemente distantes.

O también, porque vale la pena decirlo de varias maneras, si $\Delta t_1 = \lambda_1/c$ es el período de una onda luminosa de frecuencia f_1 y longitud de onda λ_1 emitida desde A en η_1, y $\Delta t_0 = \lambda_0/c$ es el período de la onda recibida en O en el instante η_0, resulta que:

$$f_1 R(t_1) = f_0 R(t_0) \qquad (18')$$

Mientras la radiación viaja la frecuencia disminuye exactamente en la misma proporción en la que se expande el universo

O bien:

$$\frac{\lambda_1}{R(t_1)} = \frac{\lambda_0}{R(t_0)} \qquad (18'')$$

La longitud de onda aumenta exactamente en la misma proporción en la que se expande el universo, el cual, *expresado en longitudes de onda, siempre mide lo mismo.*

Vale aclarar que estos párrafos se refieren a la fase de expansión del universo; en la fase de contracción las mismas relaciones indicarían aumento de frecuencia, disminución de longitud de onda, "corrimiento al azul", etc.

El corrimiento al rojo, z, que se define como $\Delta\lambda/\lambda$, según estas expresiones queda:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta R}{R} \qquad (19)$$

Si bien tanto en física clásica como en la relatividad especial el corrimiento al rojo se interpeta a partir del "efecto doppler", como indicador del alejamiento de la fuente cuya radiación se capta, aquí debemos ser más cuidadosos, ya que en este modelo de Universo encontramos conjuntamente el corrimiento, la gravedad y la expansión, sin que sea posible considerar por separado el efecto de la gravedad o de la expansión sobre el corrimiento de la frecuencia, y sin que esté totalmente claro si debe considerarse que el alejamiento de *A es o no es un movimiento.*

Es decir, debemos tener en cuenta:

a) Si estuviésemos considerando un universo vacío, y por lo tanto plano, sin curvatura, sin gravedad, y sin los efectos que estamos encontrando aquí, el observador O sólo podría entender el enrojecimiento de la luz que recibe de A, como una consecuencia de su velocidad de alejamiento, según corresponde al efecto doppler. De la expresión correspondiente (ver Anexo3) se desprende que $z \cong v/c$, para v pequeña, mientras que $z \to \infty$ para $v \to c$. Invirtiendo esta expresión tenemos que, dado un corrimiento al rojo z en un universo plano, sin gravedad, el efecto doppler permitiría deducir una velocidad de alejamiento dada por:

$$v = c\,\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \tag{20}$$

Esta expresión (20) muestra que para este caso del universo plano, $z \ll 1$ indicaría $v \cong c\,z$, mientras que $z \to \infty$ indicaría $v \to c$.

b) La gravedad por sí misma puede producir un corrimiento al rojo entre emisor y receptor aunque ambos estén en reposo relativo; por ejemplo si el receptor de la luz está más elevado en un campo gravitatorio que el emisor (digamos, A en la base y O en la cima de una montaña suficientemente grande en un planeta suficientemente masivo).

c) Nuestro modelo tiene materia con suficiente densidad como para producir los efectos gravitatorios que se traducen en la curvatura, la evolución de la expansión, la contracción, el corrimiento al rojo, etc.

De manera que aunque en este modelo el corrimiento al rojo aparece asociado con la fase de expansión, y el corrimiento al azul con la de contracción, no deberían interpretarse estos corrimientos en términos exclusivos del efecto doppler, como si estuviésemos en un universo plano y sin gravedad, dado que no es el caso.

Podemos intentar comparar la velocidad con que A se aleja de O en nuestro modelo, con la que se deduciría del corrimiento al rojo, interpretado como puro efecto doppler en un universo plano. Para ello debemos analizar la cuaestión de cómo definir esta velocidad

Velocidades de alejamiento

Para abreviar el lenguaje, y para que las conclusiones puedan relacionarse con resultados experimentales limitaremos la discusión a la etapa de expansión del universo.

Hay una problema esencial para definir la velocidad con que un observador como A se aleja de otro como O en este modelo de universo.

El concepto de velocidad en mecánica implica movimiento, es decir cambio de posición respecto de un sistema de referencia. Es usual asociar un observador con un sistema de referencia y decir indistintamente “respecto del observador” o “respecto del sistema”, siendo que la frase correcta siempre es la segunda, ya que la posición siempre se refiere a los elementos del sistema.

Así es que aunque frecuentemente se diga que “O ve moverse a A” con tal velocidad, el concepto de velocidad es un concepto que no requiere ni depende de que O vea a A recorrer cierta distancia, sino que esencialmente implica registrar el pasaje de A por sucesivos lugares del referencial, determinar a partir de esos registros la distancia recorrida, y dividir por el tiempo transcurrido (para abreviar aquí no se presta atención a los elementos relacionados con al dirección del movimiento, porque no aportarían nada a la esencia de la discusión).

$$v = \frac{\text{distancia recorrida en } \Delta t}{\Delta t} \tag{21}$$

Entendida así la velocidad, nos encontramos en serios problemas para definir la velocidad de alejamiento de nuestro observador A con respecto al observador O del modelo de universo que estamos considerando.

Efectivamente, la métrica nos permite definir cómo va aumentando la distancia entre O y A, que son observadores lejanos cualesquiera, pero sucede que estos observadores son fijos: no se desplazan con respecto a los elementos del sistema. Cuando la distancia entre A y O aumenta 1km, no se puede decir que alguno de ellos, A por ejemplo, recorrió 1km respecto del otro, O, porque porque eso implicaría que O puede definir elementos de referencia que están en la zona de A, pero fijos con respecto a él, para registrar respecto de ellos el movimiento de A.

Eso sería pensar que es posible asociar a O un sistema de referencia clásico, no sujeto a expansión ni deformación, que llega hasta la zona distante donde está A, cuyo movimiento quedaría así claramente definido respecto de este sistema. Es claro que eso no puede existir, porque sería negar el modelo: el sistema de referencia en el cual O está fijo es el mismo en el cual A está fijo. La distancia entre ellos aumenta porque el espacio entre ellos “se hicha”, valga la expresión, pero no porque se pueda pensar que alguno de ellos la recorre.

No hay distancia recorrida por estos observadores privilegiados.

De manera que en este trabajo vamos a denominar “seudovelocidades” a lo que vamos a definir como un aumento de distancia por unidad de tiempo que corresponde a la expansión, sin ser una distancia recorrida por unidad de tiempo.

Seudovelocidad de alejamiento según la métrica del modelo

Según la métrica la distancia entre A y O, en cualquier instante dado por η vale:

$$d_{AO}(\eta) = \chi_A\, R(\eta) = \chi_A\, R_0\, (1 - \cos\eta) \tag{22}$$

De manera que podemos definir la seudovelocidad con que A se aleja de O como la derivada de esta distancia con respecto a t. Denominaremos $_s v_A$ a esta seudovelocidad.

$$\begin{aligned} {}_s v_A(\eta) &= \frac{d}{dt}\left(\chi_A R(\eta(t))\right) \\ &= \chi_A \frac{dR}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = \chi_A\, \frac{c}{R}\frac{dR}{d\eta} = c\chi_A\, \frac{\operatorname{sen}\eta}{1-\cos\eta} \end{aligned} \tag{23}$$

La seudovelocidad definida de esta manera nos indica, para cada instante, cuánto está creciendo por unidad de tiempo la distancia al objeto A; es algo que se calcula a partir del modelo, y no algo que pueda medirse o determinarse observando el objeto, si éste es lejano, ya que involucra la noción de lo que debería ser un mismo instante para regiones muy distantes (cosmológicamente distantes, digamos, para precisar el problema). De allí que esta seudovelocidad no guarda a priori ninguna relación con el corrimiento al rojo.

No obstante lo dicho es posible establecer una relación de $_s v_A$ con z, a través de la observación del objeto A, porque ella remite al observador a un tiempo anterior, en el que se produjo la emisión de la luz que se capta, la cual llega con un corrimiento al rojo que da cuenta del grado de antigüedad de dicha emisión.

Efectivamente, en el instante t_0 el observador O determina el corrimiento al rojo z de la luz que recibe de A, y, a través de la relación (19) sabe que ese corrimiento da cuenta de una variación de R, y por lo tanto, de cierto transcurso del tiempo.

Debe quedar claro que O no determina que A se aleja a partir de observarlo, sino que él da por sentado que se aleja porque a través de toda la ciencia que ha desarrollado en otras observaciones y experimentos, representada aquí por el conocimiento del modelo, *él sabe que todos* *los objetos suficientemente lejanos se alejan apreciablemente*. Lo que determina experimentalmente es z, que le da una pauta de lo lejano (en el tiempo y por ello en el espacio) que está A.

Y a partir de su conocimiento del modelo realiza el siguiente razonamiento.

A través de z, O obtiene una pauta de lo lejano que está A. Aplica entonces (23) para un cierto instante t_1 anterior, diciendo que con ello obtiene ${}_sv_A(t_1)$, la seudovelocidad de alejamiento de A en el momento en que la luz partía.

Aplicando luego (19) podría obtenerse χ_A en función de z y de η_0, y sustituida en (23) permitiría escribir la seudovelocidad ${}_sv_A(t_1)$ expresada en función de estas variables.

No lo haremos porque la expresión que se obtiene es muy complicada y requiere conocer η_0, pero es importante decir que *para los objetos cercanos* todo se simplifica y se obtiene la misma relación que en el efecto doppler para z pequeño:

$${}_sv_A \cong z\, c$$

Lo notable de esta definición de seudoelocidad que estamos considerando es que ${}_sv_A$ puede superar a c. Es fácil verificar esto dando valores (por ejemplo: $\eta_1 = 0{,}1$, $\chi_A > 0{,}05$).

Es más, para los objetos más lejanos que pueden verse ($\chi_A \to \eta_0$, en cuyo caso $\eta_1 \to 0$), resulta que z y ${}_sv_A$ pueden hacerse ilimitadamente grandes!

¡Y a pesar de ello en el diagrama de la figura 3 se entiende claramente que la luz enviada desde O alcanzará al punto A, y la luz enviada desde allí llegará a O!

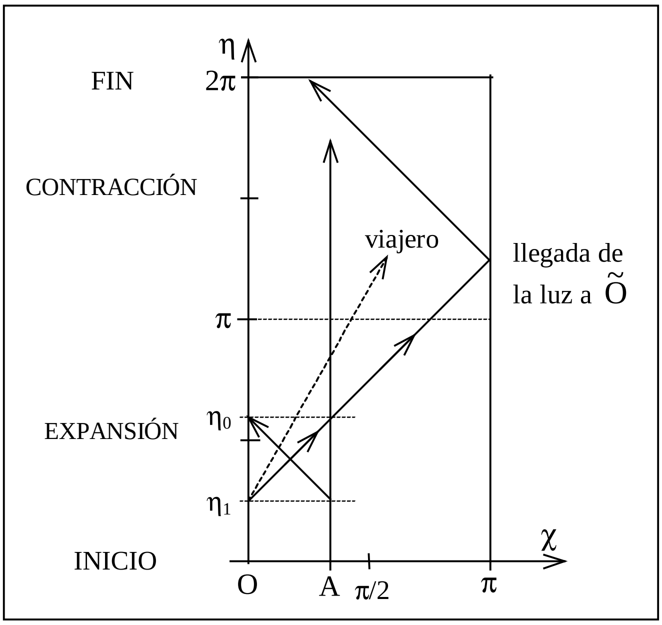


Fig. 3: Esquema de la evolución temporal del modelo cerrado de Universo. Se indican la marcha de un rayo de luz, y de un viajero cualquiera, que parten de O, así como la de un rayo de luz que llega a O desde A.

Además en la figura 3 se ve que *cualquier viajero demorará más que la luz* para llegar desde cualquier punto O a cualquier punto A.

¿Cómo es posible entender esto, y además que A se aleje de O con seudovelocidad mayor que c?

Independientemente de otras consideraciones que se pueden hacer, debe quedar claro que no es cierto que A se aleje de O más rápidamente que la luz, sino que, como se verá enseguida, si bien A se aleja con seudovelocidad ${}_sv_A > c$, a su vez luz que pase por A radialmente en el sentido de los χ crecientes se aleja con ${}_sv_{luz} > {}_sv_A > c$.

Estas afirmaciones exigen que se revisen algunas ideas fundamentales.

Cuando se analiza el movimiento de un cuerpo respecto de un referencial inercial (en un espacio-tiempo plano, en la teoría de la relatividad especial), todo lo que se establece respecto de algún observador de él, se establece *respecto del referencial*. Los observadores particulares pueden considerarse infinitos distribuidos en todos los puntos del referencial (en reposo respecto de él), o uno en el origen, o los que se quieran, o ninguno; esencialmente son irrelevantes, y sólo tienen valor declamativo en las explicaciones (esto también se discute un poco más en el Anexo1).

Las fórmulas de transformación utilizadas para comparar las determinaciones de distintos observadores inerciales (denominadas “transformaciones de Lorentz”), muestran claramente que si algo viaja con velocidad c respecto de uno de ellos, también lo hace respecto de los otros. Así, en el marco de la relatividad especial (espacio-tiempo plano), si O y A son dos observadores distantes que se alejan, un rayo de luz que pasa por A lo hace con velocidad c, según A, y también según O. El hecho de que O sea un observador distante es absolutamente irrelevante, ya que decir con respecto a O, quiere decir con respecto al referencial inercial al cual pertenece, y eso también significa con respecto a un observador O’ *que puede ser imaginado situado en el mismo lugar que A, pero perteneciente al referencial de O* (es decir en reposo respecto de éste).

En cambio la situación en el caso que nos interesa, de relatividad general, es radicalmente diferente porque sólo puede haber referenciales considerados inerciales *localmente*, en extensiones reducidas.

Para reforzar la idea: aquí, en este universo curvo, no tiene sentido tratar de imaginar un observador O’ que esté en el lugar A, pero que esté en reposo con respecto a O. Un referencial inercial al cual pertenezca O sólo puede ser aproximadamente inercial, y sólo tiene sentido en su cercanía - no puede abarcar a alguien distante como A.

La expresión del intervalo relativista dado por la métrica (17), indica que la luz debe viajar con velocidad c con respecto al observador en reposo *local*, dado que: cuando la luz pasa por A lo hace cumpliendo con $c\,dt = R(t)\,d\chi$, o sea recorriendo la distancia $R\,d\chi$ en el tiempo $dt = R\,d\chi/c$. Y esto significa que viaja con velocidad c respecto del observador A, en reposo allí. También lo hace con respecto a cualquier viajero A’ que esté pasando por allí con cualquier velocidad, según podrían mostrarlo las transformaciones de Lorentz, las cuales también podrían mostrar que la *velocidad del viajero, respecto de A, no podrá ser mayor que c*.

El observador O, mientras tanto, *según la definición de distancia que tenemos en el modelo*, establece que *la luz cruza el intervalo dc mientras éste se aleja*. El frente de ondas está en χ_A en t, y cuando llega a $\chi_A + d\chi$, en t + dt, este punto final ya se ha alejado tanto como $\chi_A\,(dR/dt)\,dt = {}_sv_A\,dt$ (con ${}_sv_A$ dada por (23)).

De manera que el rayo de luz, según O, en dt se aleja (se suprime el subíndice A, pues la expresión es válida para cualquier lugar dado por χ):

$$R\,d\chi + \chi\,dR = d(\chi R) = ({}_sv + c)\,dt \qquad (24)$$

Esta expresión daría cuenta de cómo expresar el alejamiento combinado (respecto de O) de un móvil A' que se desplace (radialmente hacia "fuera") con velocidad v localmente respecto a un observador fijo, como el A, el cual a su vez se aleja por efecto de la expansión con seudovelocidad ${}_sv$:

$$\text{Alejamiento total en dt} = (v + {}_sv)\,dt$$

La suma $v + {}_sv$ combina dos efectos diferentes: v es una distancia recorrida por unidad de tiempo, y ${}_sv$ es una distancia "inflada", no recorrida, por unidad de tiempo.

De manera que la expresión (24) para lo que se aleja la luz en dt, no contradice los enunciados de la relatividad.

> El enunciado fundamental de la relatividad especial que dice que la luz viaja con velocidad c respecto de todos los observadores, ahora está contenido en la métrica, la cual establece que la luz viaja con velocidad c *localmente* respecto de cualquier observador.

Lo más curioso es lo que sucede con la luz que parte desde A hacia O. Con el mismo razonamiento anterior se encuentra que la marcha radial de la luz cuando pasa por A, tiene con respecto a O seudovelocidad ${}_sv - c$, la cual, si ${}_sv > c$, como ocurre para los tiempos suficientemente cercanos a cero, es positiva. Es decir, que en los instantes más tempranos, el Universo se expande tan rápidamente que la luz que parte hacia O desde puntos no muy cercanos, inicialmente *se aleja!*. Esta situación no dura indefinidamente porque la rapidez de la expansión disminuye con el tiempo, y como la luz marcha *recorriendo espacio* continuamente en sentido hacia O, llega un momento en que deja de alejarse, comienza a acercarse, y finalmente, como lo indica la figura 3, inexorablemente, llega (es fácil visualizar esta situación dando valores; por ejemplo para $\chi_A = 0,25$, un rayo que parta hacia el origen en $\eta = 0,1$, se alejará hasta algo después de $\eta = 0,2$, y en $\eta = 0,35$ llegará a O).

Otro hecho interesante que se pone en evidencia en la figura 3 es que un rayo de luz lanzado desde O podrá llegar hasta el punto "opuesto", $\tilde{O}$, a condición de haber partido en la etapa de expansión del universo; su viaje, luego de llegar a $\tilde{O}$ consistirá en un retorno hacia O (desde la dirección opuesta del espacio), pero no conseguirá llegar a completar esta "vuelta" hasta el punto de partida, a menos que haya partido en el mismo momento del origen.

Veamos ahora las posibilidades de definir la seudovelocidad de alejamiento con base experimental. En ellas se determina la distancia a los objetos a partir de dos ideas básicas:

a) Relacionando el diámetro angular que subtienden objetos lejanos con el tamaño real, que se supone conocido.

b) Relacionando el brillo con que se observan objetos lejanos con su luminosidad intrínseca, que se supone conocida.

Seudovelocidad según el diámetro

Es posible estimar el tamaño de algunos objetos lejanos con algún grado de aproximación a partir de ciertas características físicas, por comparación con otros más cercanos (por ejemplo el diámetro de galaxias de determinado tipo, clasificadas según su forma, brillo, composición, velocidad de rotación, etc.).

Para uno de estos objetos se puede tener la pretensión de estimar la distancia relacionando el diámetro supuesto conocido, con el diámetro angular que subtiende a la observación.

Si un objeto lejano situado en χ_A, es visto por O subtendiendo un diámetro angular ϕ, entonces los rayos de luz que llegan a O desde los extremos diametrales A, A´, del objeto han viajado por líneas radiales, o sea de θ y φ constantes, de separación angular ϕ.

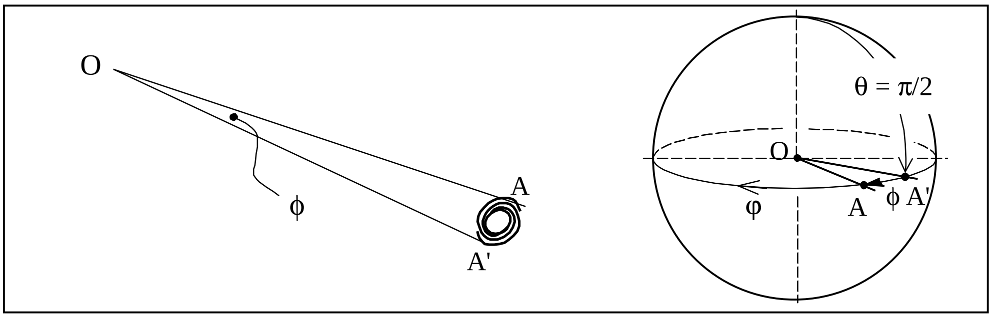


Fig. 4. Ángulo subtendido por las visuales a un objeto lejano.

Si para simplificar las expresiones ubicamos los puntos diametrales considerados en $\theta = \pi/2$, entonces los valores de φ de ambos difieren en la cantidad $\Delta\varphi = \phi$, y su diámetro, D, según la métrica (17) es ($d\eta = d\chi = d\theta = 0$; $d\varphi = \phi$):

$$D = AA' = R(\eta_1)\ \mathrm{sen}\chi_A\ \phi \tag{25}$$

Definiremos la distancia d_ϕ relacionando este diámetro con el diámetro angular observado según lo que correspondería a un espacio plano:

$$d_\phi = \frac{D}{\phi} \tag{26}$$

Con esto se obtiene:

$$d_\phi = R(\eta_1)\ \mathrm{sen}\chi_A \tag{27}$$

Vemos que, para χ_A pequeño, es decir mientras la curvatura del espacio no influye, esta distancia prácticamente coincide con la que se calcularía con la métrica para el instante de partida de la luz[1]: $\chi_A R(\eta_1)$.

Al final de este punto hay una aclaración importante sobre lo que significa decir "mientras la curvatura del espacio no influye".

Mientras transcurre un Δt se ve disminuir ϕ, lo que se interpreta como aumento de d_ϕ , y se puede calcular la seudovelocidad que denominamos ${}_s v_\phi$:

$${}_s v_\phi = \frac{\Delta d_\phi}{\Delta t} \tag{28}$$

Pero ahora tenemos una ambigüedad: ¿debemos dividir por Δt_0 , el tiempo transcurrido mientras O ve que se produce el alejamiento, o por Δt_1 , el tiempo que transcurrió mientras se produjo el alejamiento?

---

[1] La expresión para definir d_ϕ exactamente sería $d_\phi = (D/\phi)(\chi/\mathrm{sen}\chi)$. Esta expresión no es aplicable porque, para cada objeto, además de D y ϕ, requiere χ, que es desconocido. Por ello se decide una definición como (26), que correspondería a un espacio plano, y se encuentra que es aceptable dentro de ciertas limitaciones.

Está claro que d_ϕ es una distancia que corresponde a t_1 , y que utilizando su incremento no se puede pretender determinar una seudovelocidad que corresponda a t_0, sino a t_1. Esto sugiere claramente que hay que dividir por Δt_1.

$$
{}_s v_\phi = \frac{\Delta d_\phi}{\Delta t_1} = \operatorname{sen}\chi_A \frac{dR(t_1)}{dt_1} = \operatorname{sen}\chi_A \left.\frac{dR}{d\eta}\right|_{\eta_1} \left.\frac{d\eta}{dt}\right|_{t_1}
$$

$$
= \operatorname{sen}\chi_A \frac{R_0 \operatorname{sen}\eta_1}{\frac{1}{c} R_0 (1-\cos\eta)} = c \operatorname{sen}\chi_A \frac{\operatorname{sen}\eta_1}{1-\cos\eta_1} \tag{29}
$$

Vemos que, para objetos no tan lejanos que moleste la curvatura (ver nota más adelante), esta expresión es esencialmente la misma que (23), para ${}_s v\,(\eta_1)$, y como aquélla, para η_1 muy pequeño supera fácilmente el valor de c si el objeto observado no es muy cercano, correspondiéndole todos los comentarios de aquel caso.

También resulta muy complicado expresar exactamente de manera explícita la dependencia de ${}_s v_\phi$ con z, excepto para objetos no muy lejanos, para los cuales vale la misma expresión que en todos los casos anteriores:

$$
{}_s v_\phi = c\, z \text{ , para } z \ll 1
$$

Por otra parte, si se hubiera dividido el aumento de d_ϕ por Δt_0 se hubiera obtenido:

$$
\frac{\Delta d_\phi}{\Delta t_0} = c \operatorname{sen}\chi_A \frac{\operatorname{sen}\eta_1}{1-\cos\eta_0} \tag{29'}
$$

Puede verse fácilmente que esta cantidad siempre es menor que c. Pero como ya se ha comentado que en un universo que se expande no hay nada que prohiba que en Δt la distancia entre dos observadores lejanos aumente más que c Δt, no insistiremos tratando de inventar cómo definir seudovelocidades de alejamiento que se mantengan menores que c.

Antes de abandonar el tema es bueno señalar que el tiempo Δt_0 que transcurre para el observador mientras el objeto es observado alejándose una distancia Δd_ϕ , no es más real, o más medible, que el Δt_1 que queremos utilizar en el denominador, ya que ambos están relacionados directamente por el corrimiento z. Es decir que si O determina Δt_0 como cierto número de oscilaciones de la radiación que recibe, ese mismo número de oscilaciones de la radiación al ser emitida determina el intervalo Δt_1 que realmente transcurrió mientras el alejamiento considerado Δd_ϕ tenía lugar.

Nota sobre la curvatura y las distancias grandes o pequeñas

Cuando tenemos definiciones de distancia (y luego por consiguiente, de velocidad) que sólo difieren en que una es proporcional a χ mientras que la otra lo es a senχ, queda claro que ambas coinciden para χ pequeño, pero a veces no se ve claramente en qué condiciones pueden diferir de manera importante.

Para discutir eso es útil considerar la expresión (25) para la relación entre el diámetro de un objeto lejano y el ángulo subtendido a la observación: $D = R(\eta_1)\operatorname{sen}\chi_A\,\phi$. Esta expresión nos muestra claramente qué se puede entender por "molestar la curvatura": si χ supera $\pi/2$ el ángulo subtendido por las visuales será mayor cuánto más lejos esté el objeto.

Más aún, ϕ crecería sin límite (hasta π), si χ se aproximara a π.

Ahora bien, inspeccionando la figura 3 se advierte fácilmente que estas molestas distorsiones no tienen lugar en cualquier momento: cualquier observador O no puede recibir luz de objetos que estén más lejos que $\chi = \pi/2$ hasta la mitad de la fase de expansión del universo (y la distorsión catastrófica ocurrida con la luz de objetos cercanos a $\chi=\pi$ no podría ser captada hasta comenzar la fase de contracción).

De manera que si por razones prácticas nos limitamos a observadores en la primer mitad de la fase de expansión, siempre tendremos que $\chi < \pi/2$, y la diferencia entre senχ y χ a lo sumo será la diferencia entre 1 y 1, 57. Y para observadores que vivan antes de que η llegue a $\pi/4$, por ejemplo, y la diferencia entre χ y senχ no podrá superar el 10%.

De manera que cuando se piensa que se está en fases no muy avanzadas de la expansión, al pedir que no moleste la curvatura no se está imponiendo una gran limitación a la distancia. Los objetos más lejanos que estos observadores pueden observar tienen $\chi \approx \eta_0$, es decir χ suficientemente pequeño *pero no necesariamente muy pequeño*), y en cambio tienen η_1 cercano a cero, por lo cual les corresponden valores de z >> 1 y seudovelocidades mucho mayores que c. Para estos casos χ no difiere mucho de senχ, y los efectos de la curvatura espacial son despreciables.

Seudovelocidad según la luminosidad

Un método utilizado en astronomía para determinar distancias consiste en comparar el brillo con que se ve un astro, dado por la magnitud aparente, con el brillo que presenta a cierta distancia estándar, dado por la denominada magnitud absoluta, que se supone conocido en función de características del astro que se reconocen en su espectro. Aquí asociaremos las magnitudes aparente o absoluta, con la densidad de potencia (por unidad de área transversal) recibida o emitida.

Como se mostará en el Anexo 2, si DP_A es la densidad de potencia radiante emitida a través de una superficie esférica de radio ρ estándar pequeño que rodea al emisor situado en χ_A, y DP_0 es la densidad de potencia que capta el observador en el origen, con corrimiento al rojo z, el modelo permite establecer la siguiente relación entre ambas:

$$DP_0 = DP_A \left(\frac{\rho}{R(\eta_1)\,\mathrm{sen}\,\chi_A} \right)^2 \frac{1}{(1+z)^4} \qquad (30)$$

Por otra parte (ver Anexo 3) la relatividad especial permite establecer, para la densidad de potencia $DP_0´$ que se capta de una fuente de las mismas caracaterísticas que huye con corrimiento al rojo z en un espacio plano (siendo d_{obs} la distancia del observador a la fuente en el momento de partir la luz de ésta):

$$DP_0´ = DP_A \left(\frac{\rho}{d_{obs}} \right)^2 \frac{1}{(1+z)^4} \qquad (31)$$

De manera que la expresión (31) permite definir la distancia d_L , basada en la luminosidad observada, correspondiente al instante de partida de la luz, como:

$$\frac{d_L}{\rho} = \frac{1}{(1+z)^2}\sqrt{\frac{DP_A}{DP_0}} \qquad (31')$$

Aplicando esta definición a nuestro caso para observadores no muy lejanos, se obtiene[2]:

$$d_L(t_1) = R(\eta_1)\ \mathrm{sen}\chi_A \qquad (32)$$

La cual coincide exactamente con la d_ϕ definida sobre la base de la medición del diámetro, y por lo tanto conducirá a la misma definición de seudovelocidad: ${}_sv_L = {}_sv_\phi$.

La constante de Hubble

En cualquiera de las variantes consideradas se obtiene que para objetos no nuy lejanos ${}_sv = z\ c$. Dado que en principio z resulta proporcional a la distancia, el cociente ${}_sv/d$ resulta independiente del objeto observado, y define la constante de Hubble, H:

$$H = \frac{{}_sv}{d} \qquad (33)$$

Si esta expresión se calcula con la definición de distancia dada por la métrica, como corresponde, se obtiene una expresión exacta, estrictamente independiente del observador:

$$H = \frac{{}_sv(\eta_0)}{\chi_A R(\eta_0)} = \frac{c}{R^2}\left.\frac{dR}{d\eta}\right|_{\text{en }\eta_0} \qquad (34)$$

La exactitud de esta expresión en la práctica no es demasiado importante porque experimentalmente sólo se pueden determinar seudovelocidades y distancias correspondientes a tiempos anteriores, más antiguos para objetos más lejanos, por lo cual nunca se tiene una colección de valores correspondientes a diferentes objetos en un mismo instante.

Por otra parte la constante H varía con el tiempo: debe disminuir a medida que el tiempo transcurre, ya que su inversa, $d/{}_sv$, representa, dentro de cierta aproximación, la edad del Universo (pensando en un esquema elemental de cuerpos viajando con velocidad constante desde la explosión inicial – ignorando la acción retardadora de la gravedad y los demás detalles del modelo).

Si por ejemplo se aproximan los elementos de la expresión (34) para η pequeño, reteniendo sólo primer orden en η, se obtiene:

$$\frac{dR}{d\eta} = R_0\,\mathrm{sen}\,\eta \cong R_0\ \eta$$

$$R = R_0(1-\cos\eta) \cong R_0\frac{\eta^2}{2}$$

$$H \cong \frac{c}{R_0^2\dfrac{\eta^4}{4}}\,R_0\,\eta = \frac{4\ c}{R_0\,\eta^3}$$

---

[2] Nuevamente estamos en la situación de que, para definir la distancia de manera que coincida exactamente con la que se obtiene de la métrica para todos los observadores, debería hacerse uso de parámetros que no se obtienen directamente de la observación.

Pero según (14):

$$t = \frac{R_0}{c}(\eta - \operatorname{sen}\eta) \cong \frac{R_0}{c}\frac{\eta^3}{6}$$

De manera que para tiempos pequeños $H \cong \frac{2}{3\,t_0} = \frac{1}{\frac{3}{2}t_0}$

En un esquema clásico $H = 1/t_0$ correspondería a una expansión a velocidad constante, y este resultado corresponde a cierto grado de frenado del proceso.

El caso del universo abierto

Si la densidad de materia es menor que cierto valor crítico para ciertas condiciones de la expansión que no viene al caso precisar aquí, la gravitación no podrá detener la expansión, y se tendrá que la evolución ocurrirá según el siguiente modelo "abierto".

Para este caso todas las cosas notables suceden de la misma manera que en el modelo de universo cerrado, excepto que la expansión es ilimitada, y el espacio se hace cada vez más plano a medida que transcurre el tiempo.

La métrica espacial es:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{R^2}} + r^2\,(\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) = R^2\,\{d\chi^2 + \operatorname{senh}^2\chi\,(\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\} \qquad (35)$$

Con χ dado por: $r = R\,\operatorname{senh}\chi$, es decir:

$$\chi = \operatorname{arcsenh}(r/R) \qquad (36)$$

La distancia radial nuevamente queda dada por $d = \chi\, R$. Tanto r como χ toman valores entre cero e infinito.

La evolución temporal se obtiene definiendo la variable η de la misma manera:

$$c\,dt = R(t)\,d\eta \qquad (16)$$

Resultando, para este caso:

$$R = R_0\,(\cosh\eta - 1) \qquad (37)$$

$$t = \frac{R_0}{c}\,(\operatorname{senh}\eta - \eta) \qquad (38)$$

La constante R_0 en este caso queda definida en función de la densidad por la misma expresión (15), aunque ahora la masa total es ilimitada, y por ello no se pretende que valga aquí la definición en función de M. Nuevamente δ y R son funciones del tiempo, pero $\delta\, R^3$ es una constante.

$$R_0 = \frac{4\pi G \delta R^3}{3\,c^2} \qquad (15)$$

Nuevamente la marcha de los rayos radiales de luz ($ds = 0$, $d\theta = d\varphi = 0$), está dada por $d\chi = \pm\, d\eta$, y esto permite realizar diagramas similares a los de las figuras 2 y 3, para analizar de la misma manera los avatares de posibles viajeros y rayos de luz.

COMENTARIOS DE CIERRE

Como es posible sospechar, entre la densidad de materia suficiente para tener el modelo cerrado, con curvatura espacial positiva y expansión seguida de contracción, y la densidad suficientemente baja como para tener el modelo abierto, con curvatura espacial negativa y expansión indefinida, existe un valor crítico de la densidad para el cual se tiene un caso límite, de *curvatura espacial nula*, y en el cual la expansión es indefinida pero con la mínima velocidad que hace posible que se mantenga.

El caso del Universo en expansión sin curvatura espacial, muy interesante para restablecer comparaciones puede encontrarse a un nivel muy accesible y ameno en [3]. Es interesante distinguir cómo algunos de los efectos notables que se han presentado pueden ser atribuidos más a la curvatura del espacio, que a la expansión o contracción, mientras que otros, a la inversa, resultan más bien efecto de la expansión y no de la curvatura.

Una forma interesante de visualizar y así llegar a entender mejor algunos aspectos complejos de estos temas consiste en proponer situaciones con valores, y desarrollarlas desde varios puntos de vista. Es posible así analizar, comparar, distinguir algunos efectos que son aparentes, y lograr un panorama más general.

CITAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]: Santaló, L. A. 1961. *Geometrías no euclidianas*. Cuadernos de EUDEBA.

[2]: Landau, L.D. y Lifchitz, E.M. 1973. *Teoría clásica de los campos*. Ed. Reverté.

[3]: Gleiser, R.J., y Hamity, V.H. 1993. *La Gran explosión: un modelo de cosmología relativista*. Revista de Ensdeñanza de la Física. Vol.6, N° 1. Mayo 1993.

ANEXO 1

Localidad y simultaneidad.

Uno de los resultados más notables de la relatividad especial es que el intervalo de tiempo propio Δt^* entre dos sucesos (denominado así el intervalo de tiempo entre dos sucesos para un observador para el cual ocurren en el mismo lugar - expresión (3) del texto) es más corto que el que determina cualquier otro observador para el mismo par de sucesos, según la expresión:

$$\Delta t^* = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta t}{\gamma},$$

en donde v es la velocidad del referencial en el cual el intervalo temporal es Δt, respecto del referencial en el cual los dos eventos ocurren en un mismo lugar, y $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$ es un factor mayor que 1 (excepto cuando v = 0), muy utilizado en relatividad. Se interpreta esto diciendo que cualquier reloj, viajando, atrasa con respecto a los relojes del referencial desde el cual se lo ve viajar.

Como cabe esperar de la teoría relativista, que se construye sobre la base de la equivalencia de todos los observadores inerciales para describir los sucesos, y aunque resulte difícil de entenderlo en un principio, este efecto es recíproco: el reloj viajero puede considerarse fijo en un referencial respecto del cual los relojes fijos del párrafo anterior, ahora son los viajeros.

¿Cómo es posible afirmar que cada uno de los observadores ve atrasar a los relojes del otro?

Para entender que no hay contradicción es necesario revisar con cierto cuidado los detalles involucrados en las transformaciones de Lorentz, lo cual no es el objetivo de este trabajo. Aquí nos limitaremos a un análisis reducido tendiente a que se puedan interpretar algunas nociones con cierta claridad

Cuando se dice que desde el referencial inercial K_1 se *observa* que un reloj cualquiera de otro referencial inercial K_2, atrasa, no significa que algún observador particular en reposo en K_1 lo ve atrasar (lo cual podría involucrar efectos aparentes por la demora de la luz para llegar al observador particular), sino que se *determina* que atrasa comparándolo *localmente* con cada reloj del referencial K_1 junto al cual va pasando el reloj viajero. Para esto muchas veces se acude a la idea de un referencial como un entramado lleno de relojes sincronizados, que siempre tiene un reloj listo para comparar con el reloj viajero en cualquier lugar y momento por el que aquél pase. Esto no esa necesario en la práctica: simplemente es posible *calcular* lo que arrojaría la comparación entre relojes sin que ellos materialmente deban existir, y *ese resultado* es lo que expresa la fórmula $\Delta t^* = \Delta t / \gamma$.

La contradicción entre esta expresión y la relatividad de las observaciones de K_1 y K_2 no existe porque el efecto es recíproco, es decir se puede determinar que cada reloj de K_1, a su vez, atrasa de la misma manera respecto de los sucesivos relojes hipotéticos sincronizados de K_2 que iría encontrando en su camino.

Y la contradicción que ahora parece existir entre todas estas afirmaciones anteriores desaparece cuando se advierte que la noción de tiempo absoluto de la física clásica es alterada de tal manera por la teoría relativista, que lo que es simultáneo para un referencial no lo es para otro: K_1 considera que todos sus relojes están bien sincronizados (entre sí), pero no los de K_2, quien a su vez afirma, recíprocamente, que son los suyos y no los de K_1, los que están bien. Esta pérdida de la noción de simultaneidad como algo absoluto es el precio que debe pagarse para entender cómo la luz puede ser considerada viajando con la misma velocidad c por observadores que se mueven con diferentes velocidades.

En relatividad la noción de que dos acontecimientos son simultáneos, sólo tiene sentido para un observador particular, a menos que los dos acontecimientos ocurran en el mismo lugar. Es decir, en general el concepto de simultaneidad sólo tiene valor *local*.

ANEXO 2

Disminución del brillo con la distancia en el universo de curvatura uniforme positiva.

Una fuente emite N fotones de frecuencia f_1 isotrópicamente desde A, entre η_1 y $\eta_1 + \Delta\eta$. Esto significa una potencia emitida $P_1 = h\, f_1 / \Delta t_1$, con densidad $DP_1 = P_1/(4\pi\rho^2)$, siendo ρ el radio muy pequeño de una superficie esférica centrada en A, y h la constante de Planck. La densidad de potencia DP_1 sería al brillo observado a una distancia patrón ρ, lo que en la práctica se mide con la magnitud absoluta.

Estos fotones llegan a O entre η_0 y $\eta_0 + \Delta\eta$, con frecuencia $f_0 = f_1\,(R(\eta_1) / R(\eta_0)) = f_1 / (1+z)$, distribuidos, según A, isotrópicamente en la cáscara esférica de superficie $4\pi\, r_A^2(\eta_0) =$ $4\pi\,(R(\eta_0)\,\mathrm{sen}\chi_A)^2$. Para calcular la superficie de la cáscara se utiliza el hecho de que, como todos los observadores son equivalentes, cuando la cáscara ha llegado a O, le corresponde, con respecto a A en el origen, un valor de χ que es el mismo χ_A que se ha estado utilizando para situar al punto A respecto de O en el origen. Luego se obtiene de la métrica (17), haciendo $d\eta=0$, $d\chi=0$, que cualquier segmento transversal, es decir sobre la cáscara, que subtienda un ángulo $d\phi$ con respecto al centro, tiene una longitud dada por $(R(\eta_0)\,\mathrm{sen}\chi_A)\times d\phi$.

Ahora bien, O recibe la radiación a través de una ventana transversal de superficie S, a la cual tanto A como O atribuyen las mismas dimensiones, ya que, un segmento cualquiera que sea lado de esta ventana, es una línea del mismo η constante para ambos, cuya longitud, dada por la métrica, es invariante por definición.

De manera que O recibe una densidad de potencia DP_0 dada por:

$$DP_0 = \frac{N\,h\,f_0}{4\pi\,(R(\eta_0)\,\mathrm{sen}\,\chi_A)^2\ \Delta t_0} = \frac{N\,h\,\left(f_1/(1+z)\right)}{4\pi\,R(\eta_1)^2\,(1+z)^2\,\mathrm{sen}^2\chi_A\ \Delta t_1\,(1+z)}$$

$$= P_1 \frac{1}{4\pi\left(R(\eta_1)\,\mathrm{sen}\,\chi_A\right)^2}\frac{1}{(1+z)^4} = DP_1\left(\frac{\rho}{R(\eta_1)\,\mathrm{sen}\,\chi_A}\right)^2\frac{1}{(1+z)^4}$$

ANEXO 3

Brillo, distancia, efecto doppler y corrimiento al rojo en relatividad especial.

Ahora consideremos un emisor A que viaja uniformemente alejándose con velocidad v de un observador O en reposo en el origen de un referencial inercial, en un universo vacío, sin gravedad, es decir plano.

Para simplificar ambos observadores cuentan el tiempo desde el instante en que se han cruzado, de manera que la posición de A es x = c t.

Las coordenadas en el referencial de A serán indicadas con el subíndice (A). En la figura se muestra un diagrama de Minkowsky con la descripción hecha por O.

O recibe en t_0 luz que A emitió en t_1 desde el lugar $x_1 = v\, t_1$.

A emitió isotrópicamente N fotones de frecuencia f_A entre $t_{1(A)}$ y $t_{1(A)}+\Delta t_{(A)}$, los cuales viajan, según A, distribuyéndose uniformemente en una cáscara esférica de radio c ($t_{(A)}$ - $t_{1(A)}$).

En t_0 , cuando la cáscara llega a O, tiene un radio $x_{0(A)} = c\,(t_{0(A)} - t_{1(A)})$, y transporta una densidad de fotones (por unidad de área transversal): $N / 4\pi\, x_{0(A)}^{\;2}$.

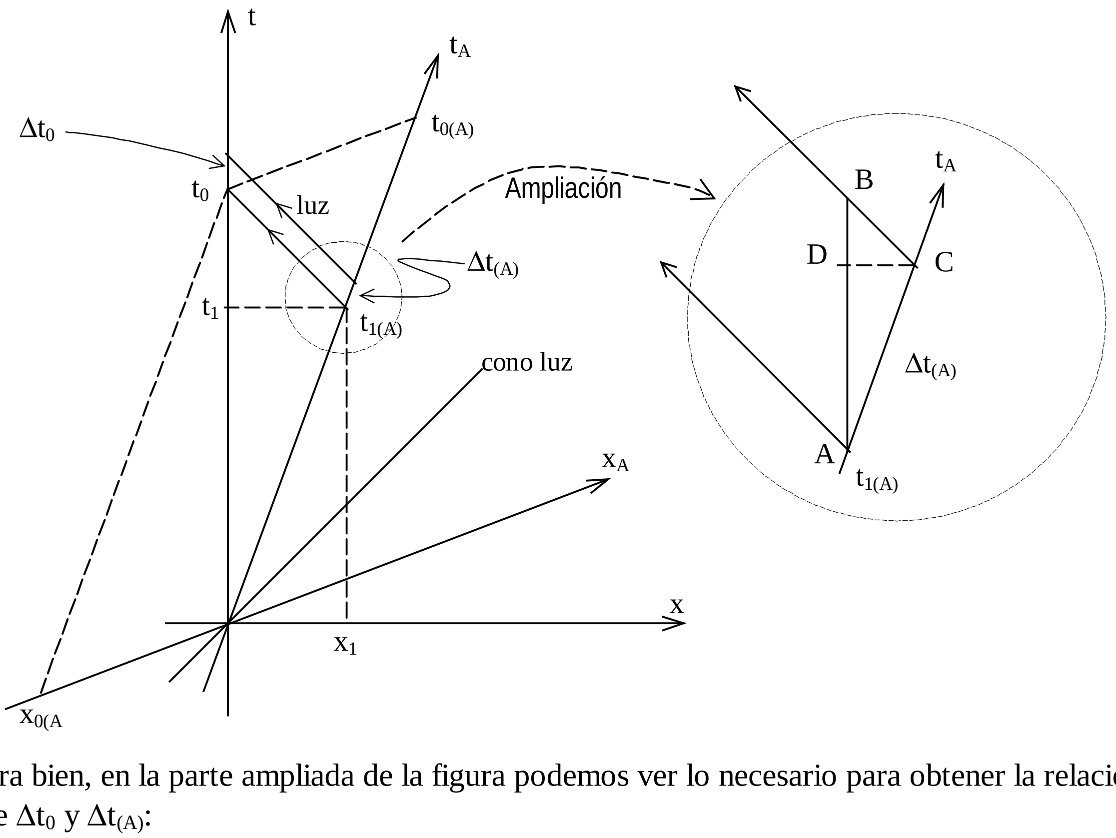
Ahora bien, O capta los fotones a través de una superficie transversal $S = S_{(A)}$, de manera que la cantidad de fotones (de frecuencia f_0) que recibe en Δt_0 está dada por:

$$\frac{N}{4\pi\, x_{0(A)}^{\;2}}\, S$$

Lo que corresponde a una densidad de potencia detectada DP_0:

$$DP_0 = \frac{N}{4\pi\, x_{0(A)}^{\;2}} \frac{h f_0}{\Delta t_0} = \frac{N h f_A}{4\pi\, x_{0(A)}^{\;2} \Delta t_{(A)}} \frac{\Delta t_{(A)}}{\Delta t_0} \frac{f_0}{f_A}$$

Siendo Δt_0 el tiempo de O que demora en ser captada la parte correspondiente de la radiación que fue emitida entre $t_{1(A)}$ y $t_{1(A)}+\Delta t_{(A)}$.



Ahora bien, en la parte ampliada de la figura podemos ver lo necesario para obtener la relación entre Δt_0 y $\Delta t_{(A)}$:

$$\Delta t_0 = AB = AD + DB$$

En donde:

AD es el intervalo $\Delta t_{(A)}$ medido por O, y dado que $\Delta t_{(A)}$ es un intervalo propio para A, entonces (siendo $\gamma = (1\text{-}v^2/c^2)^{-1/2}$):

$$AD = \gamma\, \Delta t_{(A)} ,$$

DB es el tiempo demorado por la luz para recorrer la distancia DC, que es lo que se aleja A en el tiempo AD (todo según las determinaciones de O); por lo tanto:

$$DB = \frac{v\,AD}{c} = \frac{v}{c}\,\gamma\, \Delta t_{(A)}$$

Entonces:

$$\Delta t_0 = \gamma\, \Delta t_{(A)} + \frac{v}{c}\,\gamma\, \Delta t_{(A)} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) \Delta t_{(A)}$$

Ahora bien, si consideramos que Δt sea el período de una onda, entonces lo que tenemos aquí es el efecto doppler:

$$\Delta t_0 = \frac{1}{f_0} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) \frac{1}{f_A}$$

Donde el factor involucrado resulta ser:

$$\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = 1 + z$$

De manera que la densidad de potencia detectada DP_0 queda:

$$DP_0 = \frac{N\,h\,f_A}{4\pi\, x_{0(A)}{}^2\, \Delta t_{(A)}}\, \frac{1}{(1+z)^2}$$

Ahora bien, $N\,h\,f_A / \Delta t_{(A)}$ es la potencia P_A , irradiada por A, la cual podría relacionarse con la densidad de potencia, o sea el brillo, observado a una distancia patrón ρ (lo que en la práctica se mide con la magnitud absoluta), según: $DP_A = P_A / (4\pi\rho^2)$, con lo cual:

$$DP_0 = DP_A\, \frac{\rho^2}{x_{0(A)}{}^2}\, \frac{1}{(1+z)^2}$$

Pero desde el punto de vista de O, quien recibe la radiación, $x_{0(A)}$ carece de significado. O recibe radiación emitida en t_1 desde A que estaba a distancia x_1. Esta distancia $x_1 = c\,(t_0 - t_1)$ es la que ha recorrido la luz según O, y es en función de ella que debemos expresar la densidad de potencia recibida.

Para relacionar x_1 con $x_{0(A)}$, tenemos que:

1. $x_{0(A)}$ es la distancia que A ha visto alejarse a O desde que se cruzaron (cero de los tiempos de ambos) hasta el instante $t_{0(A)}$ (instante de A en que la radiación llega a O). De manera que tenemos que traducir a A el intervalo de duración t_0 , que es propio para O:

$$t_{0(A)} = \gamma\, t_0$$

   Y con esto tenemos $x_{0(A)} = -\,v\,t_{0(A)} = -\,v\,\gamma\,t_0$

2. Por otra parte x_1 es la distancia que O ve alejarse a A hasta que parte la radiación, y también es la distancia que, según él, recorre la luz:

$$x_1 = v\,t_1 = c\,(t_0 - t_1)$$

Ahora eliminando t_0 y t_1 nos queda:

$$x_{0(A)} = -x_1\ \gamma \left(1+\frac{v}{c}\right) = -x_1\ (1+z)^2$$

Con lo cual la densidad de potencia recibida finalmente queda:

$$DP_0 = DP_A\ \frac{\rho^2}{x_1^{\ 2}}\ \frac{1}{(1+z)^4} = \frac{P_A}{4\pi\ x_1^{\ 2}}\ \frac{1}{(1+z)^4}$$