UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "A"

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 79/07

Variedades Kählerianas parientes

Antonio J. Di Scala

Editores: Jorge R. Lauret–Elvio A. Pilotta

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

VARIEDADES KÄHLERIANAS PARIENTES.

ANTONIO J. DI SCALA

Estas notas tienen como objeto presentar el concepto de variedades Kählerianas *parientes*.

Se incluye una breve presentación de la *Diastasis de Calabi*, del Teorema de Rigidez, de la existencia de inmersiones Kählerianas en espacios de Hilbert y del Teorema de Umehara.

Estas notas se escribieron durante la visita del autor al Fa.M.A.F. en el período Diciembre 2006 - Febrero 2007 gracias al financiamiento del Subsidio Cesar Milstein del Programa Raíces, Argentina.

1. Preliminares.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un abierto del plano y sea $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Podemos escribir:

$$\psi(x, y) = \psi(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i})$$

donde $z = x + iy \in \Omega$ y $\overline{z} = x - iy \in \overline{\Omega}$. Abusando de la notación, vamos a escribir formalmente

$$\psi(z, \overline{z}) := \psi(x, y)$$

y decimos "formalmente" ya que no se requiere la existencia de una función $\psi : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ que realice la igualdad. Sin embargo el siguiente ejercicio muestra que en algunos casos $\psi(z, \overline{z})$ es legítimamente una función de dos variables.

Ejercicio 1.1. Sea $\psi \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio. Demuestre que existe un polinomio $\psi \in \mathbb{C}[z, w]$ tal que:

$$\psi(z, \overline{z}) = \psi(x, y) \ .$$

Más aún, lo anterior admite la siguiente generalización: si $\psi(x, y)$ es analítica[1] respecto de (x, y) entonces existe una $\psi(z, w)$ analítica respecto de z, w tal que $\psi(z, \overline{z}) = \psi(x, y)$.

Una ventaja de escribir $\psi(x, y) = \psi(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i})$ es que permite recordar fácilmente la definición de los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ a través de la regla de la

[1] La palabra "analítica" indica convergencia de los desarrollos de Taylor.

cadena, e.g.,

$$\frac{\partial\,\psi}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial\,\psi}{\partial x}\frac{\partial\,x}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial\,\psi}{\partial y}\frac{\partial\,y}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial\,\psi}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial\,\psi}{\partial y}\left(\frac{-1}{2i}\right)\ ,$$

de donde obviamente se define:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Esta definición permite calcular rápidamente las derivadas respecto de z o $\overline{z}$ una vez escrita (si es posible) la función como función de z y $\overline{z}$.

Ejercicio 1.2. Demuestre que el Laplaciano $\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ satisface

$$\triangle=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}.$$

Una función $f:\Omega\subset\mathbb{C}^n\rightarrow\mathbb{C}$ se llama holomorfa (resp. anti-holomorfa) si $\frac{\partial\,f}{\partial\overline{z}_i}\equiv 0$ (resp. $\frac{\partial\,f}{\partial z_i}\equiv 0$)para todo $i=1,2,\cdots,n$. Las funciones holomorfas entre abiertos de $\mathbb{C}^n$ se definen requiriendo (como es natural) que sus componentes lo sean; e.g., $f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ es holomorfa si y sólo si todas las f_i lo son.

El producto interno Hermitiano $(z\mid w)=\sum_{i=1}^n z_i\overline{w_i}$ de dos puntos (o vectores) $z,w\in\mathbb{C}^n$ permite definir la norma $|z|^2=(z\mid z)$. La esfera unidad $S^{2n-1}\subset\mathbb{C}^n$ se define como $S^{2n-1}:=\{x\in\mathbb{C}^n:|z|^2=1\}$.

Ejercicio 1.3. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ abierto y conexo. Si $f:\Omega\rightarrow\mathbb{C}^n$ es holomorfa y $f(\Omega)\subset S^{2n-1}$ entonces f es constante. Para demostrar esta afirmación no hace falta el principio del máximo. Observe simplemente que siendo f holomorfa entonces $\triangle(|f(z)|^2)=4|f'(z)|^2$.

Los operadores $\partial,\overline{\partial}$ actuando en funciones se definen como sigue:

$$\partial f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\,f}{\partial z_i}dz_i$$

$$\overline{\partial}f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\,f}{\partial\overline{z}_i}d\overline{z}_i$$

Ejercicio 1.4. Demuestre que $df=(\partial f+\overline{\partial}f)$, i.e., $d=\partial+\overline{\partial}$.

Si ψ es una función entonces $-\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi:=-\frac{i}{2}\sum_{i\,j}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}dz_i\wedge d\overline{z}_j$.

Ejemplo 1.5. Sea $\psi=x^2+y^2=|z|^2$. Entonces

$$\frac{i}{2}\,\partial\overline{\partial}\psi=\frac{i}{2}\,\partial\overline{\partial}|z|^2=\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}=\frac{i}{2}(dx+idy)\wedge(dx-idy)=$$

$$=-\frac{i}{2}(dx\wedge(-i)dy+idy\wedge dx)=dx\wedge dy.$$

Este ejemplo muestra que el diferencial de volumen $dx \wedge dy$ se obtiene a partir de la función $|z|^2$.

Ejercicio 1.6. Sea $\psi : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una función real. Demuestre que $\omega := -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi$ es una 2-forma cerrada. Note que esta definición de ω no depende de las coordenadas complejas que uno use en Ω.

Sea ω una 2-forma. Decimos que ψ es un *potencial* de ω si $\omega := -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi$.

Ejercicio 1.7. Sean ψ, ϕ dos potenciales de la misma 2-forma ω. Demuestre que en la intersección de los dominios de ψ, ϕ existe una función holomorfa h tal que:

$$\psi(z) = \phi(z) + Real(h(z))$$

Un potencial local $\psi : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ de una forma ω se dice *super-centrado en* $p \in \Omega$ si para todo α [2]

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial z^\alpha}(p) = 0 \ .$$

Ejercicio 1.8. Sean ψ, ϕ dos potenciales super-centrados en p de la misma 2-forma ω. Demuestre que $\psi \equiv \phi$ en un entorno de p.

2. Variedades Kählerianas.

En esta nota adoptamos la siguiente definición de variedad Kähleriana.

Definición 2.1. Un par (M, ω) donde M es una variedad compleja conexa y $\omega \in \Gamma(\Lambda^2(TM))$ es una forma simpléctica se llama *variedad Kähleriana* si alrededor de cada punto $p \in M$ existe un potencial ψ (localmente definido) de ω, i.e., existe $\Omega \subset M$ entorno de $p \in M$ y $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\omega|_\Omega = -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi$.

2.1. Geometría Kähleriana local elemental.

La definición anterior de variedad Kähleriana (M, ω) esconde la estructura pseudo-Riemanniana $\langle , \rangle_p$ en cada espacio tangente T_pM. Para recuperar esta estructura pseudo-Riemanniana simplemente se considera la matriz $(g_{i\,j}(z) := \frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z))$ dada por el potencial ψ alrededor de cada punto $p \in M$. No es difícil comprobar que $h_\omega := \sum_{i\,j} \frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z) dz_i \odot d\overline{z}_j$ es una forma Hermitiana cuya definición no depende del potencial local ψ. Hecho esto se tiene que

$$h_\omega = \langle , \rangle + i\omega$$

es decir $Real(h_\omega) = \langle , \rangle$ y $Im(h_\omega) = \omega$.

La multiplicación por i en T_pM define una estructura compleja $J \in End(T_pM)$ compatible con $\langle , \rangle$. Como ω es no degenerada la estructura pseudo-Riemanniana $\langle , \rangle$ es no degenerada y por lo tanto permite definir la conexión ∇ de Levi-Civita.

[2] Aquí α indica un índice o multi-índice.

Teorema 2.1. *Sea (M,ω) una variedad Kähleriana. Sean J y ∇ definidos aquí arriba. Entonces,*

$$\nabla J = 0\,.$$

Recíprocamente, si $(M,J,\langle,\rangle)$ es una variedad pseudo-Riemanniana casi-compleja (i.e., $J^2=-Id$) donde J es compatible (i.e., $J^*=-J$) y paralelo (i.e., $\nabla J=0$) entonces M es una variedad compleja respecto a un atlas construido integrando J (Teorema de Nirenberg-Newlander) y además existe ω tal que (M,ω) es una variedad Kähleriana tal que $Real(h_\omega)=\langle,\rangle$.

Ejercicio 2.2. Busque en los libros [KN, Mok] la demostración del teorema anterior.

Ejercicio 2.3. Sea (M,ω) una variedad Kahleriana de dimensión 1, i.e., $dim_{\mathbb{C}}(M)=1$. Supongamos que $\langle,\rangle$ es definida positiva. Entonces $(M,\langle,\rangle)$ es una variedad Riemanniana de dimensión 2. Sea $\kappa : M\to\mathbb{R}$ la curvatura de Gauss. Demuestre que: κ se anula en un entorno de $p\in M$ si y sólo si existe una función holomorfa $f:\Omega\to\mathbb{C}$ de un entorno $\Omega\subset M$ de $p\in M$ tal que $\psi(z,\overline{z})=|f(z)|^2$ es un potencial local de ω entorno a $p\in M$.

Ejercicio 2.4. Sea $ds^2=(1+(f'(x))^2)\,dx^2+(f(x))^2\,dy^2$. Demuestre que la curvatura de Gauss de ds^2 es cero si y sólo si $f(x)=ax+b$. Hint: vea la pagina 23 de [DiS].

2.2. Ejemplos de variedades Kählerianas.

$(\mathbb{C}^n,\omega_0)$: En $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ se considera la forma simpléctica estándar

$$\omega_0 := -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{i=n} dz_i\wedge d\overline{z}_i = \sum_{i=1}^{i=n} dx_i\wedge dy_i\ .$$

La función $\psi(z,\overline{z}):=|z|^2=\sum_i|z_i|^2$ es un potencial (global) de ω_0 y por lo tanto $(\mathbb{C}^n,\omega_0)$ es una variedad Kahleriana.

$(\mathbb{C}H^n,\omega_{hyp})$: En $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ se considera la bola abierta de radio 1, $B:=\{z\in\mathbb{C}^n : |z|^2<1\}$, junto con la función $\psi(z,\overline{z}):=-\log(1-|z|^2)$. Entonces $\omega_{hyp}:=-\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi$ es una forma simpléctica en B. Se define $(\mathbb{C}H^n,\omega_{hyp})$ como la variedad Kahleriana que da origen la bola unidad junto con ω_0.

$(\mathbb{C}P^n,\omega_{FS})$: Sea $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ un sistema de coordenadas estándar del espacio proyectivo complejo, e.g., $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ indica la recta que pasa por el origen $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ y el punto

$$(z_1,z_2,\cdots,z_j,1,z_{j+1},\cdots,z_n).$$

La función $\log(1+|z|^2)$ da origen a una forma simpléctica ω_{FS} que no depende del sistema de coordenadas z.

$(\mathbb{C}^{p,q},\omega_{p,q})$: En $\mathbb{C}^{p+q}$ se considera la forma simpléctica estándar

$$\omega_{p,q} := -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{i=p} dz_i\wedge d\overline{z}_i + \frac{i}{2}\sum_{i=p+1}^{i=p+q} dz_i\wedge d\overline{z}_i.$$

La función $\psi(z,\overline{z}) := |z|^2_{p,q} := \sum_{i=1}^{i=p} |z_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{i=q+p} |z_i|^2$ es un potencial (global) de $\omega_{p,q}$ y por lo tanto $(\mathbb{C}^{p,q}, \omega_{p,q})$ es una variedad Kahleriana.

$(\mathbb{C}H^{p,q}, \omega)$: Sea $B := \{z \in \mathbb{C}^{p+q} : |z|^2_{p,q} < 1\}$ junto con la función $\psi(z,\overline{z}) := -\log(1 - |z|^2_{p,q})$. Entonces se define $(\mathbb{C}H^{p,q}, \omega)$ como B munido de $\omega := -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi$.

Ejercicio 2.5. Verifique en el caso de $\mathbb{C}H^n$ que ω_{hyp} es una forma simpléctica y en el caso de $\mathbb{C}P^n$ que ω_{FS} es una forma simpléctica bien definida.

En dimensión infinita existen también los siguientes ejemplos:

$(l^2(\mathbb{C}), \omega_0)$: En $l^2(\mathbb{C})$, el espacio de sucesiones de cuadrado sumable, i.e., $z = (z_1, z_2, \cdots) \in l^2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \sum_i |z_i|^2 < \infty$ se considera la forma simpléctica estándar

$$\omega_0 := -\frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} dz_i \wedge d\overline{z}_i = \sum_{i=1}^{i=\infty} dx_i \wedge dy_i \ .$$

La función $\psi(z,\overline{z}) := |z|^2 = \sum_i |z_i|^2$ es un potencial (global) de ω_0 y por lo tanto $(l^2(\mathbb{C}), \omega_0)$ es una variedad Kahleriana.

$(\mathbb{C}H^\infty, \omega_{hyp})$: En $l^2(\mathbb{C})$ se considera la bola abierta de radio 1, $B := \{z \in l^2(\mathbb{C}) : |z|^2 < 1$, junto con la función $\psi(z,\overline{z}) := -\log(1 - |z|^2)$. Entonces $\omega_{hyp} := -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi$ es una forma simpléctica en B. Se define $(\mathbb{C}H^\infty, \omega_{hyp})$ como la variedad Kahleriana que da origen la bola unidad junto con ω_0.

$(\mathbb{C}P^\infty, \omega_{FS})$: Sea $z = (z_1, z_2, \cdots)$ un sistema de coordenadas estándar del espacio proyectivo complejo, e.g., $z = (z_1, z_2, \cdots)$ indica la recta que pasa por el origen $0 \in l^2(\mathbb{C})$ y el punto $(z_1, z_2, \cdots, z_j, 1, z_{j+1}, \cdots, z_n)$. La función $\log(1 + |z|^2)$ da origen a una forma simpléctica ω_{FS} que no depende del sistema de coordenadas z.

$(Krein, \omega_\pm)$: Sea $K = l^2(\mathbb{C}) \oplus l^2(\mathbb{C})$ junto con la forma $\omega_\pm := -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi$ definida por el potencial $\psi(z,\overline{z}) = |p|^2 - |q|^2$ donde $z = (p,q)$.

Ejercicio 2.6. En los libros [KN, Mok] se construyen detalladamente los espacios Hermitianos simétricos clásicos. Compruebe que dichos espacios son ejemplos de variedades Kählerianas según la Definición 2.1.

3. Funciones Kählerianas.

Sean (M, ω_M) y (N, ω_N) dos variedades Kählerianas.

Definición 3.1. Una función holomorfa $f : M \to N$ se dice *Kähleriana* si

$$f^*\omega_N = \omega_M$$

El siguiente teorema permite una mejor visualización de las funciones Kählerianas.

Teorema 3.1. *Una función holomorfa $f : M \to N$ es Kähleriana si y sólo si para todo potencial local ψ_N de la forma ω_N la función $\psi_N \circ f$ es un potencial local de ω_M.*

Demostración. Calculamos por definición $f^*\omega_N$:

$$\begin{aligned}
(f^*\omega_N)(z) &= -\frac{i}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2\psi_N}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}(f(z))df_i\wedge d\overline{f_j} = \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2\psi_N}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}(f(z))\sum_k\frac{\partial f_i}{\partial z_k}dz_k\wedge\sum_k\frac{\partial\overline{f_i}}{\partial\overline{z}_r}d\overline{z_r} = \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{kr}(\sum_{ij}\frac{\partial^2\psi_N}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}(f(z))\frac{\partial f_i}{\partial z_k}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial\overline{z}_r})dz_k\wedge d\overline{z_r} = \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{kr}\frac{\partial^2(\psi_N\circ f)}{\partial z_k\partial\overline{z}_r}(z)dz_k\wedge d\overline{z}_r = \\
&= -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}(\psi_N\circ f)\,.
\end{aligned}$$

Entonces como consecuencia tenemos que $(f^*\omega_N)(z) = \omega_M$ si y sólo si $\psi_N \circ f$ es un potencial local de la 2-forma ω_M. $\square$

Ejemplo 3.2. Sea $f : \mathbb{C}H^1 \to l^2(z)$ dada por $f(z) = (z, \frac{z^2}{\sqrt{2}}, \frac{z^3}{\sqrt{3}}, \cdots, \frac{z^j}{\sqrt{j}}, \cdots)$. Entonces $|f(z)|^2 = -\log(1 - |z|^2)$. Esto demuestra que f es una función Kahleriana del disco $\mathbb{C}H^1$ en $l^2(\mathbb{C})$.

Ejercicio 3.3. Consulte los libros [KN, Mok] y el artículo de Calabi [Cal] y verifique que la Definición 3.1 de función Kahleriana dada en esta nota coincide con lo que ellos llaman complex isometric immersion.

Ejercicio 3.4. Busque en la literatura (e.g., [FaKo]) la construcción de la métrica de Bergman ω_{Berg} de un dominio acotado $D \subset \mathbb{C}^N$. Observe que (D, ω_{Berg}) es una variedad Kähleriana. Note que existe un potencial global ϕ_{Berg} y que $\omega_{Berg} = f^*\omega_{FS}$ donde $f : D \to \mathbb{C}P^\infty$ es una función Kähleriana. Más aún, $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots)$ donde $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert $H^2(D)$. Efectúe todos los cálculos para el disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 < 1\}$.

Veamos a título de ejemplo cómo construir una inmersión Kähleriana $f : (\mathbb{C}^n, \omega_0) \to (\mathbb{C}P^\infty, \omega_{FS})$. Busquemos entonces funciones $f_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tales que $\|z\|^2 = \log(1 + \sum_i \|f_i(z)\|^2)$. Esto es equivalente a :

$$e^{\|z\|^2} - 1 = \sum_i \|f_i(z)\|^2.$$

Desarrollando la exponencial obtenemos:

$$\sum_i \frac{(\|z\|^2)^i}{i!} = \sum_i \|f_i(z)\|^2.$$

Resulta claro que si tomamos $f_i(z) = \frac{z^i}{\sqrt{n!}}$ obtenemos una igualdad. De donde resulta que $f : (\mathbb{C}^n, \omega_0) \to (\mathbb{C}P^\infty, \omega_{FS})$, definida en coordenadas homogéneas como $f(z) = (f_1(z) : f_2(z) : \cdots)$ es una inmersión Kähleriana.

Ejercicio 3.5. Demuestre que existe una inmersión Kähleriana $f : \mathbb{C}H^n \to l^2(z)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Hint: busque la solución en el paper [Cal].

Ejercicio 3.6. Verifique que los espacios Hermitianos simétricos de tipo no compacto admiten inmersiones Kählerianas en $\mathbb{C}H^{p,q}$ para p, q adecuados.

4. Variedades Kählerianas Analíticas: La Diastasis de Calabi.

Una variedad Kähleriana (M, ω) se dice *analítica* si para cada $p \in M$ existe un potencial analítico real ψ localmente definido en un entorno Ω de $p \in M$.

Ejemplo 4.1. Todos los ejemplos dados hasta el momento son ejemplos de variedades Kählerianas analíticas.

Un ejemplo de variedad Kähleriana **no** analítica se construye como sigue: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un abierto y sea $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función C^∞ no analítica (i.e., cuyo desarrollo de Taylor no converge en el entorno de algún punto $p \in \Omega$) y cuyo Laplaciano $\triangle\psi \neq 0$ en Ω. Entonces, $(\Omega, \omega := -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\psi)$ es una variedad Kähleriana no analítica.

Ejercicio 4.2. Compruebe la afirmación anterior.

El siguiente Teorema de Calabi muestra cuál es la condición necesaria y suficiente para que una variedad Kähleriana (M, ω) sea analítica.

Teorema 4.3. [Cal] *La variedad Kähleriana (M, ω) es analítica si y sólo si todo punto $p \in M$ posee un entorno inmersible Kählerianamente en el espacio de Krein $(Krein, \omega_\pm)$. Es decir, para todo $p \in M$ existe un entorno Ω de $p \in M$ y una inmersión Kähleriana $f : (\Omega, \omega) \to (Krein, \omega_\pm)$.*

En la Subsección 4.2 veremos las ideas de la demostración de este teorema.

4.1. Rigidez de Calabi.

Dada una variedad compleja M es posible construir la variedad anticompleja $\overline{M}$ pegando las cartas de un atlas de M después de conjugarlas. Por ejemplo, si M es un abierto de $\mathbb{C}^n$ entonces $\overline{M}$ es simplemente el abierto conjugado. Entonces $M \hookrightarrow M \times \overline{M}$ a través de la función $p \to (p, \overline{p})$.

En el paper [Cal] E. Calabi introduce la *Diastasis* como un "germen" de función $D_\omega(p, q)$ entorno de la diagonal $M \hookrightarrow M \times \overline{M}$ donde (M, ω) es una variedad Kähleriana analítica. El procedimiento es como sigue:

(1) Sea $p \in M$ un punto arbitrario y sea ψ un potencial de ω convergente en un entorno U de p con coordenadas $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

(2) Como ψ es real analítico existe una serie de potencias convergente $\psi(z,\overline{z}) = \sum_{ij} c_{ij} z^i \overline{z}^j$ en $U \times \overline{U}$. Esto permite "independizar" las variables conjugadas "$\overline{z}_i$". Es decir, como explicamos en los preliminares $\psi(z,\overline{w})$ es una genuina función de dos variables.
(3) El germen local definido $D_\omega(p,q) := \psi(p,\overline{p}) + \psi(q,\overline{q}) - \psi(p,\overline{q}) - \psi(q,\overline{p})$ no depende de ψ [3].

Queda entonces definido el germen de función $D(p,q)$ entorno de la diagonal de $M \times \overline{M}$. Este germen $D(p,q)$ se llama *Diastasis*.

La importancia de la Diastasis reside en su compatibilidad respecto a subvariedades Kahlerianas[4].

Teorema 4.4. [Cal] *Sea $f : (M,\omega_M) \to (N,\omega_N)$ una subvariedad Kahleriana. Entonces,*

$$D_{\omega_N}(f(p), f(q)) = D_{\omega_M}(p,q)\,.$$

Demostración. Es una simple consecuencia del Ejercicio 1.8. Dejamos los detalles como ejercicio al lector. □

El teorema anterior implica inmediatamente la *Rigidez* de inmersiones Kählerianas en $\mathbb{C}^n$.

Teorema 4.5. [Cal] *Sea $f : (M,\omega_M) \to (\mathbb{C}^n,\omega_0)$ una inmersión Kähleriana. Entonces, f es rígida. Es decir, si $g : (M,\omega_M) \to (\mathbb{C}^n,\omega_0)$ es otro embedding $1-1$ Kähleriano entonces existe $m \in Iso(\mathbb{C}^n)$ tal que $g = m \circ f$.*

Demostración. Observe que la diastasis de $(\mathbb{C}^n,\omega_0)$ es $D(p,q) = |p-q|^2$. Se sigue entonces del teorema anterior que para todo par de puntos $p,q \in \Omega \subset M$ se verifica $|f(p)-f(q)| = |g(p)-g(q)|$, donde Ω es tal que las restricciones de f y g son $1-1$ "embeddings". De donde no es difícil concluir que existe $m \in Iso(\mathbb{C}^n)$ tal que $g = m \circ f$ en Ω. Usando que f y g son holomorfas se sigue que la identidad anterior vale en todo M. □

El Teorema de Rigidez para $l^2(\mathbb{C})$ requiere incluir la hipótesis "full" debida a la existencia de subespacios isométricos al espacio total.

Teorema 4.6. [Cal] *Sea $f : (M,\omega_M) \to (l^2(\mathbb{C}),\omega_0)$ una subvariedad Kahleriana full, i.e., $f(M)$ no está contenida en ningún subespacio propio. Si $g : (M,\omega_M) \to (\mathbb{C}^n,\omega_0)$ es otro embedding $1-1$ Kähleriano full entonces existe una isometría $m \in Iso(l^2(\mathbb{C}))$ tal que $g = m \circ f$.*

Ejercicio 4.7. Construya un contraejemplo del teorema anterior sin la hipótesis "full".

[3] Esto es fácil de comprobar una vez que se sabe que los potenciales difieren de la parte real de una función holomorfa.

[4] Por "subvariedad Kähleriana" se entiende un "embedding $1-1$".

Para los espacios complejos de curvatura constante $\mathbb{C}P^n$ y $\mathbb{C}H^n$ también vale la rigidez de Calabi.

Teorema 4.8. *Toda inmersión Kahleriana en un espacio complejo de curvatura constante es equivariante respecto al grupo de isometrías.*

Ejercicio 4.9. Ver la demostración del teorema anterior en [NaTa].

Sea $i : M \to l^2(\mathbb{C}), \mathbb{C}H^\infty, \mathbb{C}P^\infty$ una inmersión Kähleriana en un espacio de dimensión infinita y curvatura holomorfa constante. Se dice que i es *casi-full* si la imagen $i(M)$ no está contenida en un subespacio de $\mathbb{C}^n \subset l^2(\mathbb{C})$ de dimensión finita (respectivamente un $\mathbb{C}H^n \subset \mathbb{C}H^\infty$ o bien $\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^\infty$).

Una simple consecuencia del Teorema de Rigidez es el siguiente corolario.

Corolario 4.10. *Sean $i, f : M \to l^2(\mathbb{C}), \mathbb{C}H^\infty, \mathbb{C}P^\infty$ dos inmersiones Kählerianas en un espacio de dimensión infinita y curvatura holomorfa constante. Entonces i es casi-full si y sólo si f es casi-full.*

4.2. La forma Hermitiana asociada a un potencial analítico. Sea $p \in M$ un punto de una variedad Kähleriana analítica (M, ω) y sea ψ_p un potencial super-centrado en p de la forma simpléctica ω. Vamos a definir una forma hermitiana H_ψ en $l^2(\mathbb{C})$ del siguiente modo:

(0) Vamos a pensar a $l^2(\mathbb{C})$ como un subespacio del espacio vectorial complejo (libre) generado por los multi-índices α que se usan para escribir el desarrollo de Taylor del potencial ψ_p. Recordemos que hemos llamado $\mathcal{M}$ al conjunto de multi-índices. Es decir, si $\psi_p(z, \overline{z}) = \sum_{\alpha\,\beta \in \mathcal{M}} c_{\alpha\,\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta$ entonces un elemento genérico de $l^2(\mathbb{C})$ será una sucesión (sumable) $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{M}}$.

(1) Como ψ es real analítico entonces $\psi(z, \overline{z}) = \sum_{\alpha\,\beta} c_{\alpha\,\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta$. Debido a que ψ es una función real se sigue que $c_{\alpha\,\beta} = \overline{c_{\beta\,\alpha}}$.

(2) Se define $H_\psi := (c_{\alpha\,\beta})$ evitando los coeficientes $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Ejemplo 4.11. Para $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ y $0 \in C^n$ tomemos $\psi_0 = |z|^2$. Entonces $H_\psi = (\delta_{ij})$ para $1 \le i, j \le n$ y 0 en todos los demás lugares.

Ejemplo 4.12. Para $(\mathbb{C}H^1, \omega_{hyp})$ y $0 \in B$ tomemos $\psi_0 = -\log(1 - |z|^2)$. Entonces $H_\psi = (\frac{\delta_{ij}}{i})$.

El interés de la forma Hermitiana H_ψ reside en el siguiente Teorema de Calabi.

Teorema 4.13. [Cal] *Sea (M, ω) una variedad Kähleriana analítica y sea $p \in M$. Entonces, existe una inmersión Kahleriana $i : U \to l^2(\mathbb{C})$ de un entorno $p \in U \subset M$ si y sólo si H_ψ es semidefinida positiva.*

Demostración. Supongamos que H_ψ es semidefinida positiva. Sea $i : U \to l^2(\mathbb{C})$ definido como $i(z) := (c_\alpha z^\alpha)$. Entonces, i es (por construcción) una inmersión Kähleriana con respecto al producto Hermitiano (posiblemente degenerado) definido por H_ψ en $l^2(\mathbb{C})$. Si H_ψ tiene núcleo no trivial K y $\pi : l^2(\mathbb{C})/K$ es la proyección al cociente, entonces $f = \pi \circ i$ es una inmersión Kahleriana en un espacio Hermitiano positivo no degenerado, i.e., un $l^2(\mathbb{C})$ o un $\mathbb{C}^n$. Recíprocamente, si existe $i : U \to l^2(\mathbb{C})$ entonces $\psi(z, \overline{z}) = \sum_\alpha \|i_\alpha(z)\|^2$, donde $i(z) = (i_\alpha(z))$. Notemos que $i_\alpha(z) = \sum_\beta d_{\alpha,\beta} z^\beta$. Sea $i^*_\alpha \in (l^2\mathbb{C})^*$ definida por $i^*_\alpha((v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{M}}) := \sum_\beta d_{\alpha,\beta} v_\beta$. Notemos que entonces $H_\psi = \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} i^*_\alpha \odot \overline{i^*_\alpha}$ lo que demuestra que H_ψ es semidefinida positiva. □

Finalmente notemos que el Teorema 4.3 se demuestra de modo similar al teorema anterior.

5. Variedades Kählerianas parientes.

Sea (M, ω) una variedad Kahleriana. Una *curva holomorfa* es una immersión Kähleriana $f : (S, \omega_S) \to (M, \omega)$, donde la variedad compleja S tiene dimensión 1, i.e., (S, ω_S) es una superficie de Riemann.

Definición 5.1. Dos variedades Kahlerianas (M, ω_M) y (N, ω_N) se dicen parientes si comparten una curva holomorfa (S, ω_S). Es decir, si existen (S, ω_S) e inmersiones Kählerianas $f_M : S \to M$ y $f_N : S \to N$.

Claramente si (M, ω_M) es subvariedad de (N, ω_N) entonces (M, ω_M) y (N, ω_N) son parientes. Como $(\mathbb{C}H^1, \omega_{hyp})$ es subvariedad de $l^2(\mathbb{C})$ resulta que $\mathbb{C}H^1$ y $l^2(\mathbb{C})$ son parientes.

El siguiente Teorema de Umehara [Ume] muestra que las *complex space forms* de dimensión finita y curvatura de distinto signo no son parientes.

Teorema 5.1. *(*[Ume]*) Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ las siguientes variedades Kahlerianas no son parientes:*

- $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ *y* $(\mathbb{C}^m, \omega_0)$
- $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ *y* $(\mathbb{C}H^m, \omega_{hyp})$
- $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ *y* $(\mathbb{C}H^m, \omega_{hyp})$.

Demostración. Supongamos que $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ y $(\mathbb{C}^m, \omega_0)$ sean parientes, es decir que existan inmersiones Kählerianas $i, f : (S, \omega) \to (\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}), (\mathbb{C}^m, \omega_0)$. Recordemos que existe una inmersion Kähleriana $h : (\mathbb{C}^m, \omega_0) \to (\mathbb{C}P^\infty, \omega_{FS})$ donde $h_i(z) = \frac{z^i}{\sqrt{i!}}$. Consideremos entonces las dos inmersiones Kahlerianas siguientes:

$$i : (S, \omega) \to (\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$$

$$h \circ f : (S, \omega) \to (\mathbb{C}P^\infty, \omega_{FS})$$

La rigidez de Calabi implica que existe $\tau \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}P^\infty)$ tal que $\tau \circ i = h \circ f$ y el Corolario 4.10 implica que $h \circ f$ no es casi-full. Veamos que contrariamente $h \circ f$ es casi-full, lo cual será una contradicción, que demostrará que $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ y $(\mathbb{C}^m, \omega_0)$ no son parientes.

Podemos suponer que $\dim_{\mathbb{C}}(S) = 1$ y que la immersión $f(z)$ se escribe como $f(z) = (z, f_2(z), \cdots, f_m(z))$ cambiando eventualmente coordenadas en S. Como $(h \circ f)_i(z) = \frac{f^i}{\sqrt{i!}}$ resulta que para un número infinito de índices $j \in I$, $(h \circ f)_j(z) = \frac{z^j}{\sqrt{j!}}$. Sea $\pi_I : l^2(\mathbb{C}) \to V \subset l^2(\mathbb{C})$ el proyector ortogonal al subespacio $V = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_j \, : \, j \in I\}$. La composición $(\pi_I \circ h \circ f)(z) = \sum_{j \in I} \frac{z^j}{\sqrt{j!}} e_j$ es casi-full. Pero por otro lado $(\pi_I \circ h \circ f)(S) = (\pi_I \circ \tau \circ i)(S) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ lo que muestra que $(\pi_I \circ h \circ f)(S)$ "vive" en un subespacio de dimensión finita. Esto prueba que $h \circ f$ es casi-full y termina la demostración de este caso. Los otros casos se tratan de modo análogo usando la inmersión Kähleriana del Ejercicio 3.5. □

Los espacios simétricos Hermitianos de rango > 1 no admiten inmersiones Kählerianas en $l^2(\mathbb{C})$ (ver [DL1]).

El siguiente teorema generaliza el Teorema de Umehara.

Teorema 5.2. *(*[DL]*) Un espacio simétrico Hermitiano de tipo compacto no es pariente de un espacio simétrico Hermitiano de tipo no compacto.*

6. Problema abierto.

Sea M un espacio Hermitiano simétrico irreducible. No es difícil demostrar que no existe una inmersión Kähleriana $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to M$ donde Ω es abierto. Sin embargo, salvo en el caso que M tenga rango 1 (i.e., Teorema [Ume]), el siguiente problema no ha sido resuelto aún:

¿Existe un $\mathbb{C}^n$ pariente de un espacio simétrico Hermitiano de tipo no compacto M?

El autor de estas notas conjectura que la respuesta es negativa. Note que un espacio simétrico Hermitiano de tipo no compacto M "vive" en un $\mathbb{C}H^{p,q}$.

Con mayor generalidad: *¿Es algún espacio $\mathbb{C}^n$ pariente de algún $\mathbb{C}H^{p,q}$?*

En términos de funciones holomorfas de una variable compleja, el problema anterior es equivalente a:

¿Existe un abierto $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ y funciones holomorfas $F_k : \Omega \to \mathbb{C}^{N_k}$, $k \in \{1, 2, 3\}$ ($F_1'(0) \neq 0$, $N_1 > 1$, $F_i(0) = 0$), tales que:

$$e^{-|F_1(z)|^2} - 1 = |F_2(z)|^2 - |F_3(z)|^2,$$

donde $|F_k(z)|^2 = \sum_{i=1}^{N_k} f_{i\,k}(z)\overline{f_{i\,k}(z)}$ y $F_k(z) = (f_{1\,k}, \cdots, f_{N_k\,k})$???

Referencias

[Cal] Calabi, E.: *Isometric Imbeddings of Complex Manifolds,* Ann. of Math. **58** (1953), 1-23.

[DiS] Di Scala, A.J.: *Introduzione alla geometria delle sottovarieta',* http://calvino.polito.it/∼adiscala/SubmanRoma.pdf

[DL] Di Scala, A.J. and Loi, A.: *Kähler manifolds and their relatives,* `arXiv math.DG/0601739.`

[DL1] Di Scala, A.J. and Loi, A.: *Kähler Maps of Hermitian Symmetric Spaces into Complex Space Forms,* http://loi.sc.unica.it/articoli/symminl2.pdf

[FaKo] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.k. Lu, G. Roos.: *Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains,* Progress in Mathematics, **185**, Birkhäuser, Boston, 2000.

[KN] Kobayashi, S. and Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry*, Vol II, Interscience Publishers, (1969).

[NaTa] Nakagawa, H. and Takagi, R.: *On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space,* J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 638–667.

[Mok] Mok, N.: *Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Spaces,* Series in Pure Mathematics-Volume 6. World Scientific (1989).

[Ume] Umehara, M.: *Kaehler submanifolds of complex space forms,* Tokyo J. Math. **10** (1987), no. 1, 203–214.

[Ume1] Umehara, M.: *Diastases and real analytic functions on complex manifolds,* J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 520-539.

Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Torino,
Corso Duca degli Abruzzi 24,
10129 Torino, Italy.
E-mail address: `antonio.discala@polito.it`