Práctico 7

1. Escribir en cada caso el polinomio de Taylor en el punto a de orden n dado, y calcular su grado.

(a) $f(x) = x^6; \quad n = 6, a = 1.$ (b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}; \quad n = 3, a = 0.$

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad n = 2, a = \pi/2.$ (d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt; \quad n = 2, a = 0.$

2. Hallar en cada caso los polinomios de Taylor de todos los órdenes en el punto a.

(a) $f(x) = e^x, \quad a = 0.$ (b) $f(x) = \ln x, \quad a = 2.$

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0.$ (d) $f(x) = \cosh x, \quad a = 0.$

3. Suponer que f y g tienen derivadas de todos los órdenes. Hallar en cada caso el polinomio de Taylor de orden n en el punto a, en términos de los polinomios de Taylor de f y g de orden adecuado en a.

(a) $f + g.$ (b) $f'.$

4. (a) Sea $f(x) = \cos(x^7)$ y sea p el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $\cos x$ en $a = 0$. Probar que $q(x) = p(x^7)$ es el polinomio de Taylor de f de orden 28 en $a = 0$. *Sugerencia*: verificar que grado$(q) \leq 28$ y que f y q son iguales hasta el orden 28 en $a = 0$.
(b) Calcular $f^{(14)}(0)$.

5. (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 5 de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}$ en $a = 0$, a partir de polinomios de Taylor de orden adecuado de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $1/(1 + x^2)$.
(b) Calcular $f^{(4)}(0)$.

6. (a) Hallar el polinomio de Taylor $p_{2n+1,0}$ de orden $2n + 1$ de la función $\arctan(x)$ en $a = 0$. Verificar que coincide con el de orden $2n + 2$. *Sugerencia*: recurrir a los polinomios de Taylor de la función $1/(1 + x^2)$.
(b) Estimar el error cometido si se aproxima $\arctan(x)$ por $p_{7,0}(x)$ para $|x| < 0.2$. *Sugerencia*: no usar la fórmula de Taylor.

7. Escribir cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x - 2)$.

(a) $x^3 - 2x + 9.$ (b) $x^2 - 2.$ (c) $x^5.$

8. Estimar el error cometido al aproximar la función $\sqrt[3]{x}$ por su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 8$, para $7 \leq x \leq 9$.

9. Sea $f(x) = (1 + x)^{1/2}$. Usando el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $a = 0$, calcular el valor aproximado de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{9}$ que da dicho polinomio. Estimar el error.

10. (a) ¿Para qué valores de x se puede aproximar $\operatorname{sen} x$ por $x - \dfrac{x^3}{3!}$, con un error menor que 10^{-4}?
(b) Estimar el error que se comete cuando se aproxima $\operatorname{sen} x$ por $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $|x| < 0.2$.

11. Usar la fórmula de Taylor para calcular el número dado con la precisión indicada.
(a) e, con un error menor que 10^{-3}.
(b) $\cos(0.1)$, con un error menor que 10^{-4}.

12. Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$, con un error menor que 10^{-6}.

13. Calcular cada uno de los siguientes límites empleando un polinomio de Taylor de orden adecuado. Justificar usando el resto.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x\,(1-\cos(3x))}$.

14. Mostrar un ejemplo de una función f con derivadas de todos los órdenes, tal que para todo $x \neq 0$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,0}(x) \neq f(x).$$