

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “B”

TRABAJOS DE MATEMÁTICA

Nº 51/07

II Encuentro de Geometría Diferencial

Notas de Cursos

6 al 11 de Junio de 2005. La Falda, Sierras de Córdoba

Hernán Cendra-Javier Fernández- Sebastián Ferraro
Sergio Grillo- Jorge Lauret-Marcos Salvai-Cristián U. Sánchez



Editores: Jorge R. Lauret–Elvio A. Pilotta

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

CONTENIDOS

1.- Geometría Simpléctica y Mecánica.

Hernán Cendra. Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur.

2.- Simetría Espejo en Matemática: Algunos Temas Básicos.

Javier Fernández. Instituto Balseiro. Universidad Nacional de Cuyo. CNEA.

3.- Introducción a la Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana.

Sebastián Ferraro. Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur.

Sergio Grillo. Instituto Balseiro. Centro Atómico Bariloche.

4.- Variedades Planas y Grupos Cristalográficos.

Jorge Lauret. Facultad de Matemática, Astronomía y Física - CIEM.

5.- Curvas Geodésicas en Superficies de Revolución y Generalizaciones.

Marcos Salvai. Facultad de Matemática, Astronomía y Física - CIEM.

6.- Una Miradita a las Superficies.

Cristián U. Sánchez. Facultad de Matemática, Astronomía y Física - CIEM.

Geometría Simpléctica y Mecánica

Hernán Cendra
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
uscendra@criba.edu.ar

Reunión PAV *Geometría Diferencial, Física y Control*, La Falda, Junio 06-11, 2005

1. Introducción

La geometría simpléctica se ha desarrollado desde sus comienzos y hasta las investigaciones actuales, en paralelo con la física, en especial con la mecánica. Parte del objeto del curso es enfatizar este hecho.

Los requisitos de conocimientos previos para el curso son un conocimiento del cálculo exterior en variedades, nociones de grupos de Lie y acción de grupos en variedades, y nociones de mecánica. Si se dan estos requisitos, estas notas son autocontenidas, aunque algunas demostraciones no se dan, o se dan solo en forma esquemática, y completarlas constituye, en la mayoría de los casos, un ejercicio de cálculo exterior.

Los temas tratados en estas notas están esencialmente contenidos en los siguientes libros, aunque el tratamiento variacional de las ecuaciones de Lie-Poisson parece más nuevo.

Abraham, R. and Marsden, J. E. *Foundations of Mechanics*, Benjamin, 1978.

Marsden, J. E. and Ratiu, T. S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, 1994.

Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1978. Edición previa de MIR, Moscú, 1975.

Guillemin, V., Sternberg, S. *Symplectic techniques in physics*, Cambridge, 1984.

2. Variedades Simplécticas

Sea E un espacio vectorial con base \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, n$, y base dual \mathbf{e}^i , $i = 1, \dots, n$. En el espacio $V = E \times E^*$ se tiene la siguiente bilineal, antisimétrica y no degenerada

$$\omega((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2).$$

Se tiene el siguiente lema

Lema 2.1. Sea $\omega_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una bilineal antisimétrica no degenerada, donde V es un espacio vectorial dado. Entonces existe una base \mathbf{f}_i , $i = 1, \dots, 2n$ de V tal que, la matriz de ω en esa base está dada por

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= 1, \text{ si } i + n = j, \\ \omega_{ij} &= -1, \text{ si } i = j + n, \\ \omega_{ij} &= 0, \text{ en cualquier otro caso.}\end{aligned}$$

En particular, todo espacio V con una bilineal ω antisimétrica y no degenerada, se puede identificar con el espacio $E \times E^*$ con la forma ω_0 descrita antes del lema, de modo tal que $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_i$, si $i = 1, \dots, n$, y $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}^i$, si $i = n, \dots, 2n$.

Un **espacio simpléctico** es un espacio V con una bilineal simétrica y no degenerada ω , llamada **forma simpléctica**. Sean V_1, V_2 , espacios simplécticos con formas simplécticas ω_1, ω_2 , respectivamente. Una transformación lineal $f : V_1 \rightarrow V_2$ se dice **simpléctica**, o **canónica**, si $f^*\omega_2 = \omega_1$.

Se prueba que si V es un espacio simpléctico de dimensión $2n$ con forma simpléctica ω entonces ω^n es un volumen, llamado **volumen de Liouville**. Es claro que las transformaciones canónicas preservan el volumen de Liouville. En particular, una transformación canónica es un isomorfismo lineal que preserva la orientación. La composición de transformaciones canónicas es una transformación canónica. El grupo de todas las transformaciones canónicas es llamado $Sp(V)$.

La noción general de variedad simpléctica y de transformación canónica que introducimos a continuación es fundamental.

Definición 2.2. Una variedad simpléctica es una variedad P con una 2-forma ω cerrada, es decir, $d\omega = 0$, y no degenerada. Sean P_1, P_2 , variedades simplécticas con formas simplécticas ω_1, ω_2 , respectivamente. Una aplicación $f : P_1 \rightarrow P_2$ se dice **simpléctica**, o **canónica**, si $f^*\omega_2 = \omega_1$.

De la definición anterior se desprende que cada espacio tangente $T_x P$ es un espacio simpléctico, donde la bilineal no degenerada es $\omega(x)$. En particular, la dimensión de P es par. También resulta que ω^n es un volumen, el **volumen de Liouville**, y por lo tanto P es orientable.

Es claro que las transformaciones canónicas $f : P_1 \rightarrow P_2$ entre variedades simplécticas preservan el volumen de Liouville, es decir $f^*\omega_2^n = \omega_1^n$.

La condición de que ω sea cerrada es importante y equivale a la identidad de Jacobi para el corchete de Poisson, como veremos luego.

En el espacio $P = E \times E^*$, pensado como variedad, se introducen coordenadas (q^i, p_i) correspondientes a la base $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i)$. La 1-forma $\theta_0 = p_i dq^i$ se llama la **1-forma canónica**. La 2-forma $\omega_0 = -d\theta_0$ se llama la **2-forma canónica**, o, también, **forma simpléctica canónica**. Se tiene $\omega_0 = dq^i \wedge dp_i$. Es claro que las componentes ω_{0ij} son constantes. Más adelante probaremos el teorema de Darboux, que establece que, localmente, toda variedad simpléctica es canónicamente difeomorfa a la variedad $E \times E^*$.

Si ω es una forma simpléctica en P , como ω es en cada fibra una bilineal no degenerada, entonces existe un isomorfismo de fibrados vectoriales

$$\omega^\flat : TP \rightarrow T^*P,$$

dado por $\omega^\flat X_p(Y_p) = \omega(X_p, Y_p)$, con inversa

$$\omega^\sharp : T^*P \rightarrow TP.$$

A continuación veremos el teorema de Darboux, el cual, en particular, muestra que las variedades simplécticas son todas localmente simplécticamente difeomorfas.

Teorema 2.3. *Sea P una variedad simpléctica de dimensión $2n$, con forma simpléctica ω . Para cada $x_0 \in P$ existe una carta $\varphi : U \rightarrow T^*E$, donde E es un espacio vectorial, con $x_0 \in U$, y tal que $\varphi_*(\omega|U) = \omega_0|U$. En particular, resulta que hay coordenadas locales q^i, p_i tales que $\omega|U = dq^i \wedge dp_i$.*

Demostración. Como la cuestión tiene carácter local, se puede suponer que P es un abierto de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Más aún, mediante un cambio simpléctico lineal de coordenadas, se puede suponer también que $\omega(0) = (dq^i \wedge dp_i)(0)$. Sea ω_0 la forma simpléctica $\omega_0 = dq^i \wedge dp_i$. Sea $\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$, luego $\omega_1 = \omega$. Vamos a hallar un campo dependiente del tiempo X_t tal que su flujo F_t satisfaga

$$\frac{d}{dt} F_t^* \omega_t = 0,$$

y que esté definido para $t \in [0, 1]$, en un entorno fijo de 0, por lo tanto, $F_1^* \omega_1 = \omega_0$, con lo cual el problema queda resuelto. La condición anterior equivale a

$$F_t^*(L_{X_t} \omega_t + (\omega - \omega_0)) = 0,$$

o sea, teniendo en cuenta que ω es cerrada, $d i_{X_t} \omega_t + (\omega - \omega_0) = 0$. Por el lema de Poincaré, existe α tal que $d\alpha = \omega_0 - \omega$, y además, $\alpha(0) = 0$. Usando la no degeneración de ω , resulta que existe X_t tal que $i_{X_t} \omega_t = \alpha$, y además, como $X_t(0) = 0$, achicando U si es necesario, se puede suponer que F_t está definido para $t \in [0, 1]$, lo que termina la demostración. ■

Las cartas cuya existencia se prueba en el teorema anterior, se llaman **cartas de Darboux**.

Un caso importante de variedad simpléctica, en el cual las cartas de Darboux se construyen de modo natural, es el siguiente. Sea Q una variedad de dimensión n . El fibrado cotangente $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$, tiene una **1-forma canónica** θ_0 definida mediante $\theta_0(V_{\alpha_q}) = \alpha_q(T\pi_Q V_{\alpha_q})$, donde $T\pi_Q : TT^*Q \rightarrow TQ$ es la aplicación tangente. Sea q^i un sistema de coordenadas locales en Q , definido en un abierto $U \subseteq Q$. Entonces, cada $\alpha_q \in T_q^*Q$ se escribe $\alpha_q = p_i dq^i$. La aplicación $\varphi : (\pi_Q)^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n*}$ dada por $\varphi(\alpha_q) = (q, p)$, define una carta local de T^*Q . Se verifica fácilmente que $\varphi_* \theta_0|U = p_i dq^i$. Se define la **2-forma canónica** ω_0 mediante $\omega_0 = -d\theta_0$. En coordenadas, resulta $\varphi_* \omega_0|U = dq^i \wedge dp_i$, lo que prueba, en particular, que ω_0 es una forma simpléctica. En resumen, las cartas naturales del fibrado cotangente son cartas

de Darboux, lo que prueba de modo directo que T^*Q es localmente simplécticamente equivalente al caso en que $Q \equiv E$ es un espacio vectorial, considerado anteriormente.

Es importante destacar que el levantamiento cotangente $T^*f : T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$ de un difeomorfismo $f : Q_1 \rightarrow Q_2$, preserva la 1-forma canónica, o sea, $(T^*f)^*\theta_0 = \theta_0$, de donde resulta que es un difeomorfismo simpléctico.

3. Mecánica Hamiltoniana.

Los conceptos básicos introducidos hasta ahora bastan para dar un contenido geométrico a la mecánica Hamiltoniana. En lo que sigue pondremos énfasis en la interpretación física de estos conceptos.

Ejemplo 1. Sea una masa puntual m que se mueve en \mathbb{R}^3 describiendo una curva $(q^1(t), q^2(t), q^3(t))$, en un campo de potencial $V(q)$. Por lo tanto, la fuerza es

$$-\frac{\partial V}{\partial q},$$

el cual es un elemento de \mathbb{R}^{3*} . Identificando \mathbb{R}^{3*} con \mathbb{R}^3 mediante la métrica Euclídeana, el momento de la masa puntual es $p = m\dot{q}$. La ley de Newton establece que

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Sea $H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3*} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q).$$

Llamada el **Hamiltoniano** del sistema. Se tiene

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i.$$

Se define el **campo Hamiltoniano** X_H asociado al Hamiltoniano H mediante $X_H = \omega^\sharp dH$. Escribiendo $X_H(q, p) = (q, p, \dot{q}, \dot{p})$, se escriben las **ecuaciones de Hamilton**, como sigue

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.1}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{3.2}$$

Se verifica de inmediato que las ecuaciones de Hamilton coinciden en este caso con las ecuaciones de Newton.

En general, las ecuaciones de Hamilton se definen como sigue. Sea P una variedad simpléctica con forma simpléctica ω , llamada el **espacio de fase del sistema**. Sea $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltoniano dado. Entonces, el campo Hamiltoniano asociado al Hamiltoniano H es $X_H = \omega^\sharp dH$, es decir, $\omega(X_H, \cdot) = dH$.

Esta definición es de aplicación en toda la mecánica. Las ideas originales de Hamilton se desarrollaron en relación con la óptica geométrica, tratando de explicar la relación entre los rayos entrantes y salientes para un sistema general de lentes, generalizando de este modo la óptica Gaussiana, en donde los lentes se consideran de revolución. Sólo después de un tiempo el mismo Hamilton encontró que sus ecuaciones se aplicaban también a la mecánica, unificando de este modo la óptica y la mecánica, sobre la base del principio variacional de Fermát. Además, el enfoque Hamiltoniano creó un contexto en el cual se desarrolló más tarde la mecánica cuántica. El método de cuantización de Dirac parte de la formulación Hamiltoniana.

Ejemplo 2. Sea S^2 la esfera de radio 1, con la forma simpléctica dada por el elemento de área $\omega((x, a), (x, b)) = x \cdot (b \times a)$. Sea $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $H(x) = (1/2)((x^1)^2/I_1 + (x^2)^2/I_2 + (x^3)^2/I_3)$, donde $x \in \mathbb{R}^3$. Sea $h = H|_{S^2}$ la restricción de H a S^2 . Vamos a calcular la ecuación de Hamilton correspondiente al Hamiltoniano h . El campo Hamiltoniano X_h debe satisfacer, para todo campo Y tangente a la esfera, $dh(Y) = \omega(X_h, Y)$, o sea, $x^1 Y^1/I_1 + x^2 Y^2/I_2 + x^3 Y^3/I_3 = Y \cdot (X_h \times x)$. Llamando $x/I = (x^1/I_1, x^2/I_2, x^3/I_3)$, resulta, dada la arbitrariedad de Y , $x/I = X_h \times x$, luego, teniendo en cuenta que $X_h \cdot x = 0$, resulta $x \times (x/I) = X_h$. Escribiendo ahora $x = I\nu \equiv (I_1\nu^1, I_2\nu^2, I_3\nu^3)$, resulta $X_h = I\nu \times \nu$, por lo tanto, la ecuación de Hamilton es $I\dot{\nu} = I\nu \times \nu$.

Más adelante veremos que estas son precisamente las ecuaciones de Euler del cuerpo rígido, si se interpreta ν como la velocidad angular en coordenadas en el cuerpo, y I_1, I_2, I_3 , como los momentos principales de inercia.

El siguiente ejemplo contiene un gran número de casos de interés en mecánica.

Ejemplo 3. Sea H un Hamiltoniano en T^*Q . Entonces, las ecuaciones de Hamilton se escriben, en la carta de Darboux natural del fibrado cotangente, exactamente como en el caso en que Q es un espacio vectorial, es decir

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.3}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{3.4}$$

En general, esta es la expresión de las ecuaciones de Hamilton en coordenadas de Darboux para una variedad simpléctica arbitraria.

Ejemplo 4. Un caso particular del ejemplo anterior, de especial relevancia en mecánica, es aquel en el cual $H(\alpha_q) = (1/2)g(\alpha_q, \alpha_q) + V(q)$, donde g es una métrica definida positiva en el fibrado cotangente T^*Q , la cual representa la energía cinética del sistema, mientras que V representa la energía potencial del sistema.

Es claro que g define una métrica Riemanniana en Q , que llamaremos también g , por un abuso de notación, dada por $g(u_q, v_q) = g(g^\sharp u_q, g^\sharp v_q)$ para cada $u_q, v_q \in T_q Q$. En el caso en que $V = 0$, se prueba fácilmente que las soluciones de las ecuaciones de Hamilton, proyectadas en Q , son las geodésicas, más precisamente, sea $(q_0, \dot{q}_0) \in TQ$, y sea $(q_0, p_0) = g^\flat(q_0, \dot{q}_0)$. Sea $(q(t), p(t))$ la solución de la ecuaciones de Hamilton con condición inicial (q_0, p_0) . Entonces $q(t)$ es la geodésica con condición inicial

(q_0, \dot{q}_0) . Esta afirmación resultará más clara después de ver sistemas Lagrangianos y la transformación de Legendre.

Ejemplo 5. Un caso importante del Ejemplo 4., es el cuerpo rígido. Comenzaremos con una descripción física. Se supone que el cuerpo rígido tiene su centro de masa en el origen de \mathbb{R}^3 , el cual permanece fijo durante el movimiento. Sea $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canónica de \mathbb{R}^3 . Sea $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, donde $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, una base ortonormal, fija en el cuerpo rígido. Por lo tanto, \mathbf{f} depende del tiempo. Un punto x se expresa en coordenadas en el espacio mediante $x = x_e^1 \mathbf{e}_1 + x_e^2 \mathbf{e}_2 + x_e^3 \mathbf{e}_3$. El mismo punto x se expresa en coordenadas en el cuerpo mediante $x = x_f^1 \mathbf{f}_1 + x_f^2 \mathbf{f}_2 + x_f^3 \mathbf{f}_3$. Denotaremos $x_e = (x_e^1, x_e^2, x_e^3)$, y $x_f = (x_f^1, x_f^2, x_f^3)$. Si el punto está fijo en el cuerpo, x_f no depende del tiempo, y en cambio $x_e(t)$ es una función de t . Las coordenadas de un punto en el espacio y en el cuerpo están relacionadas por una rotación dependiente del tiempo $R(t) \in SO(3)$, que satisface $x_e(t) = R(t)x_f$. Si x_f no depende del tiempo, se tiene $\dot{x}_e(t) = \dot{R}(t)x_f$, lo que permite expresar la velocidad de un punto fijo en el cuerpo, en coordenadas en el espacio $v_e(t) = \dot{x}_e(t)$, en función de $\dot{R}(t)$. Se tiene también $v_f(t) = R^{-1}(t)\dot{R}(t)x_f$.

Recordemos algunos hechos básicos relativos al grupo $SO(3)$. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $SO(3)$ se identifica con el espacio de las matrices antisimétricas

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tienen las fórmulas siguientes, $\widehat{x \times y} = [\hat{x}, \hat{y}]$; $x \times y = \hat{x}y$; para cualquier $R \in SO(3)$, $\widehat{Rx} = R\hat{x}R^{-1}$; $x \cdot y = -(1/2) \text{tr } \hat{x}\hat{y}$. Podemos decir que $\mathfrak{so}(3)$ se identifica con \mathbb{R}^3 con el producto vectorial.

Volviendo al cuerpo rígido, la velocidad angular **en el cuerpo** $\omega_f(t)$ se define mediante $\hat{\omega}_f(t) = R^{-1}(t)\dot{R}(t)$. Por lo tanto se tiene $v_f(t) = \hat{\omega}_f(t)x_f(t) = \omega_f(t) \times x_f(t)$.

La velocidad angular **en el espacio** se define mediante $\hat{\omega}_e(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t)$. Por lo tanto se tiene $v_e(t) = \hat{\omega}_e(t)x_e(t) = \omega_e(t) \times x_e(t)$.

Hasta ahora se ha descrito la cinemática del cuerpo rígido. A continuación se describe la dinámica. Si se elige la base \mathbf{f} de modo que sus ejes coincidan con ejes principales de inercia del cuerpo rígido, la energía cinética es

$$K \left((R(t), \dot{R}(t)), (R(t), \dot{R}(t)) \right) = \frac{1}{2} (I_1(\omega_f^1)^2 + I_2(\omega_f^2)^2 + I_3(\omega_f^3)^2),$$

donde I_i , $i = 1, 2, 3$, son los momentos principales de inercia. Por lo tanto, la energía cinética es una métrica Riemanniana invariante a izquierda en $SO(3)$. Esta métrica induce una métrica en el fibrado cotangente $T^*SO(3)$, que por abuso de notación también llamaremos K , invariante por el levantamiento cotangente de la acción a izquierda de $SO(3)$ en $SO(3)$, que es el Hamiltoniano H del cuerpo rígido. Más precisamente, $H : T^*SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por $H(\alpha_R) = K(\alpha_R, \alpha_R)$. Las ecuaciones de Hamilton son las ecuaciones del movimiento del cuerpo rígido, y, como se ha visto en el Ejemplo 4, las soluciones se proyectan en las geodésicas en $SO(3)$.

Ejemplo 6. Sean m_i , $i = 1, \dots, N$ masas puntuales en \mathbb{R}^3 , con vectores de posición $q_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$. Sea Q el conjunto de los vectores $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ tales que $q_i \neq q_j$ para $i \neq j$. Se supone que hay fuerzas de interacción entre las masas puntuales dadas por potenciales de atracción V_{ij} . Por ejemplo, en mecánica celeste, es importante la energía potencial Newtoniana de dos masas que se atraen con la fuerza gravitatoria, dada por,

$$V_{ij} = -\frac{\gamma m_i m_j}{|q_i - q_j|}.$$

Se tiene el siguiente Hamiltoniano en $T^*Q = Q \times \mathbb{R}^{3N*}$, que generaliza el correspondiente a una masa puntual

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^2 + \sum_{i,j=1}^N V_{ij}.$$

La solución de las ecuaciones de Hamilton resultantes es bien conocida en el caso de dos cuerpos. En el caso de tres o más cuerpos se presentan problemas de gran complejidad, que han sido estudiados desde el comienzo de los tiempos modernos, y constituyen un campo activo de investigación en la actualidad.

En todos los casos, el enfoque Hamiltoniano de los problemas de mecánica, permite usar la geometría para resolver o simplificar los problemas. Por ejemplo, las leyes de conservación clásicas, $L_{X_H} H = 0$, $L_{X_H} \omega = 0$, $L_{X_H} \omega^n = 0$, son consecuencia inmediata de fórmulas básicas del cálculo exterior.

Es especialmente frecuente el caso en el cual hay un grupo de simetría que actúa en la variedad simpléctica por difeomorfismos, dejando invariante el Hamiltoniano, dando lugar a la teoría de la reducción, que veremos luego.

4. Sistemas Lagrangianos.

El conjunto de posibles posiciones de un sistema mecánico, es con frecuencia una variedad Q llamada *espacio de configuración del sistema*. Entonces, un movimiento del sistema es una curva en Q . Por ejemplo, para una masa puntual m que se mueve en \mathbb{R}^3 , el espacio de configuración es \mathbb{R}^3 . Para el cuerpo rígido, el espacio de configuración es $SO(3)$. Para el caso de un sistema de N masas puntuales, el espacio de configuración es la variedad Q considerada en el Ejemplo 6.

En el enfoque Hamiltoniano de la mecánica, descrito en la sección 3 se codifica toda la información sobre la dinámica del sistema en una función, el Hamiltoniano del sistema, definida en una variedad simpléctica, llamada el *espacio de fase* del sistema. En el enfoque Lagrangiano de la mecánica, la información sobre la dinámica del sistema se codifica en una función $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, llamada el *Lagrangiano* del sistema. Entonces, las ecuaciones del movimiento del sistema se derivan de un principio variacional, llamado *Principio variacional de Hamilton*, que describimos a continuación. Sea $\Omega_{q_0, q_1}(Q)$ el conjunto de las curvas $q(t)$ en Q , tales que

$q(t_i) = q_i$, para $i = 0, 1$. Se define la funcional $S : \Omega_{q_0, q_1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

La cantidad $S(q)$ se llama la **acción**. Una **deformación** de la curva $q(t)$ es una función $q_\lambda(t) \equiv q(t, \lambda)$, tal que $q(t, 0) = q(t)$. La **variación** correspondiente a la deformación $q(t, \lambda)$, es, por definición,

$$\delta q = \left. \frac{\partial q(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}.$$

De acuerdo con el Principio Variacional de Hamilton, los movimientos del sistema son puntos críticos de la acción definida en $\Omega_{q_0, q_1}(Q)$, más precisamente, $q(t)$ es un movimiento del sistema si y solo si se satisface

$$\delta S(q) = 0,$$

es decir,

$$\left. \frac{\partial S(q(t, \lambda))}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0,$$

para toda variación δq de q , tal que $\delta q(t_i) = 0$, para $i = 1, 2$.

Aplicando la técnica usual del cálculo de variaciones, resulta, si $q(t)$ es un punto crítico, y para toda variación δq tal que $\delta q(t_i) = 0$, para $i = 1, 2$,

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (4.1)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \delta \dot{q} \right) dt \quad (4.2)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q \right) dt, \quad (4.3)$$

donde el último paso es una integración por partes. La arbitrariedad de δq implica que debe satisfacerse la **ecuación de Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = 0.$$

Si se escribe el **momento generalizado** $p = \partial L / \partial \dot{q}$, resulta que la ecuación de Euler-Lagrange se escribe $\dot{p} = \partial L / \partial q$, lo que generaliza la ley de Newton.

La versión Lagrangiana del Ejemplo 4 es la siguiente. Sea Q una variedad Riemanniana con métrica Riemanniana g , cuya interpretación física es la energía cinética. Sea $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ la energía potencial. El Lagrangiano del sistema es entonces $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g((q, \dot{q}), (q, \dot{q})) - V(q).$$

Se demuestra fácilmente que si $V = 0$, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange coinciden con las ecuaciones de las geodésicas de g , o sea,

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q}^b = 0,$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de g .

En general, si $V \neq 0$, las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q}^b = -\frac{\partial V(q)}{\partial q^b}.$$

El enfoque Lagrangiano de la mecánica, incluyendo varias generalizaciones del formalismo descrito arriba, es fundamental en física.

La transformación de Legendre. Los enfoques Hamiltoniano y Lagrangiano de la mecánica, están relacionados por la *transformación de Legendre*, que pasamos a tratar a continuación.

Un Lagrangiano se dice *hiperregular*, si la derivada según la fibra

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})$$

establece un difeomorfismo

$$FL : TQ \rightarrow T^*Q,$$

donde $FL(q, \dot{q}) = (q, p)$, con $p = \varphi(q, \dot{q}) \equiv (\partial L / \partial \dot{q})(q, \dot{q})$.

Éste es el caso de los Lagrangianos del tipo

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g((q, \dot{q}), (q, \dot{q})) - V(q),$$

donde g es una métrica Riemanniana, como se ha explicado antes. Si L es hiperregular, se define el Hamiltoniano H asociado a L mediante la transformación de Legendre, que consiste en el siguiente procedimiento. La hiperregularidad de L implica que, de la ecuación $p = \varphi(q, \dot{q}) \equiv (\partial L / \partial \dot{q})(q, \dot{q})$, se despeja $\dot{q} = \psi(q, p)$. Entonces,

$$H(q, p) = p\psi(q, p) - L(q, \psi(q, p)).$$

Se verifica fácilmente que las ecuaciones de Hamilton equivalen a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En el caso de Lagrangianos del tipo

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g((q, \dot{q}), (q, \dot{q})) - V(q),$$

el Hamiltoniano dado por la transformación de Legendre es

$$H(q, p) = \frac{1}{2}g((q, p), (q, p)) + V(q),$$

donde g es, por abuso de notación, la métrica inducida en el fibrado cotangente. Las ecuaciones de Hamilton son entonces

$$\dot{q} = p^\sharp \tag{4.4}$$

$$\nabla_{\dot{q}} p = -\frac{\partial V}{\partial q}. \tag{4.5}$$

5. Sistemas Lagrangianos con Simetría

Es frecuente en física el caso en el que el espacio de configuración Q es un grupo de Lie G , y el Lagrangiano $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante a izquierda, es decir, $L(g, \dot{g}) = L(hg, h\dot{g})$, para todo $h \in G$. En particular, si $l : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, es la restricción de L al álgebra de Lie de G , que llamaremos **Lagrangiano reducido**, se tiene $L(h\xi) = l(\xi)$, para todo $h \in G$.

La ecuación de Euler-Poincaré. Sea L un Lagrangiano invariante a izquierda, en un grupo G . Para simplificar, vamos a asumir que G es un grupo de matrices. Para una curva $g(t)$ en G , se define $v(t) = g^{-1}(t)\dot{g}(t)$, que es una curva en el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Una variación δg de g se escribe $\delta g = g\eta$, donde $\eta(t)$ es una curva en \mathfrak{g} . La condición $\delta g(t_i) = 0$, $i = 1, 2$, equivale a $\eta(t_i) = 0$, $i = 1, 2$. La variación δg induce una variación δv que se calcula como sigue

$$\delta v = \delta(g^{-1}\dot{g}) \quad (5.1)$$

$$= -g^{-1}\delta g g^{-1}\dot{g} + g^{-1}\delta\dot{g} \quad (5.2)$$

$$= -g^{-1}g\eta g^{-1}\dot{g} + g^{-1}\dot{g}\eta \quad (5.3)$$

$$= -\eta v + v\eta + \dot{\eta} \quad (5.4)$$

$$= \dot{\eta} + [v, \eta]. \quad (5.5)$$

Es fácil ver que una curva $g(t)$ satisface

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(g, \dot{g}) dt = 0,$$

para variaciones δg tales que $\delta g_i = 0$, para $i = 1, 2$, si y sólo si

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} l(v) dt = 0,$$

para variaciones $\delta v = \dot{\eta} + [v, \eta]$, donde $\eta_i = 0$, para $i = 1, 2$. Esta última condición equivale a

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial l}{\partial v}(v) \delta v dt \quad (5.6)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial l}{\partial v}(v) (\dot{\eta} + [v, \eta]) dt \quad (5.7)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial v}(v) + \text{ad}_v^* \frac{\partial l}{\partial v}(v) \right) \eta dt, \quad (5.8)$$

donde el último paso es una integración por partes. La arbitrariedad de η implica

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial v}(v) = \text{ad}_v^* \frac{\partial l}{\partial v}(v).$$

Esta ecuación es la **ecuación de Euler-Poincaré** y es la versión reducida de la ecuación de Euler-Lagrange.

En el caso del cuerpo rígido, el Lagrangiano es la energía cinética K calculada en la sección 3

$$L\left(\left(R(t), \dot{R}(t)\right), \left(R(t), \dot{R}(t)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(I_1\left(\omega_{\mathbf{f}}^1\right)^2 + I_2\left(\omega_{\mathbf{f}}^2\right)^2 + I_3\left(\omega_{\mathbf{f}}^3\right)^2\right),$$

que es invariante a izquierda. Las ecuaciones de Euler-Poincaré se reducen en este caso a las ecuaciones de Euler

$$I\dot{\hat{\omega}}_{\mathbf{f}} = [I\hat{\omega}_{\mathbf{f}}, \hat{\omega}_{\mathbf{f}}],$$

o, equivalentemente,

$$I\dot{\omega}_{\mathbf{f}} = I\omega_{\mathbf{f}} \times \omega_{\mathbf{f}}.$$

6. Principio Variacional de Hamilton en el Espacio de Fase

Una variedad simpléctica P con forma simpléctica ω se dice *exacta* si $\omega = -d\theta$, para alguna 1-forma θ en P . Sea el Lagrangiano $L : P \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $L(x, \dot{x}) = \theta(\dot{x}) - H(x)$, donde H es un Hamiltoniano dado en P . Vamos a ver que las ecuaciones de Euler-Lagrange de L son las ecuaciones de Hamilton de H . Sea $x(t)$ una curva en P tal que $x(t_i) = x_i$, para $i = 1, 2$. Sea δx una variación de la curva x concentrada en un entorno U de $x(\bar{t})$, donde $\bar{t} \in [t_0, t_1]$, tal que existen coordenadas de Darboux (q^i, p_i) en U . Por lo tanto, en U vale $\theta = p_i dq^i$, y $\theta(\dot{x}) = p_i \dot{q}^i$, y las variaciones $\delta x = (\delta q, \delta p)$ son arbitrarias dentro de U y son 0 fuera de U . Se tiene entonces

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \theta(\dot{x}) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i) dt \tag{6.1}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\delta p_i \dot{q}^i - \dot{p}_i \delta q^i) dt, \tag{6.2}$$

donde el último paso es una integración por partes. Por otra parte, se tiene que $\delta p_i \dot{q}^i - \dot{p}_i \delta q^i = \omega((\dot{q}, \dot{p}), (\delta q, \delta p))$. Usando ésto, teniendo en cuenta que, por la compacidad de $[0, 1]$, cualquier variación δx se puede expresar como una suma finita de variaciones concentradas en puntos $x(\bar{t})$, como se ha explicado arriba, se llega a la expresión

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \theta(\dot{x}) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \omega(\dot{x}, \delta x) dt,$$

para cualquier variación δx con $\delta x(t_i) = 0$, para $i = 1, 2$. De aquí resulta que la condición

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\theta(\dot{x}) dt - H(x)) dt = 0,$$

para cualquier variación δx con $\delta x(t_i) = 0$, para $i = 1, 2$ equivale a la ecuación de Hamilton $\omega(\dot{x}, \cdot) = dH$.

Csso $P = T^*Q$. En el caso de la variedad simpléctica especial T^*Q con forma simpléctica $\omega_0 = -d\theta_0$, existe otro enfoque variacional importante, que pasamos a describir a continuación.

Recordemos que se tiene $\theta_0(v_{\alpha_q}) = \alpha_q(T\pi_Q(v_{\alpha_q}))$. Ésto sugiere considerar la función $F : TQ \oplus T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(v_q \oplus \alpha_q) = \alpha_q(v_q) - H(\alpha_q)$. En coordenadas locales, F se escribe $F((q, \dot{q}) \oplus (q, p)) = p\dot{q} - H(q, p)$. Para una curva $(q(t), \dot{q}(t)) \oplus (q(t), p(t))$ en $TQ \oplus T^*Q$, se tiene la acción

$$\int_{t_0}^{t_1} F((q(t), \dot{q}(t)) \oplus (q(t), p(t))) dt.$$

Se comprueba en seguida que los puntos críticos de esta funcional, con variaciones $(\delta q, \delta p)$ tales que $\delta q(t_i) = 0$, para $i = 1, 2$, y δp arbitrario, son precisamente las curvas que satisfacen la ecuación de Hamilton.

7. Sistemas Hamiltonianos con Simetría

Sea G un grupo de Lie, y sea $H : T^*G \rightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltoniano. Si H es invariante por el levantamiento cotangente de las traslaciones a izquierda en el grupo, entonces H está determinado por su restricción $h = H|_{\mathfrak{g}^*}$ al dual del álgebra de Lie de G , que llamaremos el **Hamiltoniano reducido**. En este caso, la función $F : TG \oplus T^*G \rightarrow \mathbb{R}$, es también invariante y entonces está determinada por su restricción $f : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta el principio variacional descrito en la sección 6 y las ideas de reducción Lagrangiana descrita al final de la sección 5, se puede probar fácilmente en forma análoga que las ecuaciones del movimiento reducidas, en el espacio $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ se pueden obtener como puntos críticos de la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mu(v) - h(\mu)) dt$$

con variaciones $\delta v \oplus \delta \mu$ tales que $\delta v = \dot{\eta} + [v, \eta]$, donde $\eta(t_i) = 0$, para $i = 1, 2$, y variaciones $\delta \mu$ arbitrarias. Aplicando las técnicas usuales del cálculo de variaciones, incluyendo la integración por partes ya descrita en varios casos anteriores, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$v = \frac{\partial h}{\partial \mu} \tag{7.1}$$

$$\dot{\mu} = \text{ad}_v^* \mu, \tag{7.2}$$

que son las ecuaciones de **Lie-Poisson**.

En el caso en que un Lagrangiano invariante $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$, con Lagrangiano reducido $l : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, sea hiperregular, se puede ver sin mucha dificultad que el Hamiltoniano también es invariante y el correspondiente Hamiltoniano reducido $h : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por la **transformación de Legendre reducida** $h(\mu) = \mu(v) - l(v)$, donde v es la función de μ que resulta de la ecuación $\mu = \partial l / \partial v$. Se verifica de inmediato que la ecuación de Lie-Poisson y la ecuación de Euler-Poincaré coinciden en este caso. Sin embargo, los casos en que el Lagrangiano no es

hiperregular son importantes, y en este caso el estudio de las leyes del movimiento puede ser más natural realizarlo desde el punto de vista Lagrangiano o Hamiltoniano, según el caso.

8. Variedades de Poisson

Sea P una variedad simpléctica con forma simpléctica ω . Sean f y g funciones sobre P . El **corchete de Poisson** de $\{f, g\}$ se define mediante $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$. En coordenadas arbitrarias x^i , se tiene $\{f, g\} = \omega_{ij} X_f^i X_g^j$. Como ω es no degenerada, existe π^{ij} tal que $\pi^{kj} \omega_{ij} = \delta_i^k$, lo que define un campo tensorial antisimétrico π . De la definición de X_f se deduce que

$$\omega_{ij} X_f^i = \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

de donde se deduce que

$$X_f^i = \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

y también que

$$\{f, g\} = \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

En coordenadas de Darboux resulta

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p}$$

El corchete de Poisson es bilineal y antisimétrico. Además, para cada f , $\{, f\}$ es una derivación, más precisamente, es la derivación en el álgebra de funciones sobre P dada por el campo X_f . Vale la **identidad de Jacobi** $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$, lo que probaremos en seguida. En coordenadas locales x^i , la identidad de Jacobi se escribe

$$\pi^{ij} \frac{\partial \pi^{kl}}{\partial x^j} + \pi^{kj} \frac{\partial \pi^{li}}{\partial x^j} + \pi^{lj} \frac{\partial \pi^{ik}}{\partial x^j} = 0.$$

En coordenadas de Darboux, las componentes π^{ij} son constantes, de donde se deduce que la identidad de Jacobi se satisface.

Es importante destacar que la ecuación de Hamilton se escribe de modo equivalente en términos del corchete de Poisson, como se explica a continuación. Sea H un Hamiltoniano dado, y sea F_t el flujo del campo Hamiltoniano X_H . Para una función dada f , nos proponemos calcular

$$\frac{d}{dt} F_t^* f \equiv \frac{d}{dt} (f \circ F_t).$$

Se tiene

$$\frac{d}{dt} F_t^* f = F_t^* L_{X_H} f \tag{8.1}$$

$$= F_t^* \{f, H\} \equiv \{f, H\} \circ F_t. \tag{8.2}$$

En forma abreviada, la ecuación anterior se escribe como sigue,

$$\dot{f} = \{f, H\},$$

que es equivalente a la ecuación de Hamilton, escrita en términos del corchete de Poisson. Esto se puede probar fácilmente en coordenadas de Darboux, comprobando directamente que valen las siguientes igualdades,

$$\{q^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (8.3)$$

$$\{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (8.4)$$

El corchete de Poisson asociado a una forma simpléctica, definido arriba, suele llamarse corchete de Poisson *canónico*. Una noción más general, de gran interés, es la siguiente. Una *variedad de Poisson* es una variedad M con un corchete $\{f, g\}$, llamado *corchete de Poisson*, definido en el álgebra de funciones sobre M , y que tiene las mismas propiedades formales enunciadas para el corchete de Poisson canónico, a saber, es bilineal, antisimétrico, es una derivación en cada factor y satisface la identidad de Jacobi. Si M_i son variedades de Poisson con corchetes de Poisson $\{, \}_i$, para $i = 1, 2$, un mapa $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$, se dice un *mapa de Poisson*, si se cumple, $\varphi^*\{f, g\} = \{\varphi^*f, \varphi^*g\}$, para funciones f y g en M_2 dadas.

Se prueba fácilmente que, si M_i son variedades simplécticas con sus corchetes de Poisson canónicos $\{, \}_i$, para $i = 1, 2$, un mapa $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$, es un mapa de Poisson si y sólo si es simpléctico. También se prueba fácilmente que $\varphi^*X_f = X_{\varphi^*f}$.

La *ecuación de Hamilton generalizada*, o *ecuación de Poisson*, o, simplemente *ecuación de Hamilton* para un Hamiltoniano dado, es, entonces, por definición, $\dot{f} = \{f, H\}$. El campo Hamiltoniano se denota X_H . Se verifica en seguida que $X_H(f) = \{f, H\}$. Otra fórmula de interés es la siguiente, $[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}$. En efecto, se tiene

$$[X_f, X_g]h = X_f X_g h - X_g X_f h \quad (8.5)$$

$$= X_f \{h, g\} - X_g \{h, f\} \quad (8.6)$$

$$= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} \quad (8.7)$$

$$= -\{\{h, f\}, g\} - \{f, \{h, g\}\} \quad (8.8)$$

$$= -\{h, \{f, g\}\} \quad (8.9)$$

$$= -X_{\{f, g\}}h \quad (8.10)$$

$$(8.11)$$

donde en el anteúltimo paso se ha usado la identidad de Jacobi. Este resultado muestra que los campos Hamiltonianos en una variedad de Poisson forman un álgebra de Lie. Más generalmente, un campo X en M se dice *localmente Hamiltoniano*, si se puede expresar, localmente, en la forma $X = X_f$. Es fácil ver que los campos localmente Hamiltonianos forman un álgebra de Lie.

Las propiedades del corchete de Poisson tienen como consecuencia las siguientes leyes de conservación, de fundamental importancia en mecánica. En primer lugar,

el Hamiltoniano H se conserva, es decir $\dot{H} = 0$. Esto es una consecuencia inmediata de la antisimetría del corchete, ya que $\dot{H} = \{H, H\} = 0$. El tensor π también se conserva, lo cual equivale a la identidad $X_H\{f, g\} = \{X_H f, g\} + \{f, X_H g\}$, la cual, a su vez, es una consecuencia de la identidad de Jacobi. En efecto, se tiene $X_H\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} = \{\{f, H\}, g\} + \{f, \{g, H\}\} = \{X_H f, g\} + \{f, X_H g\}$.

Es muy importante destacar que el formalismo de Hamilton o Poisson, se puede aplicar a ejemplos infinito dimensionales, dejando de lado las cuestiones de convergencia y la definición de estructuras diferenciales en variedades infinito dimensionales, que son importantes por otros motivos. Por ejemplo, vamos a mostrar que las ecuaciones de Maxwell tienen una estructura Hamiltoniana.

Ejemplo 7 Sea \mathcal{A} el espacio de potenciales magnéticos A en \mathbb{R} . Se identifica $T^*\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, y un elemento de este espacio se denota (A, Y) . Se usa el corchete de Poisson canónico

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\partial F}{\partial A} \frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial G}{\partial A} \frac{\partial F}{\partial Y} \right) d^3x.$$

El Hamiltoniano es

$$H(A, Y) = \int (|E|^2 + |B|^2) d^3x,$$

donde $E = -Y$ es el campo eléctrico y $B = \text{curl } A$ es el campo magnético. Se verifica que las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones de Hamilton.

Estructura Local de Variedades de Poisson. Como se ha visto más arriba, los campos localmente Hamiltonianos en una variedad de Poisson M forman un álgebra de Lie. Por lo tanto, la distribución Δ , donde $\Delta(x)$ es el espacio de los vectores $X_f(x)$, es involutiva. La dimensión de los espacios $\Delta(x)$ no es, en general, constante. Sea $N \subseteq M$ una subvariedad integral de Δ . Para $x \in N$, los vectores de $T_x N = \Delta(x)$ son todos de la forma $X_f(x)$. Se define $\omega_N(x)(X_f(x), X_g(x)) = \{f, g\}(x)$. Vamos a ver que ω_N es una forma simpléctica en N . Que ω_N es antisimétrica y no degenerada, resulta fácilmente de la definición. Para probar que ω_N es cerrada, probemos primero que $L_{X_f} \omega_N = 0$ para todo f . Esto equivale a la igualdad $L_{X_f}(\omega_N(X_g, X_h)) = \omega_N(L_{X_f} X_g, X_h) + \omega_N(X_g, L_{X_f} X_h)$, para todo f, g , que probaremos a continuación. Usando las definiciones, resulta $L_{X_f}(\omega_N(X_g, X_h)) = \{\{g, h\}, f\}$. También se tiene, $\omega_N(L_{X_f} X_g, X_h) = \omega_N([X_f, X_g], X_h) = -\omega_N(X_{\{f, g\}}, X_h) = -\{\{f, g\}, h\}$, y, análogamente, $\omega_N(X_g, L_{X_f} X_h) = -\{g, \{f, h\}\}$. Luego, la igualdad que se quería probar se reduce a la identidad de Jacobi. Por otra parte, $L_{X_f} \omega_N = i_{X_f} d\omega_N + di_{X_f} \omega_N = i_{X_f} d\omega_N$, ya que $di_{X_f} \omega_N = d^2(f|N) = 0$. En resumen, se ha probado que $i_{X_f} d\omega_N = 0$, luego, dada la arbitrariedad de f , resulta $d\omega_N = 0$.

Se prueba también fácilmente, que $\omega_N(X_{f|N}, X_{g|N}) = \omega_N(X_f, X_g)$, donde $X_{f|N}$ y $X_{g|N}$ son los campos asociados a las restricciones $f|N$ y $g|N$, vía la forma simpléctica ω_N .

El siguiente ejemplo de variedad de Poisson es de fundamental importancia en mecánica.

Corchete de Poisson en el dual de un álgebra de Lie. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, con constantes de estructura C_{ij}^k . Sean f y g funciones definidas en \mathfrak{g}^* . Sea

$$\{f, g\}(\mu) = - \left\langle \mu, \left[\frac{df}{d\mu}, \frac{dg}{d\mu} \right] \right\rangle.$$

Entonces $\{f, g\}$ define un corchete de Poisson. Más aún, el tensor π de esta estructura de Poisson viene dado por $\pi_{ij}(\mu) = -C_{ij}^k \mu_k$. Se puede ver fácilmente en coordenadas que la identidad de Jacobi para el corchete de Poisson y para el corchete de Lie se deducen mutuamente una de la otra. La elección del signo $-$ en la definición del corchete de Poisson, es hasta cierto punto, arbitraria. En este caso, esta elección se ha hecho en relación con la teoría de la reducción, teniendo en cuenta que se trabaja aquí con sistemas invariantes a izquierda, como el cuerpo rígido.

El corchete de Poisson unifica el estudio de importantes ecuaciones de la mecánica. Todas las ecuaciones de los ejemplos vistos anteriormente pueden escribirse en la forma de Poisson. Por ejemplo, las ecuaciones del cuerpo rígido se escriben como ecuaciones de Poisson en $\mathfrak{so}(3)^*$.

9. Reducción de Poisson

La noción de simetría y la asociada noción de cantidad conservada son de importancia fundamental en mecánica y en física en general. Ya hemos visto ejemplos importantes de reducción de sistemas Lagrangianos invariantes en grupos de Lie, obteniendo la ecuación de Euler-Poincaré, y, mediante la transformación de Legendre en el caso hiper regular, la reducción desde el enfoque Hamiltoniano, obteniendo la ecuación de Lie-Poisson. En ambos casos se ha puesto énfasis en la idea de reducir el principio variacional, en lugar de pensar en reducir las ecuaciones del movimiento, ya sea en la forma de Hamilton o de Euler-Lagrange, lo cual ofrece ciertas ventajas. Una de las motivaciones para la reducción, es que se obtiene una ecuación con menos variables, lo cual puede significar una simplificación que permita obtener mayor información sobre la solución. En el caso del cuerpo rígido, por ejemplo, se obtiene como se ha visto, un sistema Hamiltoniano en la esfera, y como el Hamiltoniano se conserva, éste da una inmediata reducción de la ecuación de Hamilton a cuadraturas. En otros casos, es conveniente, dada una ecuación de Poisson en una variedad de Poisson, tratar de hallar una variedad simpléctica que se proyecte en la variedad de Poisson dada, por un mapa de Poisson. En este caso, la variedad simpléctica se denomina, por razones históricas, *potencial de Clebsch* de la variedad de Poisson dada. En casos importantes de corchetes de Poisson en física, se pueden hallar explícitamente estos potenciales de Clebsch, lo cual muestra que el corchete dado es una versión reducida de un corchete de Poisson canónico.

Es conveniente disponer de una teoría de reducción directamente en el contexto de Poisson, lo que describimos a continuación.

Sea $G \times P \rightarrow P$ una acción de un grupo G en P por simplectomorfismos, de modo tal que la proyección $\pi_G : P \rightarrow P/G$ sea una submersión. Si $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ es una función invariante, define una función en el cociente $\bar{f} : P/G \rightarrow \mathbb{R}$. Se verifica que

si f y g son funciones invariantes entonces $\{f, g\}$ es invariante, por lo tanto, define una función $\overline{\{f, g\}}$. Por definición, escribimos $\{\bar{f}, \bar{g}\} = \overline{\{\pi^*f, \pi^*g\}}$. Se demuestra fácilmente que se obtiene de este modo un corchete de Poisson en P/G , llamado corchete **reducido**.

Vamos a mostrar que el corchete de Poisson construido más arriba de modo directo en el dual del álgebra de Lie \mathfrak{g} de un grupo de Lie G , es un corchete reducido del corchete canónico en T^*G , vía la proyección $\pi : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$, dada por el levantamiento cotangente de las traslaciones a derecha, es decir $\pi(\alpha_g) = \alpha_g \circ TR_g$. Sea $\xi \in \mathfrak{g}$, y sea ξ_G el campo invariante a derecha en G tal que $\xi_G(e) = \xi$, es decir, ξ_G es el generador infinitesimal de las traslaciones a izquierda. Sea ξ_{T^*G} el generador infinitesimal del levantamiento cotangente de las traslaciones a izquierda. Entonces se tiene $\pi_{G^*}\xi_{T^*G} = \xi_G$. Para $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, se tiene $[\xi_G, \eta_G] = -[\xi, \eta]_G$, y además, $\pi_{Q^*}[\xi_{T^*G}, \eta_{T^*G}] = [\xi_G, \eta_G]$. Vamos a probar que los campos ξ_{T^*G} son Hamiltonianos, con Hamiltoniano $\bar{J}(\xi) = \theta_0(\xi_{T^*G})$, que es invariante a derecha. En efecto, se tiene que $L_{\xi_{T^*G}}\theta_0 = 0$. Luego $i_{\xi_{T^*G}}d\theta_0 + di_{\xi_{T^*G}}\theta_0 = 0$, de donde resulta $d\bar{J}(\xi) = i_{\xi_{T^*G}}\omega_0$, que es la ecuación de Hamilton. Por otra parte, usando formulas ya vistas, y la igualdad $d\nu(X, Y) = X(\nu(Y)) - Y(\nu(X)) - \nu([X, Y])$, válida para cualquier 1-forma ν , resulta que

$$\{\bar{J}(\xi), \bar{J}(\eta)\} = \omega_0(\xi_{T^*G}, \eta_{T^*G}) \quad (9.1)$$

$$= -\xi_{T^*G}\theta_0(\eta_{T^*G}) + \eta_{T^*G}\theta_0(\xi_{T^*G}) + \theta_0([\xi_{T^*G}, \eta_{T^*G}]) \quad (9.2)$$

$$= \theta_0([\xi_{T^*G}, \eta_{T^*G}]), \quad (9.3)$$

donde el último paso resulta teniendo en cuenta que $\xi_{T^*G}\theta_0(\eta_{T^*G}) = 0$ y $\eta_{T^*G}\theta_0(\xi_{T^*G}) = 0$. Se sabe que $[\xi_{T^*G}, \eta_{T^*G}] = -[\xi, \eta]_{T^*G}$. Resumiendo, se tiene, para $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $\{\bar{J}(\xi), \bar{J}(\eta)\}(\mu) = -\langle \mu, [\xi, \eta] \rangle$. En general, si f y g son funciones dadas en T^*G , invariantes por la acción a derecha de G en T^*G , y si $\xi = \partial(f|\mathfrak{g}^*)/\partial\mu$ y $\eta = \partial(g|\mathfrak{g}^*)/\partial\mu$, entonces $\{f, g\}(\mu) = -\langle \mu, [\xi, \eta] \rangle$.

Como ya hemos dicho, los Hamiltonianos $\bar{J}(\xi)$ son invariantes a derecha. Si se hubiese partido del generador infinitesimal de traslaciones a derecha, en lugar de traslaciones a izquierda, se hubiese llegado al corchete $\langle \mu, [\xi, \eta] \rangle$. En este caso, los Hamiltonianos $\bar{J}(\xi)$ serían invariantes a izquierda.

10. Reducción de Marsden-Weinstein

Daremos solamente una idea de la reducción de Marsden-Weinstein. Sea P una variedad simpléctica exacta con forma simpléctica $\omega = -d\theta$. Sea G un grupo que actúa a izquierda sobre P por simplectomorfismos que, además, preservan θ , y de modo que la proyección $\pi_G : P \rightarrow P/G$ es una submersión. Los generadores infinitesimales de la acción ξ_P son campos Hamiltonianos, con Hamiltoniano $\bar{J}(\xi_P) = \theta(\xi_P)$. En efecto se tiene que $L_{\xi_P}\theta = 0$, luego $di_{\xi_P}\theta + i_{\xi_P}d\theta = 0$, luego $d\bar{J}(\xi_P) = di_{\xi_P}\theta$. Se llama **aplicación momento** a la aplicación $J : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$, definida por $J(x)(\xi) = \bar{J}(\xi)(x)$.

La importancia de la aplicación momento en mecánica se origina en el hecho de que es una cantidad conservada por el flujo de los Hamiltonianos invariantes. Más

precisamente, si H es un Hamiltoniano invariante, y $\xi \in \mathfrak{g}$, entonces $L_{X_H} \bar{J}(\xi) = 0$. En efecto, $L_{X_H} \bar{J}(\xi) = \{\bar{J}(\xi), H\} = dH(\xi_P) = 0$.

Una propiedad importante de la aplicación momento, es que es equivariante, es decir $J(gx) = \text{Ad}_{g^{-1}}^* J(x)$, lo que se prueba fácilmente.

Sea μ un valor regular de la aplicación momento, entonces $J^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de P . Por la conservación de J , resulta que los campos Hamiltonianos X_f donde f es invariante, son tangentes a $J^{-1}(\mu)$. Se puede ver que el grupo de isotropía G_μ de la acción coadjunta, actúa libremente sobre $J^{-1}(\mu)$. Bajo condiciones técnicas adecuadas, que se cumplen en muchos ejemplos de interés físico, el cociente $J^{-1}/G_\mu = P_\mu$ es una variedad, y entonces, la restricción $\omega|_{J^{-1}(\mu)}$ induce una forma simpléctica ω_μ en el cociente P_μ , vía la proyección $\pi_\mu : P \rightarrow P_\mu$. Más precisamente, si u y v son vectores tangentes a $J^{-1}(\mu)$ e invariantes por G_μ , se tiene, por definición, $\omega_\mu(T\pi_\mu u, T\pi_\mu v) = \omega(u, v)$. La variedad simpléctica P_μ es la **variedad simpléctica reducida** y la forma simpléctica ω_μ es la **forma simpléctica reducida**. El **Hamiltoniano reducido**, $H_\mu : P_\mu \rightarrow \mathbb{R}$, se define de modo natural, y se definen la ecuación de Hamilton reducida, X_{H_μ} , la cual da la evolución del sistema en P_μ .

El caso $P = T^*G$ es de gran importancia. Describiremos esquemáticamente la situación en este caso. Usando la fórmula $J(\alpha_g)(\xi) = \alpha_g(\xi_G)$, se ve que, para $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $J^{-1}(\mu)$ es el gráfico de la 1-forma α en G , invariante a derecha y tal que $\alpha(e) = \mu$. Se tienen las identificaciones naturales $J^{-1}(\mu) \backslash G_\mu \cong G \backslash G_\mu \cong G \cdot \mu$, dadas por $[\alpha(g)] \equiv [g] \equiv \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mu$, donde $[\alpha(g)] = G_\mu \alpha(g)$, $[g] = G_\mu g$, y $G \cdot \mu = \mathcal{O}_\mu$ es la órbita coadjunta que contiene a μ . Un vector tangente a la órbita coadjunta \mathcal{O}_μ en $\nu \in \mathcal{O}_\mu$, se escribe como el generador infinitesimal de la acción coadjunta, $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu) = -\text{ad}_\xi^* \nu$. Entonces, la fórmula de **Kirillov-Kostant-Souriau** da la forma simpléctica ω_μ , a saber, $\omega_\mu(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) = -\langle \nu, [\xi, \eta] \rangle$. Las órbitas coadjuntas son las hojas simplécticas que son variedades integrales de la distribución Δ definida en la sección 8. También conviene observar, lo cual se prueba con facilidad, que las ecuaciones del movimiento para un Hamiltoniano dado $h : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$, son precisamente las ecuaciones de Lie-Poisson, obtenidas en la sección 7 reduciendo el principio variacional de Hamilton en el espacio de fase. Más aún, se prueba que el corchete de Poisson en \mathfrak{g}^* , está dado por

$$\{f, g\}(\mu) = \omega_\mu \left(\text{ad}_{\frac{df}{d\mu}}^* \mu, \text{ad}_{\frac{dg}{d\mu}}^* \mu \right).$$

SIMETRÍA ESPEJO EN MATEMÁTICA: ALGUNOS TEMAS BÁSICOS

JAVIER FERNANDEZ

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Geometría enumerativa	3
2.1. Algunos problemas enumerativos	4
2.2. Curvas racionales	7
2.3. Aplicaciones estables	9
2.4. El programa de la geometría enumerativa	10
2.5. Exceso de intersección	10
2.6. Curvas racionales en la quintica	11
3. Simetría espejo	13
3.1. “Física”	13
3.2. El modelo A en la quintica	16
3.3. El espejo de la quintica	17
3.4. La aplicación espejo	18
3.5. El acoplamiento de Yukawa	20
3.6. Normalización del acoplamiento de Yukawa	21
3.7. Conclusiones	22
4. Apéndices	23
4.1. Espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n	24
4.2. Recuerdos de topología algebraica	25
4.3. Variedades Calabi-Yau	27
4.4. Grassmanianas complejas	28
4.5. Algunos proyectos enumerativos	29
Referencias	30

Estas notas son una versión extendida del material que acompañó el curso “Simetría Espejo en Matemática”, dictado por el autor en el Segundo Encuentro de Geometría Diferencial, llevado a cabo en la La Falda, Córdoba, en Junio de 2005. En estas notas se introduce al lector a algunas nociones “clásicas” del círculo de ideas conocido como “simetría espejo” (*mirror symmetry* en inglés). Se explicará la heurística del cálculo de los números de curvas racionales en una quintica, es decir, en una hipersuperficie genérica de grado 5 en \mathbb{P}^4 .

1. INTRODUCCIÓN

Hay momentos en la historia de la Matemática en que un descubrimiento, aparentemente fortuito, incluso totalmente infundado, ha tenido importantes consecuencias en áreas de la matemática hasta ese momento consideradas desconectadas. Tal fue, por ejemplo,

Date: 2 de agosto de 2006.

el caso de las series de Fourier o mucho mas recientemente el “Monstrous Moonshine”. En este grupo de eventos se encuentra el fenómeno de la simetría espejo.

En su comienzo, la simetría espejo apareció como una observación de que en ciertas teorías físicas basadas en datos geométricos era posible cambiar estos datos geométricos y aún así obtener una teoría equivalente. Esto llevó a tratar de encontrar pares de configuraciones geométricas (*pares espejo*) para los cuales se pudiesen calcular las correspondientes teorías físicas y así verificar la idea original. El beneficio que se busca usualmente con este tipo de argumentos es que hay ciertos cálculos que resultan más simples en un modelo geométrico que en otro.

En concreto, los físicos trabajaban con una variedad de dimensión real 6, conocida como la *quintica* V a la que asociaron otra variedad, su *par espejo*, V^0 . El estudio de la teoría física sobre V los llevo a problemas que involucran la cantidad de ciertas curvas racionales contenidas en ella. Por otro lado, las teorías estudiadas sobre V^0 llevan al cálculo de ciertas integrales de formas holomorfas (llamadas *períodos*). Lo interesante de este planteo es que la equivalencia de las teorías físicas lleva a encontrar fórmulas que permiten expresar los números de curvas racionales en términos de las integrales. Dado que este tipo de integrales eran razonablemente conocidas este método permite calcular efectivamente los números de curvas racionales, tal como hicieron P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green y L. Parkes en [2].

Desde el punto de vista matemático, todo este argumento es muy sorprendente. Para empezar, no había ninguna relación conocida entre pares de variedades del tipo de la predicha por los físicos. Tampoco ninguna relación entre número de curvas y períodos. Más aún, en los años '80 se había conjeturado que los números de curvas de los que hablaban los físicos eran finitos, pero hasta ese momento sólo se conocían dos valores, el segundo calculado el 1985. Todo esto llevó a un profundo interés por el tema y, muy pronto, a comprender que, si bien los argumentos parecían razonables, no era posible transformarlos en argumentos matemáticos sólidos, principalmente porque usaban muy fuertemente la noción de integral sobre espacios de funciones, de la que en general no se tiene una buena definición matemática.

A partir de allí hubo todo tipo de intentos por, primero, entender qué es la simetría espejo y, luego, demostrarla de una manera matemáticamente aceptable. Más de una década ha transcurrido desde los primeros trabajos. Mucho de lo aprendido y áreas completamente nuevas de la Matemática han sido creadas y exploradas en este tiempo. En este momento se cuenta con, al menos, dos demostraciones independientes y matemáticamente rigurosas de resultados que implican que los trabajos originales de los físicos eran correctos, aunque con algunas salvedades respecto del significado de los “números de curvas racionales”. Es interesante notar que las demostraciones matemáticas son totalmente independientes de las ideas físicas originales.

Sin embargo, aún no es claro qué es la simetría espejo. Hay una gran cantidad de propuestas y fenómenos muy interesantes que se encuadran bajo este nombre y, de un modo u otro, se inspiran en la idea original proveniente de la física. Entre otras, podemos mencionar las siguientes “versiones” de la simetría espejo:

- Geometría Tórica: este es el ámbito que ha permitido el estudio más amplio de la simetría espejo y es dónde mas resultados concretos se han obtenido, desde la construcción de pares de variedades espejo, hasta los teoremas que avalan las fórmulas mencionadas antes.
- Teoría Homológica: busca interpretar la simetría espejo como una equivalencia entre dos categorías asociadas al par de variedades espejo. Por un lado se tiene la categoría derivada de haces coherentes sobre una de las variedades y por el otro

una categoría de Fukaya (conjetural) basada en las subvariedades lagrangianas de la variedad espejo de la original.

- Teoría de Hodge: busca interpretar la simetría espejo como un isomorfismo entre la variación de estructura de Hodge natural definida sobre el espacio de estructuras complejas de una variedad (las variaciones “geométricas”) y la variación de estructura de Hodge definida sobre el espacio de estructuras de Kähler de su par espejo (la variación A).
- Branäs: la “teoría estándar” de la simetría espejo apareció en el contexto físico de la teoría de cuerdas (objeto de dimensión 1). Cuando se consideran, además, objetos de dimensiones mayores llamados *branäs*, la teoría física de la simetría espejo se enriquece y predice que los pares de variedades espejo se fibran sobre un toro de dimensión real 3 de modo que las fibras de cada fibración son duales en algún sentido.

En las notas que siguen, nos concentraremos en algunos de los aspectos más básicos de la simetría espejo. Nuestro objetivo será poder describir algunas de las ideas matemáticas que permitieron, *usando la intuición física*, calcular ciertos números relacionados con los números de curvas racionales en la quintica. Para poder entender la relación entre estos números nos embarcaremos en la Sección 2 en el estudio de la Geometría Enumerativa. Esta es una parte de la Geometría interesada en contar distintos tipos de configuraciones geométricas. En la Sección 3 haremos los cálculos que permiten relacionar los números de curvas con los períodos sobre el espejo de la quintica. La Sección 4 contiene una serie de apéndices donde resumimos algunos de los temas que suponemos conocidos para la comprensión de estas notas, así como también presentamos el cálculo del número de rectas en una superficie de grado 3 en \mathbb{P}^3 .

Actualmente la literatura en simetría espejo es muy extensa y continúa creciendo. En las notas mencionaremos diversos trabajos más específicos, pero queremos aprovechar para mencionar algunos libros escritos sobre el tema. En orden cronológico están los de C. Voisin [22], D. Cox y S. Katz [6] y el de K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas y C. Vafa [10]. En cuanto a las extensiones mencionadas de la teoría y que no serán tratadas en estas notas sugerimos al lector consultar los siguientes trabajos y la bibliografía allí mencionada:

- Teoría homológica: el trabajo básico de M. Kontsevich [14] y contribuciones más recientes como [15].
- Teoría de Hodge: una de las primeras presentaciones es la de D. Morrison [19]. Más detalles en [6], la exposición de M. Gross, D. Huybrechts y D. Joyce [9] o el trabajo de E. Cattani y el autor [3].
- Branäs: La construcción básica es el trabajo de A. Strominger, S.-T. Yau y E. Zaslow [21]. Es útil la exposición de D. Morrison [20]. Es interesante notar la convergencia entre estas ideas y la “versión homológica” presentada en [15].

El autor desea, finalmente, agradecer a los organizadores del Segundo Encuentro de Geometría Diferencial y, en particular, a Isabel Dotti por su dedicación y por haber generado un muy positivo intercambio de ideas entre profesionales con intereses diversos.

2. GEOMETRÍA ENUMERATIVA

En esta Sección discutiremos un número de ideas rudimentarias sobre como contar configuraciones geométricas que satisfacen algún tipo de restricciones. Seguiremos el tratamiento de las excelentes notas de S. Katz [13] y también la presentación de D. Morrison [19] a los que referimos para mayores detalles.

2.1. Algunos problemas enumerativos. Comencemos con algunas preguntas simples para entender el por qué de la elección de trabajar en \mathbb{P}^n , en vez del “más intuitivo” espacio \mathbb{R}^n .

Ejemplo 2.1. ¿Cómo son las posibles intersecciones de dos rectas en \mathbb{R}^2 ?

1. Un punto (rectas oblicuas). Este es el “caso genérico”, que ocurre con más frecuencia.
2. Ningún punto (rectas paralelas). Inestable: una pequeña perturbación lo reduce al caso genérico.
3. Infinitos puntos (rectas idénticas). Inestable: una pequeña perturbación lo reduce al caso genérico.

Una primera simplificación de esta clasificación se obtiene pasando a $\mathbb{RP}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \{\text{puntos en } \infty\}$: en este caso, la opción 2 se unifica con el caso genérico ya que las rectas paralelas pasan a intersectarse en ∞ .

Veamos un nuevo problema:

Ejemplo 2.2. ¿cómo son las posibles intersecciones de elipses en \mathbb{R}^2 (o en \mathbb{RP}^2)? Las distintas posibilidades se muestran en la Figura 1.

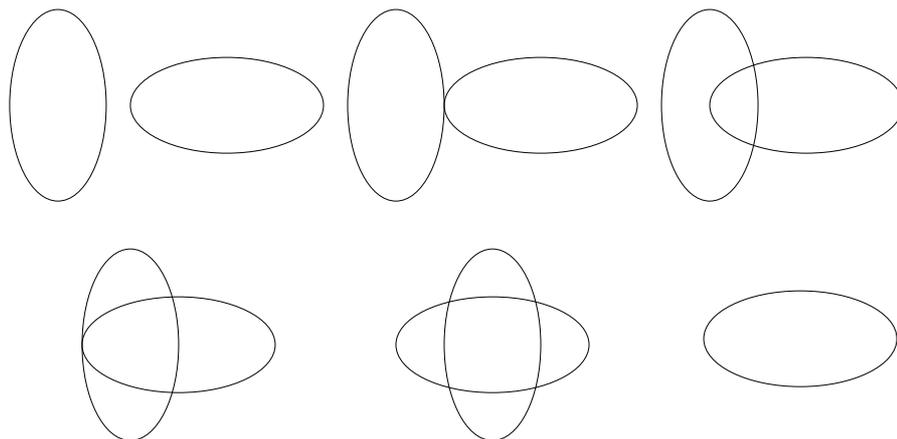


FIGURA 1. Posibles intersecciones de dos elipses

Esta vez es posible simplificar la descripción pasando de \mathbb{R} a \mathbb{C} , ya que vale el teorema fundamental del álgebra, es decir que un polinomio en una variable tiene tantas raíces como su grado, si se las cuenta con multiplicidad. Entonces, sobre los complejos y contando multiplicidades de intersección, hay solo dos posibilidades: 4 puntos de intersección (caso genérico) o infinitos, cuando las elipses coinciden.

Como muestran los ejemplos anteriores, resulta más simple estudiar problemas enumerativos en \mathbb{CP}^n (que denotaremos simplemente por \mathbb{P}^n) que en \mathbb{R}^n y en lo que sigue tomaremos a \mathbb{P}^n como el “espacio ambiente”. Consultar la Sección 4.1 para más detalles sobre \mathbb{CP}^n .

Definición 2.3. Una *curva plana* es una hipersuperficie en \mathbb{P}^2 , vale decir, es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$; si $\deg(f) = d$, se dice que la curva tiene grado d . Las curvas planas de grado 2 se llaman *cónicas*.

Un resultado importante para el estudio de las intersecciones es el

Teorema 2.4 (Bézout). *Si C y D son curvas planas con $\#(C \cap D) < \infty$, entonces*

$$\sum_{p \in C \cap D} m_p(C \cap D) = \deg(C) \cdot \deg(D),$$

donde $m_p(C \cap D)$ es la multiplicidad de la intersección de C y D en p .

También hay una generalización a dimensiones más altas:

Teorema 2.5 (Bézout). *Si X_1, \dots, X_n son hipersuperficies en \mathbb{P}^n con $\#(X_1 \cap \dots \cap X_n) < \infty$, entonces*

$$\sum_{p \in X_1 \cap \dots \cap X_n} m_p(X_1 \cap \dots \cap X_n) = \deg(X_1) \cdots \deg(X_n)$$

Volvamos a mirar algunos problemas enumerativos. En el primer caso, se trata de un problema muy simple, ¡resuelto de una manera complicada!

Ejemplo 2.6. ¿Cuántas rectas en \mathbb{P}^2 pasan por dos puntos dados $p_1 = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ y $p_2 = (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2)$?

Una recta en \mathbb{P}^2 está dada como el conjunto de ceros de una forma lineal $a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2$ (por ejemplo, en el abierto U_0 en coordenadas $x_1 = \frac{z_1}{z_0}$ y $x_2 = \frac{z_2}{z_0}$, esto es el conjunto $a_1x_1 + a_2x_2 = -a_0$, que es una recta que no necesariamente pasa por el origen). Vale decir, a cada terna $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ corresponde una recta en \mathbb{P}^2 . Como distintas ternas corresponden a una misma recta si y sólo si difieren en un múltiplo no nulo, vemos que el conjunto de rectas en \mathbb{P}^2 es

$$M_1 := \{\text{rectas en } \mathbb{P}^2\} \simeq (\mathbb{C}^3 - \{0\})/\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{P}^2.$$

Nuevamente: \mathbb{P}^2 es el conjunto de las posibles rectas en \mathbb{P}^2 (notar que esto no es obvio de la definición ya que, en principio, los puntos de \mathbb{P}^2 son rectas en \mathbb{C}^3).

Ahora bien, ¿qué quiere decir que una recta, digamos $a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2$, pase por p_1 ? Quiere decir que vale $a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$, o sea que, la condición de pasar por p_1 determina una condición lineal (una recta) L_1 en M_1 . Por lo tanto, p_2 determina otra condición lineal L_2 sobre M_1 y la pregunta sobre el número de rectas por p_1 y p_2 se convierte en la cantidad de puntos en $L_1 \cap L_2 \subset M_1 = \mathbb{P}^2$. Entonces, si la intersección es finita, por el Teorema de Bézout, tenemos $1 = \deg L_1 \cdot \deg L_2 = \#(L_1 \cap L_2)$. Es claro que la intersección es infinita únicamente cuando $L_1 = L_2$, vale decir, cuando $p_1 = p_2$. De este modo recuperamos el resultado obvio: hay una única recta que pasa por dos puntos, salvo que los dos puntos coincidan, en cuyo caso hay infinitas rectas.

Lo importante del razonamiento anterior es que identificamos el espacio de las posibles configuraciones (las posibles rectas, \mathbb{P}^2) y las condiciones adicionales como condiciones geométricas sobre el espacio de configuraciones.

Veamos un problema del mismo estilo del anterior:

Ejemplo 2.7. ¿cuántas cónicas pasan por 5 puntos generales $p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{P}^2$?

El primer paso es encontrar el espacio de las cónicas. Una cónica está dada por un polinomio homogéneo de grado 2 en z_0, z_1 y z_2 , es decir, es de la forma:

$$a_0z_0^2 + a_1z_0z_1 + a_2z_0z_2 + a_3z_1^2 + a_4z_1z_2 + a_5z_2^2.$$

Por tanto una cónica queda determinada por una vector $(a_0, \dots, a_5) \in \mathbb{C}^6 - \{0\}$ y al identificar ecuaciones de una misma cónica se obtiene que

$$M_2 := \{\text{cónicas en } \mathbb{P}^2\} \simeq (\mathbb{C}^6 - \{0\})/\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{P}^5.$$

Igual que en el caso anterior, la condición de que una cónica pase por el punto p_j determina una condición lineal en M_2 y, por tanto, el número de cónicas que pasa por los 5 puntos

es $\#(L_1 \cap \dots \cap L_5) = \deg(L_1) \cdots \deg(L_5) = 1$, siempre que esta intersección sea finita, cosa que ocurre si los 5 puntos son genéricos. Notar que el hecho de que sean 5 puntos resulta crítico.

Antes de continuar, es importante hacer una distinción: las cónicas son, en principio, de 2 tipos distintos:

- “suaves”: intuitivamente elipses, hipérbolas y parábolas, en el caso real, y
- “singulares”: par de rectas o recta doble.

Para el problema que vamos a tratar a continuación es necesario entender que significa que una cónica C sea tangente a una recta L . En principio lo que se quiere es que haya un punto p en donde el orden de contacto entre C y L sea dos, es decir, $m_p(C \cap L) = 2$. Sin embargo esta noción puede no ser lo esperado cuando se consideran cónicas singulares, como se muestra en la Figura 2, donde $m_p(C \cap L) = 2$ y sin embargo no es lo que intuitivamente se entiende por tangencia.

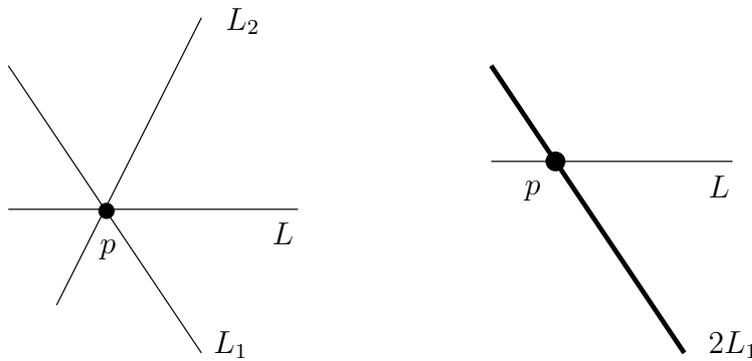


FIGURA 2. Intersección de la recta L con cónicas singulares. En ambos casos la multiplicidad de la intersección en p es 2.

Ejemplo 2.8. ¿cuál es el número de cónicas *suaves* que pasan por 4 puntos generales y que son tangentes a una recta L ?

Hay que destacar que el espacio de cónicas suaves *no es compacto* y, por tanto, el problema es mas complejo. Una manera de solucionar este problema es *compactificar* este espacio (es decir, incluirlo como un subconjunto denso de otro espacio compacto) y preocuparse despues por las posibles soluciones extrañas. Una compactificación obvia es el conjunto de todas las cónicas, es decir \mathbb{P}^5 .

Podemos suponer que las coordenadas se eligen de modo que L sea la recta $z_2 = 0$ en \mathbb{P}^2 . En este caso, un punto $(z_0 : z_1 : z_2)$ en la intersección de L y la cónica $(a_0 : \dots : a_5)$ satisface $a_0 z_0^2 + a_1 z_0 z_1 + a_3 z_1^2 = 0$. Ahora bien, para que la multiplicidad de la intersección sea 2, es necesario que $a_1^2 - 4a_0 a_3 = 0$, lo cual define una cuádrica $Q \subset \mathbb{P}^5$. Finalmente, si L_j es la recta definida por la condición de pasar por p_j , Bézout dice que $\#(L_1 \cap \dots \cap L_4 \cap Q) = 2$, es decir que 2 cónicas satisfacen las condiciones. Se puede ver que para puntos en posición general las 2 cónicas esperadas son suaves.

Siguiendo con el mismo razonamiento anterior se esperaría que el número de cónicas que pasan por j puntos ($j = 0, \dots, 5$) y que son tangentes a $5 - j$ rectas sea 2^{5-j} . Sin embargo, esto no es cierto. Veamos el caso $j = 2$, es decir, busquemos las cónicas suaves que pasan por p_1 y p_2 y son tangentes a L_1, L_2 y L_3 , todos generales. Sea L la recta que pasa por p_1 y p_2 , y consideremos la cónica $C = 2L$ (la recta L “doble”). Resulta ser que $m_C(H_1 \cdot H_2 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3) = 4$, donde $H_j \subset \mathbb{P}^5$ está determinada por la condición de contener al punto p_j y Q_j por la de ser tangente a la recta L_j . Veamos esto intuitivamente.

El conjunto de todas las líneas dobles es el conjunto \mathcal{V} , definido como la imagen de la aplicación

$$v : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5 \quad \text{dada por} \quad v(a_0 : a_1 : a_2) := (a_0^2 : 2a_0a_1 : 2a_0a_2 : a_1^2 : 2a_1a_2 : a_2^2)$$

y resulta ser isomorfo a \mathbb{P}^2 . Por otro lado, $\mathcal{V} \subset Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ ya que la intersección entre cualquier recta doble y una de las L_j es siempre un punto con multiplicidad 2. Por lo tanto, para determinar la multiplicidad $m_C(H_1 \cdot H_2 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3)$ hay que calcular la intersección de H_1 y H_2 en \mathcal{V} . Para esto notemos que la condición de que p_j esté en una recta dada es una condición lineal en $(a_0 : a_1 : a_2)$, pero resulta cuadrática en \mathcal{V} . Por lo tanto estamos intersecando dos condiciones cuadráticas en \mathbb{P}^2 (dos cónicas) y esto da 4. Por otro lado, la intersección claramente tiene un único punto (L) , que resulta tener multiplicidad 4. Esto muestra que la cónica singular $2L$ contribuye con 4 al total de las cónicas que pasan por p_1 y p_2 y son tangentes a las rectas L_1, L_2 y L_3 . El cálculo original usando Bézout daba 8 cónicas, con lo que restan 4 cónicas que se puede ver que realmente son suaves y son las cónicas buscadas inicialmente.

Los casos $j = 1$ y $j = 0$ son más complejos ya que hay una cantidad infinita de rectas dobles en cada caso.

Estos “defectos”, las contribuciones de configuraciones no deseadas, ya sean finitas, como en el caso $j = 2$, o infinitas, como en $j < 2$, son denominadas *exceso de intersección* y ocurre naturalmente en muchos problemas enumerativos. Se usan dos enfoques para tratar el exceso: una alternativa es desarrollar un método de cálculo efectivo para el exceso; la otra es cambiar de compactificación para trabajar en una que esté libre de exceso (éste ha sido el enfoque más usado clásicamente).

2.2. Curvas racionales. Para continuar con el estudio de problemas enumerativos es conveniente introducir la noción de curva racional. Técnicamente, una variedad racional de dimensión n es una variedad algebraica biracional a \mathbb{P}^n . Una curva racional es una variedad racional de dimensión 1. Demos, sin embargo, una definición operativa más elemental.

Definición 2.9. Una *curva racional* en \mathbb{P}^n es la imagen de un morfismo $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ dado por $f = (f_0, \dots, f_n)$, con los $f_j \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ homogéneos de igual grado y sin factores comunes. Una *curva racional parametrizada* es un tal morfismo f .

Ejemplo 2.10. $f(z_0, z_1) = (z_0^2, z_1^2, 0, 0, 0)$ define una curva racional parametrizada en \mathbb{P}^4 .

Si $f = (f_0, \dots, f_n)$ es una curva racional parametrizada con $\deg(f_j) = d$ y $g_0, g_1 \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ son homogéneos de grado k , entonces, $f \circ (g_0, g_1)$ es otra parametrización de la misma curva racional, dada por polinomios de grado dk . Esto muestra que la noción obvia de grado de una curva racional como el grado de los polinomios en una parametrización no es correcta. Se define el *grado de una curva racional* como el menor grado de todas las posibles parametrizaciones de las curvas.

Nota 2.11. Una curva racional de grado 1 es una recta y una de grado 2 es una cuádrica.

Definición 2.12. Una *quintica* en \mathbb{P}^4 es una hipersuperficie genérica $V \subset \mathbb{P}^4$ de grado 5, es decir que queda determinada por un polinomio homogéneo de grado 5.

Nota 2.13. Se puede ver que toda hipersuperficie suave de grado $n + 1$ en \mathbb{P}^n es Calabi-Yau (definición en la Sección 4.3). En particular, toda quintica suave es Calabi-Yau.

Más adelante estaremos interesados en el espacio de todas las quinticas o, más específicamente, en las posibles deformaciones de una quintica dada. Como práctica en esa dirección veamos “cuántas quinticas” hay. Es fácil ver que los polinomios homogéneos de

grado d en k variables forman un espacio vectorial de dimensión $\binom{d+k-1}{k-1}$ y, por tanto, para $d = 5$ y $k = 5$ se tiene un espacio de dimensión 126. Sin embargo, esto no tiene en cuenta las posibles reparametrizaciones: si se considera la acción de GL_k (o sea la composición de los polinomios con k polinomios lineales independientes en k variables) la dimensión del espacio resultante es $\binom{d+k-1}{k-1} - k^2$. En particular, para las quinticas se tiene un espacio de $126 - 25 = 101$ parámetros. Esta deducción no es completamente formal, sin embargo el resultado es correcto.

Ahora pasamos a considerar una pregunta esencial para todo lo que sigue: ¿cuántas curvas racionales de grado d hay en una quintica V en \mathbb{P}^4 ?

Hagamos una primera estimación para ver si la pregunta tiene sentido. V está determinada por un polinomio homogéneo de grado 5, $F \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_4]$ y una curva racional de grado d lo está por una parametrización $f = (f_0, \dots, f_4)$ con $f_j \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ homogéneos de grado d . Ahora bien, cada f_j involucra $d + 1$ coeficientes, es decir que hay una familia $5(d + 1)$ -dimensional de curvas racionales parametrizadas de grado d . La condición de que una curva esté contenida en V es que $F \circ f = 0$, lo cual expresa una ecuación en las variables z_0, z_1 que debe anularse idénticamente. Esto quiere decir que los coeficientes de este polinomio de grado $5d$ deben anularse. Estos $5d + 1$ coeficientes son, a su vez, polinomios en los coeficientes de las f_j . Todo junto, los $5(d + 1)$ coeficientes de las f_j deben satisfacer $5d + 1$ condiciones, lo cual hace esperar (si F es suficientemente genérico) un espacio de $5(d + 1) - (5d + 1) = 4$ parámetros libres en la determinación de las curvas racionales de grado d . Sin embargo, hasta aquí hemos considerado una curva f parametrizada y, por tanto, aún debemos tomar en cuenta las posibles reparametrizaciones. Como ya vimos antes, las reparametrizaciones están dadas por los posibles pares de polinomios lineales en 2 variables, que forman un espacio de dimensión 4. Finalmente vemos que no se esperan parámetros continuos libres en el espacio de las curvas racionales de grado d en V y, por lo tanto, tiene sentido preguntar por cuantas hay. Este argumento motivó la siguiente conjetura al comienzo de los '80 [4].

Conjetura 2.14 (H. Clemens). Hay finitas curvas racionales de grado d en una quintica. Más aún, todas ellas son rígidas.

Está claro que el argumento heurístico presentado para motivar la conjetura de Clemens tiene muchos problemas para convertirse en una demostración. Entre otras cosas, hay que notar que como las curvas racionales parametrizadas no deben tener factores comunes, hay que compactificar el espacio de posibles curvas y esto da origen a exceso de intersección.

Hasta este momento la conjetura de Clemens está probada para $d \leq 9$. Algunos resultados se muestran en el Cuadro 1, donde n_d es el número de curvas de grado d .

d	n_d	referencia
1	2875	clásico, siglo XIX
2	609250	[12], 1985
3	317206375	[7], 1991

CUADRO 1. Algunos números de curvas racionales

¿Cómo se calcularon estos números? En general, el espacio de las curvas racionales de grado d no es compacto. Sin embargo, para $d = 1$ si lo es, y para $d = 2, 3$ admite una compactificación suave explícita. Para $d > 3$ no se sabe continuar con las mismas herramientas. Cabe acotar que S. Katz demuestra en [12] la conjetura de Clemens para $d \leq 7$, pero sólo puede calcular n_2 . Es con mucho esfuerzo que G. Ellingsrud y S. Strømme calculan n_3 en [7].

2.3. Aplicaciones estables. Motivadas por ideas de la física, las aplicaciones estables (*stable maps*, en inglés) proveen una manera de compactificar los distintos espacios de curvas racionales de manera “manejable”. A continuación daremos una definición ad-hoc de aplicación estable, que puede ser mejorada y extendida usando herramientas más sofisticadas.

Definición 2.15. Un *árbol de \mathbb{P}^1 s* es una curva cuyas componentes son \mathbb{P}^1 s con, a lo sumo, puntos dobles como singularidades y con género aritmético 0. En otras palabras, es una unión de finitas curvas isomorfas a \mathbb{P}^1 , cuyas intersecciones son finitas y sin ningún lazo cerrado. La Figura 3 ejemplifica esta situación.

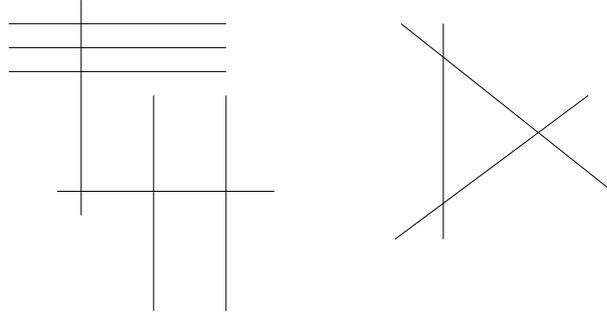


FIGURA 3. Árbol de \mathbb{P}^1 s: la figura de la izquierda es un árbol con 7 componentes, mientras que la de la derecha no lo es por contener lazos no triviales. Las rectas representan los distintos \mathbb{P}^1

Definición 2.16. Sea $C = \cup_{j=1}^k C_j$ un árbol de \mathbb{P}^1 s. Un *morfismo de árbol* es una aplicación $f : C \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $f \circ \psi_j^{-1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ ($\psi_j : C_j \rightarrow \mathbb{P}^1$ una parametrización) es una curva racional o es constante. El *grado de f* es

$$\deg(f) := \sum_{j=1}^k \deg(f \circ \psi_j^{-1}).$$

Ejemplo 2.17. Una curva racional parametrizada $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ de grado d es un morfismo del árbol \mathbb{P}^1 , de grado d .

Ejemplo 2.18. $f(z_0, z_1) := (z_0^2, z_1^2, 0)$ es un morfismo de grado 2 del árbol \mathbb{P}^1 en \mathbb{P}^2 . Este morfismo es un revestimiento doble de \mathbb{P}^1 , su imagen, con puntos de ramificación $(1 : 0 : 0)$ y $(0 : 1 : 0)$.

La idea es que el conjunto de morfismos de árboles debiera servir de compactificación de las curvas racionales. Sin embargo, es un conjunto demasiado grande y con patologías topológicas. La solución es quedarse sólo con algunos morfismos.

Definición 2.19. Un morfismo de árbol $f : C \rightarrow \mathbb{P}^n$ es *estable* si toda vez que $f|_{C_j}$ es constante, entonces C_j tiene, al menos, 3 puntos dobles (nodos).

Definición 2.20. Dados dos morfismos estables de árboles $f : C \rightarrow \mathbb{P}^n$ y $f' : C' \rightarrow \mathbb{P}^n$, un *morfismo $f \rightarrow f'$* es una aplicación $g : C \rightarrow C'$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n \\ g \downarrow & \nearrow f' & \\ C' & & \end{array}$$

conmuta y que $\psi_j \circ g \circ \psi_k^{-1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ es una curva racional parametrizada cuando $g(C_k) \subset C'_j$. Un *isomorfismo* es lo obvio.

Ejemplo 2.21. Si g_0 y g_1 son dos polinomios lineales homogéneos, entonces (g_0, g_1) define un isomorfismo de cualquier morfismo de árbol $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$.

Definición 2.22. El *espacio de moduli de aplicaciones estables de grado d y género 0 a \mathbb{P}^n* , $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^n, d)$, es el conjunto de todas las clases de isomorfismo de aplicaciones estables de grado d . En lo que sigue vamos a abreviar $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^n, d)$ con $\overline{M}(\mathbb{P}^n, d)$.

Nota 2.23. Debido a los Ejemplos 2.17 y 2.21 las curvas racionales de grado d están contenidas en $\overline{M}(\mathbb{P}^n, d)$.

2.4. El programa de la geometría enumerativa. Este es un buen momento que el lector repase algunas nociones de topología algebraica. Un mínimo recorrido de algunas ideas relevantes aparece en el Apéndice 4.2.

Presentamos a continuación una serie de pasos (“programa”) para analizar problemas de geometría enumerativa. Por supuesto, esto debe ser tomado a nivel filosófico.

1. Hallar un espacio \overline{M} que compactifique el espacio M de todas las configuraciones geométricas bajo estudio. Por ejemplo, las cónicas o las curvas racionales de grado d .
2. Hallar $k := \dim \overline{M}$ subvariedades de \overline{M} , Z_1, \dots, Z_k que parametrizen las condiciones impuestas a las configuraciones geométricas. Por ejemplo, que pasen por un punto, o que estén contenidas en una cierta subvariedad.
3. Calcular $H^*(\overline{M}, \mathbb{Z})$ y $[Z_1], \dots, [Z_k] \in H^*(\overline{M}, \mathbb{Z})$.
4. Hallar el “número de soluciones” mediante la evaluación de $\int_{\overline{M}} [Z_1] \cdots [Z_k] \in \mathbb{Z}$, eventualmente tomando en cuenta el exceso de intersección.

2.5. Exceso de intersección. Ahora volvemos sobre el exceso de intersección para entender el aporte combinatorio de una familia con infinitas configuraciones. Comencemos tratando de aplicar el Teorema de Bézout a $I := C_1 \cap C_2$ con $C_1 := Z(z_0 z_1)$ y $C_2 := Z(z_0 z_2)$ en \mathbb{P}^2 . En principio, la dimensión esperada para I es 0 ya que se intersecan dos hipersuperficies en un espacio de dimensión 2. Sin embargo, $I = \{(1 : 0 : 0)\} \cup \{(z_0 = 0)\}$, vale decir, I tiene una componente W isomorfa a \mathbb{P}^1 . Por otro lado, si calculamos

$$\int_{\mathbb{P}^2} [C_1] \cdot [C_2] = \int_{\mathbb{P}^2} 2[H] \cdot 2[H] = 4 \int_{\mathbb{P}^2} [H]^2 = 4.$$

¿Cuál es el significado de este resultado? Por supuesto, esperamos que 1 de esas 4 unidades sea $(1 : 0 : 0)$, contado con multiplicidad 1. Por ende, W tiene que dar cuenta de las otras 3 unidades. Para entender este comportamiento aplicaremos una técnica muy común: deformemos C_1 y C_2 a ver que ocurre ya que, de algún modo, I corresponde a una situación degenerada.

Definimos

$$Q_j(t) := z_0 z_j + t P_j(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}(t)[z_0, z_1, z_2], \quad \text{con } P_j(1, 0, 0) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2,$$

donde $P_j \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ son polinomios homogéneos (genéricos) de grado 2. Entonces miramos $C_j(t) := Z(Q_j(t))$ e $I(t) := C_1(t) \cap C_2(t)$. Claramente, $I(0) = I$, mientras que si $t \neq 0$ y los P_j son genéricos, $I(t)$ consiste de $(1 : 0 : 0)$ y tres puntos adicionales. A medida que $t \rightarrow 0$, los 3 puntos adicionales se mueven hacia $(z_0 = 0)$. Distintas elecciones de los P_j llevan a distintas ternas de puntos, pero en todos los casos se obtienen tres puntos que, en el límite, viven en la componente W de I . Esto explica el número 3 asociado a W .

Hay un método de cálculo moderno que permite hallar este exceso de una manera más directa, también basado en la idea de deformaciones. No veremos como aparece sino que

daremos el resultado. Si $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^n$ es un fibrado complejo de rango n y s es una sección de \mathcal{E} se considera $I := Z(s)$. Notar que la dimensión esperada de I es 0 ya que, localmente, s es una n -upla de funciones e I es la intersección de los ceros de cada una de ellas, en un abierto de \mathbb{P}^n . Si W es una componente de I de dimensión r , entonces W aporta al exceso de intersección

$$\int_W c(\mathcal{E}|_W/\mathcal{N}_{W/\mathbb{P}^n}), \quad (2.1)$$

con $\mathcal{N}_{W/\mathbb{P}^n} := T\mathbb{P}^n|_W/TW$, el fibrado normal de W en \mathbb{P}^n . Notar que en (2.1) solo c_r puede contribuir a la integral por cuestiones de dimensión.

Ejemplo 2.24. Veamos como se usa la técnica descrita en el caso del ejemplo del comienzo de esta Sección. Para comenzar, notemos que z_0z_1 y z_0z_2 , siendo polinomios homogéneos de grado dos, son secciones del fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$, de modo que, juntas, definen una sección s del fibrado $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$. Ahora tomemos $W := (z_0 = 0)$, la componente isomorfa a \mathbb{P}^1 de I .

Calculemos algunas clases de Chern. Si $i : \mathbb{P}^1 \simeq W \rightarrow \mathbb{P}^2$ es la inclusión,

$$c(\mathcal{N}_{W/\mathbb{P}^2}) = \frac{c(T\mathbb{P}^2|_W)}{c(TW)} = \frac{i^*(c(T\mathbb{P}^2))}{c(T\mathbb{P}^1)} = \frac{i^*(1 + H_2)^3}{(1 + H)^2} = \frac{(1 + H)^3}{(1 + H)^2} = 1 + H \in H^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$$

donde hemos denotado por H_2 a la sección hiperplana de \mathbb{P}^2 y por H la de \mathbb{P}^1 .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} c(\mathcal{E}|_W) &= i^*c(\mathcal{E}) = i^*c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) = i^*c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))^2 = i^*(1 + 2H_2)^2 \\ &= (1 + 2H)^2 = 1 + 4H \in H^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Finalmente, la contribución de W es

$$\begin{aligned} \int_W c(\mathcal{E}|_W/\mathcal{N}_{W/\mathbb{P}^2}) &= \int_W \frac{c(\mathcal{E}|_W)}{c(\mathcal{N}_{W/\mathbb{P}^2})} = \int_{\mathbb{P}^1} \frac{1 + 4H}{1 + H} = \int_{\mathbb{P}^1} (1 + 4H)(1 - H) \\ &= \int_{\mathbb{P}^1} (1 + 3H) = \int_{\mathbb{P}^1} 3H = 3. \end{aligned}$$

2.6. Curvas racionales en la quintica. Intentaremos aplicar el programa descrito en la Sección 2.4 a este problema enumerativo. Para ello, comenzamos por compactificar el espacio de curvas racionales de grado d con el moduli de aplicaciones estables $\overline{M}(\mathbb{P}^4, d)$. Luego representaremos la condición de que una aplicación estable esté en la quintica V mediante un subconjunto $Z \subset \overline{M}(\mathbb{P}^4, d)$. Este conjunto lo determinaremos mediante un fibrado vectorial \mathcal{E} de rango $r := \dim \overline{M}(\mathbb{P}^4, d) = 5d + 1$, con una sección s de modo que $Z := Z(s)$ y, por lo tanto, $[Z] = c_r(\mathcal{E})$ (ver Sección 2.2).

En este caso, tenemos que el número de curvas racionales de grado d en la quintica, quizás incluyendo exceso de intersección, es

$$N_d := \int_{\overline{M}(\mathbb{P}^4, d)} [Z] = \int_{\overline{M}(\mathbb{P}^4, d)} c_r(\mathcal{E}). \quad (2.2)$$

Completamos la descripción dando \mathcal{E} y s . Definiremos \mathcal{E} fibra a fibra. Si $f \in \overline{M}(\mathbb{P}^4, d)$, entonces tomamos

$$\mathcal{E}_f := H^0(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)).$$

Notamos que, si f es una curva racional de grado d ,

$$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5d)$$

y por lo tanto

$$\dim H^0(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)) = \dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5d)) = 5d + 1$$

como se buscaba.

Finalmente, se define la sección s por

$$s(f) := F \circ f \in H^0(f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5)),$$

dónde F es un polinomio que define a V . Entonces vale que

$$f \in Z(s) \Leftrightarrow s(f) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset (F = 0) = V.$$

Lamentablemente todo lo expresado más arriba es una idea de un camino a seguir pero que tiene muchos inconvenientes. Entre otros

- El espacio $\overline{M}(\mathbb{P}^4, d)$ no es una variedad suave sino un orbifold (vale decir, un espacio que, localmente, es una variedad suave, cocientada por la acción de un grupo finito) con grupos locales $\text{Aut}(f)$.
- Del mismo modo, \mathcal{E} es un fibrado de orbifold.
- $[Z(s)] \subset H^*(\overline{M}(\mathbb{P}^4, d), \mathbb{Q})$. Esto es así ya que cuando se trabaja con orbifolds, usualmente se introducen regularizaciones locales (dónde los coeficientes son enteros), pero hay cosas repetidas a nivel del orbifold, lo que fuerza a dividir por la cantidad de repeticiones para compensar, y esto lleva a tener que considerar operaciones sobre \mathbb{Q} en vez de \mathbb{Z} .
- Hay exceso de intersección: si $L \subset V$ es una recta (hay 2875 de ellas) el espacio de revestimientos de grado d de L tiene dimensión positiva si $d > 1$. Estos revestimientos están en $Z(s)$ y, por tanto, $Z(s)$ tiene dimensión positiva y hay que calcular su contribución.

A pesar de estos (y otros) inconvenientes, este programa se puede llevar a cabo. Esto implicó que:

- Se adaptaron las teorías discutidas al contexto de orbifolds. Básicamente, en cohomología sobre \mathbb{Q} , un orbifold se comporta como una variedad suave.
- Se calculó el exceso de intersección de los revestimientos de grado k de las curvas racionales suaves (rígidas) de grado $\frac{d}{k}$ y resultó ser $\frac{1}{k^3}$.

Por tanto, si la *Conjetura de Clemens* fuese válida, los números de curvas racionales de grado k en V estarían bien definidos y valdría

$$N_d = \sum_{k|d} \frac{1}{k^3} n_{\frac{d}{k}} = \frac{1}{d^3} \sum_{m|d} m^3 n_m. \quad (2.3)$$

Sin embargo, como no se conoce la validez de la Conjetura para $d > 9$, se procede al revés y se toma (2.2) como una definición de ciertos números que, a su vez, mediante (2.3), son usados para definir los números n_d , los llamados *números de instantones*. De este modo, los números n_d quedan (razonablemente) bien definidos, pero deja de ser claro cual es su significado enumerativo.

Una manera de codificar todos los números N_d es usando la *función generatriz*:

$$F_0(q) := 5 + \sum_{j=1}^{\infty} d^3 N_d q^d. \quad (2.4)$$

La relevancia de (2.4) es que usando la “simetría espejo” se propuso una fórmula efectiva para $F_0(q)$ que permite el cálculo de los N_d y, por tanto, de los n_k .

En 1996 A. Givental [8] e, independientemente, B. Lian, K. Liu y S.-T. Yau [17] demuestran resultados más generales que implican la validez de la fórmula mencionada.

Nota 2.25. Es importante notar que, aún si se demostrase la Conjetura de Clemens, no es automático que los números de instantones realmente sean las cantidades de curvas racionales correspondientes. Esto es así debido a que el cálculo del exceso $\frac{1}{k^3}$ es correcto

para el caso de revestimientos de curvas suaves. Sin embargo, hay curvas racionales de grado 5 en V que tienen puntos dobles, y este es el menor grado para el que esto ocurre. Esto lleva a que en el cálculo de las curvas de grado 10 haya que considerar las contribuciones de los revestimientos dobles de las curvas singulares de grado 5, como hizo notar R. Pandharipande, que no es $\frac{1}{2^3}$.

3. SIMETRÍA ESPEJO

En esta Sección veremos como las ideas propuestas por la física pueden ser usadas para sugerir el número de curvas racionales de cualquier grado contenidas en una quintica. Para más detalles, consultar los dos primeros capítulos de [6].

3.1. “Física”. En las teorías físicas llamadas de *super cuerdas* se estudian “espacios” X en los cuales se desplazan las “cuerdas” (objetos unidimensionales, a diferencia de los “puntos” de las teorías clásicas) o “branas” (objetos de dimensión mayor). Una visión simplificada es pensar que $X = M_{1,3} \times Y$, donde $M_{1,3}$ es el espacio-tiempo de Minkowski usual e Y es una variedad “pequeña” y que, por lo tanto, no es percibida en la vida “cotidiana”. Actualmente el interés está en variedades con $\dim_{\mathbb{R}} X = 10$, con lo que $\dim_{\mathbb{R}} Y = 6$. Más aún, las condiciones físicas de interés indican que Y es

- compacta y
- con una métrica con holonomía (contenida en) $SU(3)$.

De aquí que Y es una variedad Kähler y con una 3-forma holomorfa nunca nula, o sea que es Calabi-Yau, pues su fibrado canónico ($\Lambda^3 T^*Y$) es trivial. Ver Sección 4.3.

Dada una cierta geometría (variedad, métrica, etc.) se construye una teoría física. La “teoría física” no es única (por ejemplo, cuerdas de tipo I, tipos IIA y IIB, heterótica) y a partir de estas teorías es posible recuperar alguna información sobre la geometría subyacente. En muchos casos este paso *no es biunívoco* y distintas geometrías producen una misma teoría física o teorías físicas equivalentes.

En particular, existe una identificación conocida como *dualidad T* que hace que ciertos pares de configuraciones tengan teorías equivalentes. Un ejemplo de esto identifica la teoría IIA en un toro con radios $(r_1, \dots, r_k, \dots, r_d)$ con la teoría IIB en un toro de radios $(\frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_k}, r_{k+1}, \dots, r_d)$ si k es impar (y las teorías IIA entre sí si k es par).

En general, dos variedades formen un *par espejo* si ambas dan origen a teorías equivalentes. Esto es un hecho físico antes que matemático. Los datos geométricos son, en este sentido, una primera aproximación al espacio de “parámetros físicos”, que no son bien entendidos aún.

En el caso de interés de la simetría espejo el espacio de parámetros es, aproximadamente, el conjunto de los pares (V, ω) donde V es una variedad Calabi-Yau con $\dim_{\mathbb{C}} V = 3$ y $\omega = B + iJ$ una clase de Kähler complexificada, es decir que $B \in H^2(V, \mathbb{R})$ y J es una clase de Kähler en el sentido usual. Intuitivamente el espacio de parámetros está foliado por $V = \text{constante}$ (con clase de Kähler variable) y $\omega = \text{constante}$ (con estructura compleja variable).

En este contexto, se construyen dos teorías físicas llamadas *modelos A y B*. Para cada (V, ω) los espacios $H^q(V, \Lambda^p T_V)$ y $H^q(V, \Omega_V^p)$ corresponden a autoespacios de ciertos operadores de la teoría física.

La ambigüedad en el paso de la geometría a la física lleva a buscar pares (V, ω) y (V^0, ω^0) que correspondan a teorías físicas equivalentes. De este modo, las magnitudes calculables por las teorías físicas correspondientes han de ser iguales y esto permite relacionar información de (V, ω) con la de (V^0, ω^0) . En el caso de la simetría espejo hay un signo de diferencia en la definición de los operadores físicos mencionados en el párrafo

anterior, lo que lleva a que el modelo A en (V, ω) se corresponda con el modelo B en (V^0, ω^0) . En términos de los autoespacios mencionados:

$$\begin{aligned} H^q(V, \Lambda^p T_V) &\longleftrightarrow H^q(V^0, \Omega_{V^0}^p) \\ H^q(V, \Omega_V^p) &\longleftrightarrow H^q(V^0, \Lambda^p T_{V^0}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

o, dado que las variedades son Calabi-Yau, eligiendo una 3-forma holomorfa no nula se tiene el isomorfismo $T_V \simeq \Omega_V^{3-1}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} H^q(V, \Omega_V^{3-p}) &\longleftrightarrow H^q(V^0, \Omega_{V^0}^p) \\ H^q(V, \Omega_V^p) &\longleftrightarrow H^q(V^0, \Omega^{3-p} T_{V^0}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las dimensiones de los grupos de cohomología de V usualmente se muestran en el *diamante de Hodge*:

$$\begin{array}{cccc} & & & h^{3,3} \\ & & & \\ & & h^{3,2} & h^{2,3} \\ & h^{3,1} & h^{2,2} & h^{1,3} \\ h^{3,0} & h^{2,1} & h^{1,2} & h^{0,3} \\ & h^{2,0} & h^{1,1} & h^{0,2} \\ & h^{1,0} & h^{0,1} & \\ & & h^{0,0} & \end{array} \quad (3.3)$$

donde $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}}(H^q(V, \Omega_V^p))$ son los *números de Hodge* de V .

En particular, para una variedad V con grupo de holonomía (exactamente) $SU(3)$ y tomando en cuenta las simetrías generales del diamante de Hodge se tiene un diamante de la forma:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & 0 & h_V^{1,1} & 0 \\ 1 & h_V^{2,1} & h_V^{2,1} & 1 \\ & 0 & h_V^{1,1} & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & & 1 & \end{array} \quad (3.4)$$

y, en principio, uno similar para la variedad espejo V^0 . Sin embargo, si tenemos en cuenta las correspondencia (3.2), vemos que

$$h_V^{1,1} = h_{V^0}^{2,1} \quad \text{y} \quad h_V^{2,1} = h_{V^0}^{1,1}, \quad (3.5)$$

con lo que el diamante de V^0 se convierte en

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & 0 & & h_V^{2,1} & 0 \\
 & & & 1 & h_V^{1,1} & & h_V^{1,1} & 1 \\
 & & & 0 & & h_V^{2,1} & 0 \\
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & & & & 1
 \end{array} \tag{3.6}$$

Concluimos que los diamantes de Hodge de V y V^0 se corresponden entre sí a través de una reflexión en un espejo cruzado a 45 grados. Este es, de hecho, el origen del nombre “simetría espejo”.

Esta correspondencia de los números de Hodge de los pares espejo fue la primera predicción matemáticamente verificable de los argumentos físicos. Rápidamente se compilaron listas de variedades Calabi-Yau de dimensión 3 (por ejemplo se estudiaron todas las hipersuperficies en espacios proyectivos ponderados) y se buscaron pares de variedades donde valiese (3.5). Sorprendentemente se halló una buena cantidad de pares con esta propiedad, aunque no todas las variedades de la lista encontraron su “par” [16].

Ahora bien, la simetría espejo indica que, además, los espacios de parámetros alrededor de (V, ω) y (V^0, ω^0) debieran ser isomorfos aunque, debido al cambio de signo mencionado antes, los roles de las foliaciones $V = \text{constante}$ y $\omega = \text{constante}$ quedan intercambiados. En otras palabras, manteniendo V y ω^0 fijos, las variaciones en ω debieran corresponderse con las variaciones en V^0 . Esta relación entre el moduli de estructuras de Kähler complexificadas (ω) de V y el moduli de estructuras complejas (V^0) compatibles con ω^0 resultó totalmente inesperada y sorprendente. En términos cohomológicos, se trata de un isomorfismo (local, alrededor de ciertos puntos con “degeneración máxima”)

$$M_K(V) \xrightarrow[\text{aplicación espejo}]{\cong} M_{\mathbb{C}}(V^0) , \tag{3.7}$$

donde $M_K(V)$ denota al moduli de estructuras Kähler (complexificadas) sobre V y $M_{\mathbb{C}}(V^0)$ al moduli de estructuras complejas sobre V^0 . Tomando diferenciales, la aplicación espejo da un isomorfismo entre los respectivos espacios tangentes:

$$H^1(V, \Omega_V^1) \xrightarrow[\text{aplicación espejo}]{\text{diferencial } \cong} H^1(V^0, \Omega_{V^0}^2) .$$

Por otro lado, la teoría física “define” ciertas funciones llamadas *funciones de tres puntos* para cada juego de parámetros (V, ω) . Si (V, ω) y (V^0, ω^0) son un par espejo, la función de tres puntos del modelo A de (V, ω) debiera coincidir con la del modelo B de (V^0, ω^0) (y viceversa). Esta igualdad permite relacionar información sobre (V, ω) y (V^0, ω^0) y es la clave para el cálculo de los números de curvas racionales en la quíntica que mencionamos en la Sección 2.6. Del cálculo de ciertas integrales funcionales se obtienen las siguientes expresiones para las funciones de tres puntos de los modelos A y B con parámetros (V, ω) .

- Modelo A , con $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^1(V, \Omega_V^1)$:

$$\langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle = \int_V \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + \sum_{\beta \in H_2(V, \mathbb{Z}) - \{0\}} n_\beta \int_\beta \omega_1 \int_\beta \omega_2 \int_\beta \omega_3 \frac{e^{2\pi i \int_\beta \omega}}{1 - e^{2\pi i \int_\beta \omega}} \quad (3.8)$$

donde los n_β son ciertos “número de instantones” que, en principio, debieran coincidir con números de curvas racionales en V .

- Modelo B , con $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in H^1(V, \Omega_V^2)$:

$$\langle \theta_1, \theta_2, \theta_3 \rangle = \int_V \Omega \wedge (\nabla_{\theta_1} \nabla_{\theta_2} \nabla_{\theta_3} \Omega) \quad (3.9)$$

donde Ω es una 3-forma holomorfa no nula en V (convenientemente normalizada) y ∇ es una cierta conexión (la *conexión de Gauss-Manin*), canónicamente definida sobre el espacio de estructuras complejas de V .

Entonces, usando la aplicación espejo para identificar $H^1(V, \Omega_V^1)$ con $H^1(V^0, \Omega_{V^0}^2)$ (es decir, los ω_j en V con los θ_j en V^0), la igualdad de las funciones de tres puntos del modelo A de V con la del modelo B de V^0 es

$$\langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle_{(V, \omega)} = \langle \theta_1, \theta_2, \theta_3 \rangle_{(V^0, \omega^0)}. \quad (3.10)$$

En resumen, si bien la teoría física no está formulada correctamente desde el punto de vista matemático, es posible hacer una serie de predicciones a partir de la misma de modo que estas predicciones puedan ser probadas o refutadas matemáticamente. Hemos listado predicciones de tres tipos diferentes

- numéricas: las dimensiones de ciertos grupos de cohomología de las variedades espejo han de coincidir (3.5),
- isomorfismo (local) de espacios: los espacios de moduli de variedades espejo han de ser localmente isomorfos (3.7) y
- igualdad de funciones: las funciones de 3 puntos de los modelos A y B para pares espejo coinciden (3.10).

En lo que sigue usaremos estas predicciones para motivar el cálculo de curvas racionales en la quintica.

3.2. El modelo A en la quintica. Para el caso en que V es la quintica, $H^1(V, \Omega_V^1)$ es generado por $[H]$, la clase de la sección hiperplana y, por lo tanto, el único valor de interés de la función de tres puntos en este caso es $\langle [H], [H], [H] \rangle$. Por otro lado, $H_2(V, \mathbb{Z})$ está generado por la clase de cualquier recta L y por lo tanto (3.8) da:

$$\langle [H], [H], [H] \rangle = \int_V [H]^3 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \left(\int_{dL} [H] \right)^3 \frac{q^d}{1 - q^d}$$

donde hemos usado la notación $q := e^{2\pi i \int_L \omega}$, para la clase de Kähler complexificada ω . Además, la suma sobre $H_2(V, \mathbb{Z})$ se convirtió en una suma sobre los múltiplos positivos de L ya que los números de instantones se anulan para $d < 0$. Continuando se tiene

$$\begin{aligned} \langle [H], [H], [H] \rangle &= 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{q^d}{1 - q^d} = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \sum_{k=1}^{\infty} q^{kd} \\ &= 5 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{d|r} n_d d^3 \right) q^r = 5 + \sum_{r=1}^{\infty} r^3 N_r q^r = F_0(q) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde hemos usado (2.3) para escribir N_r en términos de n_d y la última igualdad es la definición de la función generatriz F_0 en (2.4).

3.3. El espejo de la quintica. Es conocido que $h_V^{1,1} = 1$ (usar el Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz) y, en la Sección 2.2 indicamos que $h_V^{2,1} = 101$. Por lo tanto, la variedad espejo de V , V^0 , supuesto que exista, debe tener números de Hodge $h_{V^0}^{1,1} = 101$ y $h_{V^0}^{2,1} = 1$. Aquí vale la pena observar que, si bien nos referimos a V^0 como “la variedad espejo”, desde el punto de vista complejo no esperamos *una* variedad sino una familia de variedades ya que en este lado del espejo lo que permanece constante es ω^0 y no V^0 . Más aún, $h_{V^0}^{2,1} = 1$ indica que V^0 es una familia de estructuras complejas con un parámetro.

La primera construcción de V^0 , motivada por la física, se debe a B. Greene y R. Plesser y la describimos a continuación.

Sea $G = \{a = (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{Z}_5^5 : \sum a_j \equiv 0\} / \mathbb{Z}_5$, donde el cociente es respecto del \mathbb{Z}_5 diagonal. Si $\mu := e^{2\pi i/5}$, G actúa sobre \mathbb{P}^4 como $a \cdot (z_0 : \dots : z_4) := (\mu^{a_0} z_0 : \dots : \mu^{a_4} z_4)$. La existencia de puntos fijos para esta acción implica que \mathbb{P}^4/G es singular.

Se definen hipersuperficies $X_\psi := (z_0^5 + \dots + z_4^5 + \psi z_0 \dots z_4 = 0) \subset \mathbb{P}^4$. Como la acción de G en \mathbb{P}^4 preserva las X_ψ , las hipersuperficies descienden a \mathbb{P}^4/G , donde definen hipersuperficies Y_ψ . Las Y_ψ son singulares y se puede ver que para $\psi \neq -5\mu^j$ ($j = 0, \dots, 4$) resultan orbifolds.

La resolución de las singularidades de Y_ψ existe y es llamada V_ψ^0 . Esta (familia de variedades) es *el espejo de la quintica*.

Cabe acotar que la resolución de singularidades no arroja un único resultado. Sin embargo, el cálculo de los períodos de V_ψ^0 (que necesitaremos para las funciones de tres puntos) es independiente de la resolución elegida y, prácticamente, ocurre al nivel de X_ψ .

Para $\psi \neq 0, \infty, -5\mu^j$, X_ψ resulta suave e Y_ψ tiene sólo las singularidades adquiridas de \mathbb{P}^4/G .

La construcción descrita es la construcción original. Actualmente se conoce una construcción mucho más general debida a V. Batyrev que permite construir el simétrico de una variedad (bajo ciertas condiciones) usando geometría tórica.

Aún resta un detalle técnico. ψ no es un buen parámetro en el espacio de estructuras complejas ya que V_ψ^0 es isomorfo a $V_{\mu\psi}^0$ mediante $(z_0 : \dots : z_4) \mapsto (\mu^{-1}z_0 : \dots : z_4)$ (recordar que un auténtico parámetro en el espacio de moduli debiera corresponder a clases de isomorfismos de variedades, y por lo tanto no debiera distinguir entre variedades isomorfas). En cambio,

$$x := \psi^{-5}$$

resulta un parámetro en el espacio de moduli (el $-$ en el exponente es por conveniencia). En términos de x , el espacio de moduli de V^0 , denotado por $M_{\mathbb{C}}(V^0)$, es singular en $x = -5^{-5}, 0, \infty$. Veamos que ocurre en estos tres puntos singulares de $M_{\mathbb{C}}(V^0)$.

- $x = \infty$ ($\psi = 0$): V_∞^0 es la hipersuperficie de Fermat, que es suave en términos de ψ . Sin embargo, al pasar $\psi \mapsto x$ aparecen automorfismos no triviales y $x = 0$ resulta un punto de orbifold en $M_{\mathbb{C}}$.
- $x = 0$ ($\psi = \infty$): es (el cociente de) la unión de 5 hiperplanos que resulta ser “bien singular”.
- $x = -5^{-5}$ ($\psi = -5\mu^j$): hay un único punto singular en V_x^0 , que resulta ser un punto doble.

De la resolución de singularidades sale que V_x^0 es suave para todo otro valor de x . Es decir, $M_{\mathbb{C}}(V^0) = \mathbb{P}^1 - \{0, \infty, -5^{-5}\}$.

Examinemos ahora $M_K(V)$, el espacio de moduli de estructuras Kähler (complexificadas) en V . Una clase de Kähler complexificada es una clase $w \in H^2(V, \mathbb{C})$ cuya parte imaginaria es una clase de Kähler en V . El espacio de todas las clases de Kähler complexificadas forma un cono real que denotaremos por $K_{\mathbb{C}}(V)$. Para construir el espacio

de moduli hay que considerar la acción de automorfismos de V . Esto es algo bastante complicado por lo que se elije trabajar con el espacio de *moduli simplificado* definido por $K_{\mathbb{C}}(V)/H^2(V, \mathbb{Z})$, que igualmente llamaremos $M_K(V)$. Siendo V la quintica se puede identificar $H^2(V, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \cdot [H]$, de modo que $K_{\mathbb{C}}(V) = \{t[H] : t \in \mathbb{C} \text{ con } \text{Im} t > 0\}$. Para describir $M_K(V)$ notamos que si t es la coordenada de $K_{\mathbb{C}}(V)$ (el semiplano superior), $q := e^{2\pi it} = e^{2\pi i \int_L \omega}$ es una coordenada en $M_K(V)$, con lo que $M_K(V) \simeq \Delta^*$, el disco punteado. Notar que, con estas identificaciones, una clase de Kähler (volumen, radio) grande corresponde a q cercano a 0.

Como mencionamos en la Sección 3.1, $M_K(V) \simeq M_{\mathbb{C}}(V^0)$, al menos localmente cerca de algún punto del borde de dichos espacios. El punto de borde en cuestión tiene que corresponder a volumen muy grande (en $M_K(V)$) y a máxima degeneración (en $M_{\mathbb{C}}(V^0)$). Se puede demostrar que para la quintica y su espejo, las únicas posibilidades son $q = 0$ y $x = 0$ (sin embargo, para otras variedades puede haber múltiples posibilidades).

El párrafo anterior indicaría que una posibilidad para la aplicación espejo (que identifica $M_K(V)$ con $M_{\mathbb{C}}(V^0)$) es tomar $q = x$. Sin embargo esto es incorrecto ya que ¡hay que tomar en cuenta “correcciones cuánticas”!

3.4. La aplicación espejo. Vimos en la Sección 3.3 que $M_K(V)$ tiene una coordenada natural q , inducida por $H \in H^2(V, \mathbb{Z})$, la sección hiperplana. Si t recorre el semiplano superior, $q := e^{2\pi it}$ recorre el disco punteado y es la coordenada en $M_K(V)$.

¿Cuál es la coordenada “natural” a considerar en $M_{\mathbb{C}}(V^0)$ cerca de $x = 0$? Una idea podría ser tomar una $\Omega_x \in H^0(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^3)$ no nula y considerar funciones $x \mapsto \int_{\gamma} \Omega_x$ para distintos ciclos $\gamma \in H_3(V_x^0, \mathbb{Z})$ (notar que este grupo de homología es topológico y, por tanto, independiente de x). Esta idea tiene el problema de que la función puede no estar bien definida debido a que al considerar sus valores alrededor de un lazo no trivial alrededor de $x = 0$ su valor no sea el mismo que al comienzo. Este fenómeno es llamado *monodromía*. Sin embargo, por ser $x = 0$ un punto de degeneración máxima, se sabe [18] que existen ciclos $\gamma_0, \gamma_1 \in H_3(V_x^0, \mathbb{Z})$ con la propiedad de que

$$x \mapsto \int_{\gamma_0} \Omega_x$$

es invariante por la monodromía (por tanto define una función analítica aún en $x = 0$) y de que

$$\frac{\int_{\gamma_1} \Omega_x}{\int_{\gamma_0} \Omega_x} \mapsto \frac{\int_{\gamma_1} \Omega_x}{\int_{\gamma_0} \Omega_x} + 1$$

por la acción de la monodromía. Debido a esta última propiedad resulta que

$$x \mapsto e^{2\pi i \frac{\int_{\gamma_1} \Omega_x}{\int_{\gamma_0} \Omega_x}}$$

es univaluada y provee de una coordenada “natural” en un entorno de $x = 0$ en $M_{\mathbb{C}}(V^0)$.

Se propone que

$$q = e^{2\pi i \frac{\int_{\gamma_1} \Omega_x}{\int_{\gamma_0} \Omega_x}} \quad (3.12)$$

es la aplicación espejo.

Ahora bien, formalmente (3.12), da una relación entre q y x . Sin embargo, para poder hacer cálculos efectivos es necesario describir más concretamente la dependencia de x del lado derecho de (3.12). El cálculo no es directo, sino que pasa por estudiar los períodos de Ω a través de una cierta ecuación diferencial.

Dada una 3-forma holomorfa y no nula Ω_x en V_x^0 , se definen sus *períodos* como las integrales

$$y_j(x) := \int_{\gamma_j} \Omega_x \quad \text{para } j = 0, 1.$$

Para poder definir la aplicación espejo es necesario fijar una 3-forma holomorfa y no nula Ω_x en V_x^0 . Para esto se usa la teoría de residuos de P. Griffiths que, a partir de una forma meromorfa en el espacio ambiente \mathbb{P}^4/G induce una forma holomorfa sobre la hipersuperficie que es el divisor de la singularidad de la forma original. Esto da, por ejemplo:

$$\Omega_x := \text{Res}\left(\frac{\psi}{z_0^5 + \dots + z_4^5 + \psi z_0 \dots z_4} \left(\sum_{j=0}^4 (-1)^j z_j dz_0 \dots \widehat{dz_j} \dots dz_4\right)\right) \quad (3.13)$$

Estrictamente hablando, la forma Ω definida en (3.13) no está bien definida en términos de x sino en ψ (es multivaluada en x). Sin embargo, los períodos que se obtienen resultan ser funciones de x bien definidas, y esto es lo que realmente nos interesa aquí.

Se sabe que cualquier período $y(x) := \int_{\gamma} \Omega_x$ satisface la *ecuación de Picard-Fuchs*, cuya forma explícita depende de haber tomado (3.13):

$$0 = \left(x \frac{d}{dx}\right)^4 y + f_3(x) \left(x \frac{d}{dx}\right)^3 y + f_2(x) \left(x \frac{d}{dx}\right)^2 y + f_1(x) \left(x \frac{d}{dx}\right) y + f_0(x) y \quad (3.14)$$

con

$$f_3(x) := \frac{2 \cdot 5^5 x}{1 + 5^5 x} \quad f_2(x) := \frac{7 \cdot 5^4 x}{1 + 5^5 x} \quad f_1(x) := \frac{2 \cdot 5^4 x}{1 + 5^5 x} \quad f_0(x) := \frac{25 \cdot 5 x}{1 + 5^5 x}$$

que es una ecuación de Frobenius con un punto singular regular en $x = 0$. Se procede del modo usual (ver los textos clásicos de ecuaciones diferenciales ordinarias [11] o [5]), proponiendo una solución del tipo

$$y(x) = x^r \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad \text{con } a_0 \neq 0.$$

El polinomio indicial que se obtiene es r^4 y la relación de recurrencia es, para $j \geq 1$:

$$a_j = \frac{-1}{(j+r)^4} ((5^5(j-1+r))^4 + 2 \cdot 5^5(j-1+r)^3 + 7 \cdot 5^4(j-1+r)^2 + 2 \cdot 5^4(j-1+r) + 24 \cdot 5) a_{j-1}$$

La teoría indica que si, usando la recurrencia, se define

$$y(x, r) = x^r \sum_{j=0}^{\infty} a_j(r) x^j, \quad (3.15)$$

$\tilde{y}_0(x) := y(x, 0)$ es analítica en $x = 0$ y hay un espacio unidimensional de tales soluciones. Por tanto, $y_0(x) = b_0 \tilde{y}_0(x)$ para alguna constante b_0 .

Las otras soluciones, singulares, de (3.14) se obtienen derivando (3.15) respecto de r y evaluando en $r = 0$. En particular,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) &:= \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} y(x, r) = \log(x) \tilde{y}_0(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} a_j(r) \right) x^j \\ &= \log(x) \tilde{y}_0(x) + \psi(x) \end{aligned}$$

resulta ser solución de (3.14) y se puede ver que

$$y_1(x) = \frac{1}{2\pi i} (b_0 \tilde{y}_1(x) + b_1 \tilde{y}_0(x))$$

para alguna constante b_1 (el factor $2\pi i$ corrige la monodromía).

Usando la recurrencia se obtiene que

$$\tilde{y}_0(x) = 1 - 120x + \dots \quad \text{y} \quad \psi(x) = -770x + \dots$$

con lo que

$$\begin{aligned} q &= \exp\left(2\pi i \frac{y_1(x)}{y_0(x)}\right) = \exp\left(\frac{b_0 \tilde{y}_1(x) + b_1 \tilde{y}_0(x)}{b_0 \tilde{y}_0(x)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{b_1}{b_0}\right) \exp\left(\frac{\log(x) \tilde{y}_0(x) + \psi(x)}{\tilde{y}_0(x)}\right) = c_1 x \exp\left(\frac{\psi(x)}{\tilde{y}_0(x)}\right) \\ &= c_1 x (1 - 770x + \dots). \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde $c_1 := \exp\left(\frac{b_1}{b_0}\right)$ es una constante que determinaremos más adelante. Invirtiendo la serie (3.16), se obtiene la aplicación espejo $x(q)$:

$$x = \frac{q}{c_1} + 770 \left(\frac{q}{c_1}\right)^2 + \dots \tag{3.17}$$

3.5. El acoplamiento de Yukawa. Ahora vamos a calcular la función de tres puntos del modelo B para el espejo de la quintica V^0 , también conocido como el *acoplamiento de Yukawa* Y . Si x es la coordenada en $M_{\mathbb{C}}(V^0)$, $x \frac{d}{dx}$ es una base de $H^1(V^0, T_{V^0}) \simeq H^1(V_0, \Omega_{V_0}^2)$. En la coordenada x , la conexión de Gauss-Manin aplicada a una forma α_x es $\alpha'_x := x \frac{d\alpha}{dx}$. Entonces

$$Y(x) := \left\langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \right\rangle = \int_{V_x^0} \Omega_x \wedge \Omega_x''', \tag{3.18}$$

donde Ω es, por ejemplo, la definida en (3.13). Una vez más, el cálculo no será por un método directo sino a través del estudio de una ecuación diferencial y con el auxilio de la ecuación de Picard-Fuchs (3.14).

En principio, Ω_x es una 3-forma en V_x^0 y, por lo tanto, lo mismo se puede decir de Ω'_x . Sin embargo, una propiedad de la conexión de Gauss-Manin, llamada *transversalidad de Griffiths* permite refinar esta descripción. Para usar esta propiedad debemos recordar que toda forma diferencial en una variedad compleja puede ser escrita, localmente, como $\sum a_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. Esto permite definir los subespacios de formas que, localmente, son suma de productos de p veces dz_i con q veces $d\bar{z}_j$. Estos subespacios definen subespacios globales y descienden a la cohomología. La cohomología de Dolbeault de V_x^0 , $H^{p,q}(V_x^0)$ corresponde al operador $\bar{\partial}$ actuando sobre estos espacios y vale el isomorfismo $H^{p,q}(V_x^0) \simeq H^q(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^p)$. La transversalidad de Griffiths dice que si

$$\omega_x \in \bigoplus_{j=0}^k H^j(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^{3-j}) \simeq \bigoplus_{j=0}^k H^{3-j,j}(V_x^0)$$

entonces

$$x \frac{d}{dx} \omega_x \in \bigoplus_{j=0}^{k+1} H^j(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^{3-j}) \simeq \bigoplus_{j=0}^{k+1} H^{3-j,j}(V_x^0).$$

De aquí se deduce que, como $\Omega_x \in H^0(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^3) \simeq H^{3,0}(V_x^0)$, entonces

$$\Omega'_x \in H^0(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^3) \oplus H^1(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^2) \simeq H^{3,0}(V_x^0) \oplus H^{2,1}(V_x^0)$$

y

$$\begin{aligned}\Omega_x'' &\in H^0(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^3) \oplus H^1(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^2) \oplus H^2(V_x^0, \Omega_{V_x^0}^1) \\ &\simeq H^{3,0}(V_x^0) \oplus H^{2,1}(V_x^0) \oplus H^{1,2}(V_x^0).\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de Picard-Fuchs (3.14) a la forma Ω_x se obtiene

$$0 = \Omega_x'''' + f_3(x)\Omega_x''' + f_2(x)\Omega_x'' + f_1(x)\Omega_x' + f_0(x)\Omega_x. \quad (3.19)$$

Recordamos que $\int_{V_x^0} \alpha$ sólo depende de la componente de α en $H^{3,3}(V_x^0)$. Entonces multiplicando (3.19) por Ω_x e integrando sobre V_x^0 se obtiene, tomando en cuenta el tipo (p, q) de las distintas derivadas de Ω ,

$$0 = \int_{V_x^0} \Omega \wedge \Omega_x'''' + f_3(x) \int_{V_x^0} \Omega \wedge \Omega_x'''$$

Por otro lado, dado que $\int_{V_x^0} \Omega \wedge \Omega_x'' = 0$, tomando dos derivadas se obtiene

$$0 = \int_{V_x^0} \Omega \wedge \Omega_x'''' + 2 \int_{V_x^0} \Omega' \wedge \Omega_x'''$$

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned}Y'(x) &= \int_{V_x^0} \Omega' \wedge \Omega_x''' + \int_{V_x^0} \Omega \wedge \Omega_x'''' = \frac{1}{2} \int_{V_x^0} \Omega \wedge \Omega_x'''' \\ &= \frac{f_3(x)}{2} \int_{V_x^0} \Omega_x''' \wedge \Omega = -\frac{5^5 x}{1 + 5^5 x} Y(x).\end{aligned}$$

Vale decir, $Y(x)$ satisface una ecuación ordinaria de primer orden

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{5^5}{1 + 5^5 x} Y$$

que se resuelve inmediatamente para dar

$$Y(x) = \frac{c_2}{1 + 5^5 x},$$

para alguna constante de integración c_2 a ser determinada.

3.6. Normalización del acoplamiento de Yukawa. Notemos que la elección de una 3-forma holomorfa en V_x^0 , para x fijo es casi única, ya que todas difieren en una constante. Sin embargo, al variar x , la constante puede cambiar, vale decir que en verdad Ω_x está definida salvo una función multiplicativa de x . Esta ambigüedad puede ser eliminada si se impone alguna condición adicional sobre Ω_x . En nuestro caso impondremos que $\int_{\gamma_0} \Omega_x = 1$, donde γ_0 es el 3-ciclo introducido en la Sección 3.4. Si Ω_x es la forma definida en (3.13), entonces

$$\frac{\Omega_x}{\int_{\gamma_0} \Omega_x} = \frac{\Omega_x}{y_0(x)}$$

sigue siendo una 3-forma holomorfa y no nula pero que, además, satisface la normalización impuesta.

El acoplamiento de Yukawa normalizado, Y_N , puede ser calculado usando las mismas ideas (esencialmente transversalidad de Griffiths) usadas en la Sección 3.5:

$$\begin{aligned}Y_N(x) &:= \int_{V_x^0} \frac{\Omega_x}{y_0(x)} \wedge \left(\frac{\Omega_x}{y_0(x)} \right)''' = \int_{V_x^0} \frac{\Omega_x}{y_0(x)} \wedge \frac{\Omega_x'''}{y_0(x)} \\ &= \frac{1}{y_0^2(x)} Y(x) = \frac{c_2}{(1 + 5^5 x)y_0^2(x)}\end{aligned}$$

3.7. Conclusiones. En las Secciones anteriores hemos calculado las funciones de tres puntos para la quintica V y su espejo V^0 . También hemos encontrado la aplicación espejo. Ahora queremos aplicar esta información a la igualdad que se deriva de (3.10):

$$\langle H, H, H \rangle = \langle \theta, \theta, \theta \rangle \quad (3.20)$$

Para poder hacerlo, aún tenemos que identificar el valor de θ que, vía la aplicación espejo, corresponde a evaluar el lado izquierdo en la clase hiperplana H .

Para esto comenzamos por identificar $H^1(V, \Omega_V^1)$ con el espacio tangente al moduli de estructuras de Kähler complexificadas $M_K(V)$. Entonces $q \mapsto H$ define un campo tangente a $M_K(V)$. Si, como ya hicimos, identificamos $H^1(V, \Omega_V^1) = \{tH : t \in \mathbb{C}\}$ y $q := e^{2\pi it}$, el campo $q \mapsto H$ corresponde al campo

$$\frac{d}{dt} = 2\pi i q \frac{d}{dq}$$

Que esto es así se puede ver ya que tomando un punto t_0H , el campo $t_0 \mapsto H$ corresponde a la curva $t_0H + tH$, cuya derivada es H y el isomorfismo entre $H^{1,1}$ y \mathbb{C} es $t_0H \mapsto t_0$, con lo que la curva $t_0H + tH$ corresponde a la curva $t_0 + t$ que, a su vez, corresponde a $\frac{d}{dt}$.

Ahora, aplicando la derivada de la aplicación espejo tenemos que $\frac{d}{dq} \mapsto x_*\left(\frac{d}{dq}\right) = \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}$ con lo que, finalmente,

$$H = 2\pi i q \frac{d}{dq} \mapsto 2\pi i q \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx} =: \theta$$

El objetivo ahora es evaluar la función de tres puntos en θ :

$$\langle \theta, \theta, \theta \rangle = \left(2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq}\right)^3 \left\langle x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx}, x \frac{d}{dx} \right\rangle = \left(2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq}\right)^3 \frac{c_2}{(1 + 5^5 x) y_0^2(x)} \quad (3.21)$$

Separaremos esto en dos partes y, en cada una, apliquemos los desarrollos en serie ya calculados.

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{(1 + 5^5 x) y_0^2(x)} &= \frac{c_2}{(1 + 5^5 x) b_0^2 (1 - 120x + \dots)^2} \\ &= \frac{c_2}{(1 + 5^5 \frac{q}{c_1} + \dots) b_0^2 (1 - 120 \frac{q}{c_1} + \dots)^2} \\ &= \frac{c_2}{b_0^2 (1 + 5^5 \frac{q}{c_1} + \dots) (1 - 240 \frac{q}{c_1} + \dots)} \\ &= \frac{c_2}{b_0^2 (1 + 2885 \frac{q}{c_1} + \dots)} = \frac{c_2}{b_0^2} (1 - 2885 \frac{q}{c_1} + \dots) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left(2\pi i \frac{q}{x} \frac{dx}{dq}\right)^3 &= (2\pi i c_1 (1 - 770x + \dots) (\frac{1}{c_1} + 1540 \frac{q}{c_1^2} + \dots))^3 \\ &= (2\pi i c_1 (1 - 770 \frac{q}{c_1} + \dots) (\frac{1}{c_1} + 1540 \frac{q}{c_1^2} + \dots))^3 \\ &= (2\pi i)^3 (1 + 770 \frac{q}{c_1} + \dots)^3 = (2\pi i)^3 (1 + 2310 \frac{q}{c_1} + \dots) \end{aligned}$$

Con lo que, volviendo a (3.21), tenemos

$$\begin{aligned} \langle \theta, \theta, \theta \rangle &= \frac{(2\pi i)^3 c_2}{b_0^2} (1 + 2310 \frac{q}{c_1} + \dots) (1 - 2885 \frac{q}{c_1} + \dots) \\ &= \frac{(2\pi i)^3 c_2}{b_0^2} (1 - 575 \frac{q}{c_1} + \dots) \end{aligned}$$

Ahora bien, de acuerdo con (3.10) y (3.11), esta última expresión debe ser la función generatriz $F_0(q)$. Pero entonces, por (2.4) tenemos

$$\frac{(2\pi i)^3 c_2}{b_0^2} \left(1 - 575 \frac{q}{c_1} + \dots\right) = 5 + N_1 q + \dots \quad (3.22)$$

Para que esta identidad sea cierta es necesario que $\frac{(2\pi i)^3 c_2}{b_0^2} = 5$, con lo que (3.22) se reduce a

$$5 - 2875 \frac{q}{c_1} + \dots = 5 + N_1 q + \dots$$

De la relación (2.3) entre N_d y n_d y del valor de n_1 dado en el Cuadro 1 concluimos que $N_1 = 2875$, con lo que $c_1 = -1$.

En resumen, la igualdad entre las funciones de tres puntos para la quintica y su espejo (3.20) se convierte en

$$5 + 2875q + \dots = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} d^3 N_d q^d$$

y, teniendo en cuenta la relación (2.3) entre N_d y n_d vemos que calculando los términos de mayor orden en q de $\langle \theta, \theta, \theta \rangle$ se pueden calcular tantos números de instantones n_d como se deseen. Este método, implementado en MAPLE da los resultados que se muestran en el Cuadro 2.

d	n_d
1	2875
2	609250
3	317206375
4	242467530000
5	229305888887625
6	248249742118022000
7	295091050570845659250
8	375632160937476603550000
9	503840510416985243645106250
10	704288164978454686113488249750
11	1017913203569692432490203659468875
12	1512323901934139334751675234074638000
13	2299488568136266648325160104772265542625
14	3565959228158001564810294084668822024070250
15	5624656824668483274179483938371579753751395250

CUADRO 2. Algunos números de instantones

4. APÉNDICES

En lo que sigue mencionaremos algunos temas básicos que se suponen conocidos por los lectores pero que igualmente se incluyen para fijar la notación y para presentar algunos aspectos de manera apropiada para el uso que damos en las notas. En la Sección 4.1 se define el espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n y se mencionan varias de sus propiedades. En la Sección 4.2 visitamos muy brevemente algunas herramientas de la topología algebraica, incluyendo las clases de (co)homología asociadas a subvariedades, el producto en cohomología (en casos especialmente favorables), clases de Chern de fibrados vectoriales y algunas de sus propiedades. La definición de variedad Calabi-Yau es revisada en la Sección 4.3. Los

espacios proyectivos forman parte de la familia de las Grassmanianas, que son el conjunto de subespacios de dimensión fija de \mathbb{C}^r ; estas nociones son indicadas en la Sección 4.4. Por último, en la Sección 4.5, se calcula el número de rectas en una superficie de grado 3 en \mathbb{P}^3 . Estas ideas pueden usarse para resolver otros problemas enumerativos, incluyendo el número de rectas en la quintica en \mathbb{P}^4 .

4.1. Espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n . El espacio proyectivo complejo de dimensión n , \mathbb{P}^n , es el conjunto de subespacios de dimensión 1 en \mathbb{C}^{n+1} . Hay varias maneras de visualizar \mathbb{P}^n . Por un lado, todo vector $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ define una recta y, por tanto, un elemento de \mathbb{P}^n que denotamos por $(z_0 : \dots : z_n)$. Ahora, todo múltiplo escalar de (z_0, \dots, z_n) define la misma recta por el origen y es claro que toda recta por el origen proviene de esta construcción. En otras palabras, tenemos la biyección

$$\mathbb{P}^n \simeq (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*,$$

donde $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ actúa sobre $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ por multiplicación de escalares. Usando esta identificación es fácil ver qué debiera ser una *recta en \mathbb{P}^n* : es el subconjunto inducido por un subespacio de dimensión 2 en \mathbb{C}^{n+1} , y lo mismo para subconjuntos de dimensión mayor.

Otra manera de visualizar \mathbb{P}^n consiste en considerar ciertos subconjuntos. Sea

$$U_j := \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n : z_j \neq 0\}, \quad (4.1)$$

o sea, el conjunto de rectas que no están contenidas en el hiperplano $z_j = 0$ en \mathbb{C}^{n+1} . Entonces se definen aplicaciones

$$\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{como} \quad \phi_j(z_0 : \dots : z_n) := \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right).$$

Gráficamente, ϕ_j asigna a la recta $(z_0 : \dots : z_n)$ su intersección con el hiperplano afín $z_j = 1$, e identifica este hiperplano con \mathbb{C}^n . Ver Figura 4.

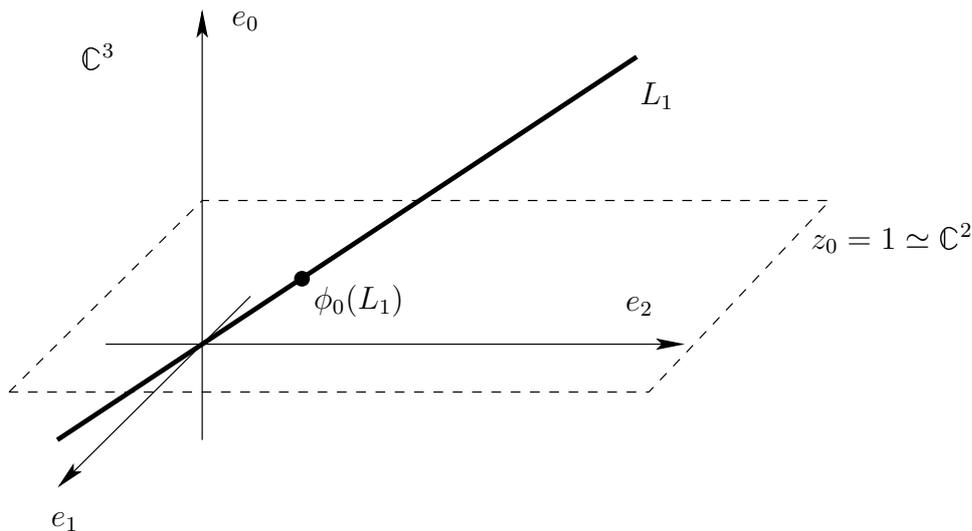


FIGURA 4. El parche coordenado (U_0, ϕ_0) en \mathbb{P}^2

El conjunto $\{(U_0, \phi_0), \dots, (U_n, \phi_n)\}$ define un atlas para una estructura de variedad compleja de dimensión n en \mathbb{P}^n . Construcciones análogas reemplazando \mathbb{C} con \mathbb{R} permiten obtener el *espacio proyectivo real*, $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

La 2-forma $-4i\partial\bar{\partial}(z_0\bar{z}_0 + \cdots + z_n\bar{z}_n)$ en \mathbb{C}^{n+1} define una 2-forma ω en \mathbb{P}^n , que define una estructura de Kähler en \mathbb{P}^n . Finalmente, también es posible dar a \mathbb{P}^n estructura de variedad algebraica suave (de tipo Fano).

Es fácil ver que $\mathbb{P}^n \simeq (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^* \simeq S^{2n+1}/S^1$, lo cual muestra que \mathbb{P}^n es una variedad compacta.

Cabe notar que si $f \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, entonces (si $\deg(f) > 0$), f no define una función en \mathbb{P}^n , ni su conjunto de ceros está bien definido en general. Sin embargo, si f es homogéneo, su conjunto de ceros define un subconjunto $Z(f) \subset \mathbb{P}^n$ que es llamado *hipersuperficie de grado d* . El teorema de la función implícita (en su versión holomorfa) permite ver que si para cada $z \in Z(f)$ alguna $\frac{\partial f}{\partial z_j}|_z \neq 0$, entonces $Z(f)$ es una subvariedad de \mathbb{P}^n con $\dim_{\mathbb{C}} Z(f) = n - 1$. Estas son llamadas *hipersuperficies suaves*, y los puntos de $Z(f)$ en donde todas las derivadas de f se anulan son llamados *puntos singulares* de $Z(f)$.

Los *morfismos* entre espacios proyectivos se obtienen con polinomios homogéneos del mismo grado: si $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_m]$ son homogéneos de grado d ,

$$F(z_0 : \dots : z_m) := (f_0(z_0, \dots, z_m) : \dots : f_n(z_0, \dots, z_m))$$

define un morfismo $F : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$. Por ejemplo, $F(z_0 : z_1) := (z_0^2, z_0z_1, z_1^2)$ es un morfismo de \mathbb{P}^1 en \mathbb{P}^2 .

La cohomología de \mathbb{P}^n es muy fácil de calcular a partir de una descomposición celular. El resultado es que

$$H^k(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 2j \text{ para } j = 0, 1, \dots, n \text{ y} \\ \{0\} & \text{en todo otro caso,} \end{cases}$$

o, mejor aún, $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[H]/\langle H^{n+1} \rangle$ como anillos. H representa la *clase hiperplana*, es decir que es una 2-forma que es dual de Poincaré de la subvariedad formada por un hiperplano en \mathbb{P}^n (ver 4.2). Se puede ver que H y ω coinciden en $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$.

4.2. Recuerdos de topología algebraica. En este apéndice mencionaremos brevemente algunas de las ideas y resultados de topología algebraica que son usados en las notas.

4.2.1. Homología y Cohomología. Si $Z \subset X$ es una subvariedad de dimensión $\dim_{\mathbb{R}}(Z) = k$ y con $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n$, entonces Z define clases de homología y cohomología que denotamos $[Z]$ en ambos casos. En el primer caso $[Z] \in H_k(X, \mathbb{Z})$ y en el segundo $[Z] \in H^{n-k}(X, \mathbb{Z})$. También define una clase en el anillo de Chow $A^*(X)$, pero no usaremos este objeto. Ambas clases $[Z]$ son duales de Poincaré, vale decir que si $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{n-k}(X, \mathbb{Z}) \times H_{n-k}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es el apareamiento dado por la evaluación de la cohomología en la homología, entonces,

$$\langle [Z], [Y] \rangle = \#(Z \cap Y) \quad (4.2)$$

para toda subvariedad $Y \subset X$ de dimensión $n - k$ y que interseca a Z transversalmente. Si $Z_t \subset X$ es una familia de subvariedades suficientemente genéricas, entonces $[Z_t]$ es constante en t . Esta última aseveración definitivamente requiere más detalles, para los cuales se recomienda al lector consultar la bibliografía.

Si X es conexa, como habitualmente se supone, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se usa para definir un isomorfismo $\int_X : H^n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ como $\int_X[\omega] := \langle \omega, X \rangle$. La notación es adecuada ya que cuando se trabaja con coeficientes reales y se identifica la cohomología con la cohomología de de Rham, \int_X se realiza como la integral de n -formas diferenciales.

La definición del producto de intersección en homología y cohomología es bastante compleja, debido a la necesidad de definir correctamente la noción de multiplicidad. Sin embargo, cuando Z_1 y Z_2 son subvariedades de X que se intersecan transversalmente se tiene $[Z_1] \cdot [Z_2] = [Z_1 \cap Z_2]$ en $H^*(X, \mathbb{Z})$.

En el caso $X = \mathbb{P}^n$, si H es un hiperplano, $[H] \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ (notar que en este caso $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$). De (4.2) y que \langle, \rangle es no degenerado se sigue que si H_1 y H_2 son hiperplanos en \mathbb{P}^n , entonces $[H_1] = [H_2]$ en $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$.

Si $Y \subset \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie de grado d definida por el polinomio F y L_j son formas lineales, la deformación $t \mapsto (t-1)F(z) - t \prod_{j=1}^d L_j(z)$, muestra que $[Y] = \sum_{j=1}^d [H_j] = d[H]$, donde H_j es el hiperplano definido por L_j . (Notar que de este modo, el grado de Y es interpretado como “su coordenada” en la cohomología.)

Finalmente, si Y_1, \dots, Y_n son hipersuperficies de grados d_1, \dots, d_n que se intersecan transversalmente:

$$\begin{aligned} \#(\cap_{j=1}^n Y_j) &= \int_{\mathbb{P}^n} [\cap_{j=1}^n Y_j] = \int_{\mathbb{P}^n} \prod_{j=1}^n [Y_j] = \int_{\mathbb{P}^n} \prod_{j=1}^n d_j[H] \\ &= \left(\prod_{j=1}^n d_j \right) \int_{\mathbb{P}^n} [H]^n = \prod_{j=1}^n d_j \end{aligned}$$

ya que $[H]^n$ es la cardinalidad de la intersección de n hiperplanos genéricos en \mathbb{P}^n , es decir, es 1. Lo que acabamos de ver es una demostración del Teorema de Bézout 2.5.

4.2.2. Fibrados y clases de Chern. Sea $L \rightarrow X$ un fibrado lineal complejo. Si s es una sección de L , el conjunto $Z(s) = \{x \in X : s(x) = 0\}$ es, para s genérica, una subvariedad de X . Más aún, si s_1 y s_2 son dos secciones de L suficientemente genéricas, entonces $t \mapsto ts_2 + (1-t)s_1$ define una deformación de s_1 en s_2 . Esto define una deformación de $Z(s_1)$ en $Z(s_2)$, que muestra que, para secciones suficientemente genéricas, $[Z(s_1)] = [Z(s_2)]$ en $H^2(X, \mathbb{Z})$. Esto permite definir la *primera clase de Chern de L* como $c_1(L) := [Z(s)] \in H^2(X, \mathbb{Z})$, para cualquier sección genérica s . También se definen las clases de Chern superiores para el caso de fibrados vectoriales de rangos más altos.

Una manera de ordenar las clases de Chern de un fibrado $\mathcal{E} \rightarrow X$ de rango r es a través de la *clase de Chern total de \mathcal{E}* : $c(\mathcal{E}) := 1 + c_1(\mathcal{E}) + \dots + c_r(\mathcal{E}) \in H^*(X, \mathbb{Z})$. La clase de Chern tiene una cantidad de propiedades muy útiles. Por ejemplo, conmuta con morfismos de espacios: si $f : Y \rightarrow X$, entonces

$$c(f^*\mathcal{E}) = f^*c(\mathcal{E}).$$

Otra propiedad es la *fórmula de Whitney*:

$$c(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) = c(\mathcal{E}_1) \cdot c(\mathcal{E}_2). \quad (4.3)$$

Para fibrados lineales se tiene

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2). \quad (4.4)$$

Otra herramienta de cálculo es el llamado “Splitting Principle” que aproximadamente establece que si una identidad polinómica en las clases de Chern vale para una suma directa de fibrados lineales, entonces ésta vale para fibrados vectoriales de rango arbitrario. Para el enunciado preciso y su demostración referimos a la §21 de [1].

Mencionamos las clases de Chern de algunos fibrados comunes sobre \mathbb{P}^n . El primero es el fibrado lineal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ dado, por ejemplo, por las funciones de transición $g_{ij} := \frac{z_j}{z_i}$ sobre los abiertos $U_j \cap U_i$ según (4.1). Es fácil verificar que las secciones de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ son los polinomios homogéneos de grado 1 en $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Por lo tanto, $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = [H]$, y $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = 1 + [H]$.

Otros fibrados se obtienen por producto tensorial. Por ejemplo, para $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes d}$, cuyas secciones resultan ser los polinomios homogéneos de grado d y entonces, $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 1 + d[H]$.

Por último consideremos el *fibrado tangente* de \mathbb{P}^n , $T\mathbb{P}^n$, que es un fibrado complejo de rango n . No es difícil ver que $c(T\mathbb{P}^n) = (1 + [H])^{n+1}$ en $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$.

4.3. Variedades Calabi-Yau. Para decirlo en pocas palabras, una variedad *Calabi-Yau* es una variedad compacta Kähler con fibrado canónico trivial. Esto implica que, si $n := \dim_{\mathbb{C}} X$, $h^{n,0} = 1$ para este tipo de variedades. Sin embargo, es importante notar que sobre esta definición básica distintos autores (y aún el mismo autor) consideran condiciones diferentes. Por ejemplo, en geometría algebraica es común flexibilizar el requerimiento de que sea una variedad suave para dejar lugar a cierto tipo de singularidades controladas. También es común que se pongan condiciones sobre la anulación de ciertos grupos de cohomología: se suele pedir que $h^{2,0} = 0$ (lo cual implica que la variedad es algebraica) o que $h^{p,0} = 0$ para $1 \leq p \leq n - 1$ (lo cual equivale a que la holonomía es $SU(n)$). Para más detalles y referencias bibliográficas, se sugiere consultar el primer capítulo de [22].

Si X es una variedad compleja con $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, la multiplicación por $i = \sqrt{-1}$ define un endomorfismo \mathbb{R} -lineal J sobre el espacio tangente real de X , $T^{\mathbb{R}}X$. Es claro que $J \circ J = -id$. Si h es una forma hermítica sobre $T^{\mathbb{R}}X$ se la puede descomponer como $h = g - i\omega$, con g, ω reales e invariantes por J . En particular, ω es alternada y da origen a una 2-forma sobre X . Los autoespacios de J actuando sobre $T^{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$ permiten descomponer el espacio de 1 formas $\Omega_{\mathbb{C}}^1 := \Omega^1 \otimes \mathbb{C} = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$ (el primero correspondiente al autovalor i y el segundo al $-i$). Esta descomposición se extiende a las potencias $\Omega_{\mathbb{C}}^k = \bigoplus_{p=0}^k \Omega^{p,k-p}$ y se tiene que ω es una sección del fibrado $\Omega^{1,1}$. La métrica h se dice *Kähler* cuando $d\omega = 0$. De modo equivalente, h es Kähler si y sólo si J es paralelo para la conexión de Levi-Civita de la métrica $g := \text{Re } h$.

Para X Kähler, la teoría de Hodge provee la descomposición $H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$. Las clases de ω en $H^2(X, \mathbb{C})$ están en $H^{1,1}$ y son llamadas *clases de Kähler*. El conjunto de todas las clases de Kähler de X forma un cono abierto en $H^{1,1}$.

El *fibrado canónico* K_X de una variedad compleja tiene por secciones locales a $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, donde (z_1, \dots, z_n) son coordenadas locales complejas. Si h es una métrica hermítica en X , ésta induce, en particular, una métrica h_{-K_X} en el fibrado dual al canónico, llamado *fibrado anticanónico* $-K_X$. La curvatura de h_{-K_X} es:

$$\omega_{-K_X} := \frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} h_{-K_X}$$

y se puede ver que

$$\text{Ric}(Ju, v) = 2\pi \omega_{-K_X}(u, v),$$

donde Ric es la *curvatura de Ricci* de la métrica Riemanniana g . En este contexto, la primera clase de Chern de X es ω_{-K_X} . Esto muestra una relación entre la curvatura de X y la de su fibrado anticanónico.

Es claro que si la curvatura de Ricci se anula para una métrica Kähler, también lo hace su primera clase de Chern. La recíproca, es conocida como *conjetura de Calabi* y fue demostrada por S.-T. Yau:

Teorema 4.1 (Yau). *Sea X una variedad compacta Kähler con primera clase de Chern nula y una forma de Kähler $\alpha \in H^2(X, \mathbb{R})$. Entonces existe una única métrica Kähler en X , $h = g - i\omega$ con ω en la clase de α y de modo que $\omega_{-K_X} = 0$.*

El siguiente resultado muestra la relación entre las variedades Kähler compactas con clase de Chern nula y la holonomía.

Teorema 4.2. *Sea X una variedad compacta Kähler con primera clase de Chern nula. Entonces existe un cubrimiento finito de X que es isomorfo a un producto de*

- toros complejos y

- variedades Kähler compactas, simplemente conexas y con grupos de holonomía (exactamente) Sp o SU .

4.4. Grassmanianas complejas. La Grassmaniana (compleja) $G(r, k)$ es el espacio de todos los subespacios de dimensión r en \mathbb{C}^k . En este sentido, $\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$. Dado que los subespacios de dimensión r de \mathbb{C}^k definen subvariedades lineales de \mathbb{P}^{k-1} , también vale que $G(r, k)$ es el conjunto de variedades lineales de dimensión $r-1$ en \mathbb{P}^{k-1} . En todo caso, $G(r, k)$ es una variedad compleja, Kähler, compacta de dimensión compleja $r(k-r)$. También es una variedad algebraica.

Un motivo por el que las Grassmanianas son importantes es porque sirven como espacio clasificante de muchos problemas geométricos. Otro motivo es que son objetos muy bien estudiados y con propiedades combinatorias muy interesantes.

El *cálculo de Schubert* permite dar una descripción completa del anillo de cohomología de $G(r, k)$.

En lo que sigue nos concentraremos en el caso de las Grassmanianas $G(2, n+1)$ ya que son los espacios que parametrizan las rectas en \mathbb{P}^n . Sea $V_j \subset \mathbb{C}^{n+1}$ el subespacio de dimensión j generado por los primeros j vectores de la base canónica de \mathbb{C}^{n+1} . Para cada $0 \leq b \leq a \leq n-1$ se define el *ciclo de Schubert*:

$$\sigma_{a,b} := \{L \in G(2, n+1) : L \cap \mathbb{P}(V_{n-a}) \neq \emptyset \text{ y } L \subset \mathbb{P}(V_{n+1-b})\}.$$

Estos ciclos son clausuras de celdas en $G(2, n+1)$ y se puede ver que $\sigma_{a,b}$ tiene codimensión $a+b$ dando, por lo tanto, origen a una clase en $H^{2(a+b)}(G(2, n+1), \mathbb{Z})$. Estas clases resultan ser una base (de la estructura aditiva) de $H^{2(a+b)}(G(2, n+1), \mathbb{Z})$. Para calcular la estructura multiplicativa hay varias fórmulas que resultan convenientes:

- La única integral del producto de dos ciclos que no se anula es

$$\int_{G(2, n+1)} \sigma_{a,b} \cdot \sigma_{n-1-b, n-1-a} = 1$$

- La fórmula de Pieri:

$$\sigma_{a,0} \cdot \sigma_{b,c} = \sum_{(d,e): d+e=a+b+c, \text{ y } c \leq e \leq b \leq d \leq n-1} \sigma_{d,e}$$

Usando estas fórmulas y la definición de las celdas es posible calcular la estructura multiplicativa de la cohomología. Veamos algunos ejemplos en $G(2, 4)$, vale decir, rectas en \mathbb{P}^3 . Comencemos calculando $\sigma_{1,0}^2$ con la fórmula de Pieri:

$$\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{1,0} \cdot \sigma_{1,0} = \sum_{(d,e): d+e=2, \text{ y } 0 \leq e \leq 1 \leq d \leq 2} \sigma_{d,e} = \sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}.$$

Por otro lado, dado que $H^8(G(2, 4), \mathbb{Z}) = \langle \sigma_{2,2} \rangle$, debe ser $\sigma_{1,1}^2 = a\sigma_{2,2}$, con a a determinar:

$$1 = \int_{G(2,4)} \sigma_{1,1}^2 = \int_{G(2,4)} a\sigma_{2,2} = a \int_{G(2,4)} \sigma_{2,2} = a$$

ya que $\sigma_{2,2} = \mathbb{P}(V_2)$ que es un sólo punto en $G(2, 4)$. Este mismo resultado se podía obtener ya que $\sigma_{1,1}^2 = \sigma_{1,1} \cdot \sigma_{1,1}$ corresponde a la condición geométrica de las rectas $L \subset \mathbb{P}^3$ que están en dos planos en \mathbb{P}^3 . Pero la intersección de dos planos es precisamente una línea que debe ser L . Es decir, $\sigma_{1,1}^2$ consiste de un único punto. El Cuadro 3 muestra la tabla de multiplicación completa de $H^*(G(2, 4), \mathbb{Z})$.

Ejercicio 4.3. Dar la tabla de multiplicación del anillo $H^*(G(2, 5), \mathbb{Z})$.

	1	$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{2,0}$	$\sigma_{1,1}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$
1	1	$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{2,0}$	$\sigma_{1,1}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$
$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	0
$\sigma_{2,0}$	$\sigma_{2,0}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	0	0	0
$\sigma_{1,1}$	$\sigma_{1,1}$	$\sigma_{2,1}$	0	$\sigma_{2,2}$	0	0
$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	0	0	0	0
$\sigma_{2,2}$	$\sigma_{2,2}$	0	0	0	0	0

CUADRO 3. Multiplicación en $H^*(G(2,4), \mathbb{Z})$

Por último, al igual que en el caso de los espacios proyectivos, hay varios fibrados canónicos sobre $G(2, n+1)$. Uno de ellos es el *fibrado universal* $\mathcal{S} \rightarrow G(2, n+1)$ que es el subfibrado del fibrado trivial $\mathbb{C}^{n+1} \times G(2, n+1)$ que tiene por fibra sobre L al subespacio $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$. El dual de este fibrado, que llamaremos Q , tiene por secciones a las funciones lineales sobre cada recta. Se puede ver que

$$c(Q) = 1 + \sigma_{1,0} + \sigma_{1,1}. \quad (4.5)$$

4.5. Algunos proyectos enumerativos. En esta Sección calcularemos el número de rectas en una superficie $S \subset \mathbb{P}^3$, es decir que $S := Z(F)$ para algún $F \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_3]_k$. Las ideas desarrolladas para este caso pueden ser aplicadas en otros casos más complejos, incluyendo las rectas en la quintica.

Ejercicio 4.4. Usar un argumento heurístico análogo al usado para motivar la Conjetura de Clemens en la Sección 2.2 para ver que, genéricamente, el único grado para el cual S puede contener curvas de algún grado d es $k = 3$ y que, en ese caso, $d = 1$.

Ahora quisiéramos contar cuantas rectas hay en una superficie de grado 3. La idea es aplicar el Programa descrito en la Sección 2.4. Para esto comenzamos por ver cuál es el espacio de las configuraciones geométricas. Esto es simple: son las rectas en \mathbb{P}^3 , vale decir, la Grassmaniana $G(2,4)$. Allí hay que hallar la subvariedad Z de las rectas contenidas en S . La condición buscada es que si f parametriza una recta L en \mathbb{P}^3 y F define S , $F \circ f = 0$ si y sólo si L está contenida en S . Para poder describir geoméricamente esta condición es necesario ver a F como una sección de algún fibrado sobre $G(2,4)$. Esto es fácil ya que F es un polinomio homogéneo de grado 3 y, por tanto define un polinomio de igual tipo en cada recta L . Este tipo de polinomio es una sección del fibrado $\text{Sym}^3(Q)$ (recordar que Q eran funciones lineales sobre las rectas). Todo esto nos lleva a decir que el número de rectas que buscamos es

$$N_1 := \int_{G(2,4)} [Z(F)] = \int_{G(2,4)} c(\text{Sym}^3(Q)).$$

Lo único que resta es calcular la clase de Chern $c(\text{Sym}^3(Q))$. Para esto vamos a aplicar el “splitting principle” y pretender que Q se descompone como la suma de dos fibrados lineales $Q = L_1 \oplus L_2$. Para ver como se descompone $\text{Sym}^3(Q)$ recordemos que si W es un espacio vectorial con base $\{w_1, \dots, w_k\}$, entonces una base de $\text{Sym}^3(W)$ está dada por $\{w_{i_1} \otimes w_{i_2} \otimes w_{i_3} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq k\}$. De aquí que para el fibrado $Q = L_1 \oplus L_2$ vale

$$\text{Sym}^3(Q) = L_1^{\otimes 3} \oplus L_1^{\otimes 2} \otimes L_2 \oplus L_1 \otimes L_2^{\otimes 2} \oplus L_2^{\otimes 3}.$$

De la fórmula de Whitney (4.3) y de (4.4) se deduce que

$$c(\text{Sym}^3(Q)) = (1 + 3\alpha_1) \cdot (1 + 2\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot (1 + 3\alpha_2) \quad (4.6)$$

donde $\alpha_j := c_1(L_j)$. Se puede obtener una fórmula general para $c(\text{Sym}^3(Q))$ pero, notemos que, para evaluar N_1 , como $\dim_{\mathbb{R}} G(2, 4) = 8$, alcanza con conocer la componente de $c(\text{Sym}^3(Q))$ en $H^8(G(2, 4), \mathbb{Z})$ (que es $c_3(\text{Sym}^3(Q))$) ya que el resto de las componentes no contribuyen a la integral. Dado que $\alpha_j \in H^2(G(2, 4), \mathbb{Z})$ es claro que la citada componente resulta ser

$$c_3(\text{Sym}^3(Q)) = 3\alpha_1 \cdot (2\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot 3\alpha_2.$$

Ahora es necesario poder escribir las clases α_j en términos de las clases de Schubert a fin de poder calcular los productos de cohomología. Para esto recordemos que $c(Q)$ es conocida por (4.5) y, por otro lado,

$$c(Q) = c(L_1 \oplus L_2) = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) = 1 + (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \cdot \alpha_2$$

y por lo tanto vale

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \sigma_{1,0} \quad \text{y} \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \sigma_{1,1}. \quad (4.7)$$

Volviendo a la clase de Chern y usando el Cuadro 3:

$$\begin{aligned} c_3(\text{Sym}^3 Q) &= 9\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2) = 9\sigma_{1,1}(\sigma_{1,0} + \alpha_1)(\sigma_{1,0} + \alpha_2) \\ &= 9\sigma_{1,1}(2\sigma_{1,0}^2 + \sigma_{1,1}) = 9\sigma_{1,1}(2\sigma_{2,0} + 3\sigma_{1,1}) = 27\sigma_{1,1}^2 = 27\sigma_{2,2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_1 = \int_{G(2,4)} c(\text{Sym}^3(Q)) = \int_{G(2,4)} 27\sigma_{2,2} = 27.$$

El cálculo anterior no resuelve el problema por completo ya que podría haber exceso de intersección. Es un resultado clásico que no lo hay.

Ejercicio 4.5. Usando un argumento análogo al desarrollado en esta Sección, verificar que hay 2875 rectas en una quintica.

Se deja como tarea para el lector interesado el cálculo —mucho menos trivial que los aquí presentados— del número de curvas de grado 2 en la quintica.

REFERENCIAS

1. R. Bott y L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York, 1982. MR **MR658304** (**83i**:57016)
2. P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, y L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nuclear Phys. B **359** (1991), no. 1, 21–74. MR **93b**:32029
3. E. Cattani y J. Fernandez, *Frobenius modules and Hodge asymptotics*, Comm. Math. Phys. **238** (2003), no. 3, 489–504, también, arXiv:math.AG/0207279. MR **MR1993382** (**2004i**:32022)
4. H. Clemens, *Curves on higher-dimensional complex projective manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, pp. 634–640. MR **MR934266** (**89e**:14007)
5. E. Coddington y N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955. MR **MR0069338** (**16**,1022b)
6. D. Cox y S. Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR **2000d**:14048
7. G. Ellingsrud y S. Strømme, *The number of twisted cubic curves on the general quintic threefold*, Math. Scand. **76** (1995), no. 1, 5–34. MR **MR1345086** (**96g**:14045)
8. A. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, Internat. Math. Res. Notices **1996**, no. 13, 613–663, también, arXiv:alg-geom/9603021. MR **97e**:14015
9. M. Gross, D. Huybrechts, y D. Joyce, *Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Lectures from the Summer School held in Nordfjordeid, June 2001. MR **MR1963559** (**2004c**:14075)
10. K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, y E. Zaslow, *Mirror symmetry*, Clay Mathematics Monographs, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, With a preface by Vafa. MR **MR2003030** (**2004g**:14042)

11. E. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1944. MR MR0010757 (6,65f)
12. S. Katz, *On the finiteness of rational curves on quintic threefolds*, *Compositio Math.* **60** (1986), no. 2, 151–162. MR **MR868135** (**88a**:14047)
13. ———, *Enumerative geometry and string theory*, Student Mathematical Library, vol. 32, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, IAS/Park City Mathematical Subseries. MR MR2218550
14. M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, también, arXiv:alg-geom/9411018, pp. 120–139. MR **MR1403918** (**97f**:32040)
15. M. Kontsevich y Y. Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001, también, arXiv:math.SG/0011041, pp. 203–263. MR **MR1882331** (**2003c**:32025)
16. M. Kreuzer y H. Skarke, *No mirror symmetry in Landau-Ginzburg spectra!*, *Nuclear Phys. B* **388** (1992), no. 1, 113–130. MR **MR1200390** (**94b**:32049)
17. B. Lian, K. Liu, y S.-T. Yau, *Mirror principle. I*, *Asian J. Math.* **1** (1997), no. 4, 729–763, también, arXiv:alg-geom/9712011. MR **99e**:14062
18. D. Morrison, *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: a guide for mathematicians*, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), no. 1, 223–247, también, arXiv:alg-geom/9202004. MR **93j**:14047
19. ———, *Mathematical aspects of mirror symmetry*, Complex algebraic geometry (Park City, UT, 1993), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, también, alg-geom/9609021, pp. 265–327. MR **98g**:14044
20. ———, *The geometry underlying mirror symmetry*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, también, arXiv:alg-geom/9608006, pp. 283–310. MR **MR1714827** (**2000j**:14063)
21. A. Strominger, S.-T. Yau, y E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, *Nuclear Phys. B* **479** (1996), no. 1-2, 243–259. MR **MR1429831** (**97j**:32022)
22. C. Voisin, *Mirror symmetry*, SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, Translated from the 1996 French original by Roger Cooke. MR **MR1711184** (**2000h**:14033)

INSTITUTO BALSEIRO, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO – C.N.E.A., BARILOCHE, RÍO NEGRO, REPÚBLICA ARGENTINA

E-mail address: jfernand@ib.edu.ar

Introducción a la Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana

Sergio Grillo

Instituto Balseiro – Centro Atómico Bariloche

sergio@cabtep2.cnea.gov.ar

Sebastián Ferraro

Departamento de Matemática – Universidad Nacional del Sur

sferraro@criba.edu.ar

Reunión PAV *Geometría Diferencial, Física y Control*, La Falda, Junio 06–11, 2005

1. Introducción

El objeto de estas notas es dar, en el contexto de la geometría diferencial, una breve introducción a las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de sistemas mecánicos.

En la primera parte, se intentará establecer un contacto preciso entre la formulación de las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas de partículas con vínculos, que aparece en los libros de mecánica clásica (como por ejemplo [1]), y los conceptos geométricos que entran en juego en la derivación de las mismas. Una vez realizada dicha derivación, definiremos los conceptos de sistema Lagrangiano y de formulación Lagrangiana de sistemas dinámicos, presentaremos algunos sistemas que caen bajo tal definición, y citaremos ciertas ventajas de describir a los mismos bajo dicho formalismo, a saber: la sistematización de la escritura de las ecuaciones de movimiento; la relación entre cantidades conservadas y simetrías de la función Lagrangiana. Por último, describiremos brevemente la formulación variacional de los sistemas Lagrangianos.

En la segunda parte, estudiaremos la formulación Hamiltoniana de sistemas mecánicos. En líneas generales, avanzaremos a partir de un ejemplo sencillo, aumentando gradualmente el grado de generalidad a través de la introducción de estructuras geométricas adecuadas. Se mostrará cómo se construye un sistema Hamiltoniano a partir de uno Lagrangiano mediante la transformación de Legendre, indicando la relación entre ambos formalismos. Finalmente, destacaremos la importancia de contar con una expresión intrínseca para las ecuaciones de Hamilton.

En lo que respecta a variedades diferenciables [2], nos vamos a restringir exclusivamente a la categoría C^∞ .

2. Formulaci3n Lagrangiana de sistemas mec3nicos

2.1. Sistemas de part3culas con v3nculos

Consideremos un sistema de N part3culas con masas m_i ($i = 1, \dots, N$), y denotemos por $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ a la posici3n de la part3cula i -3sima respecto de un sistema inercial de referencia. Este 3ltimo s3mbolo tambi3n lo utilizaremos, dependiendo del contexto, para indicar la trayectoria de la misma (ya sea conocida o una inc3gnita a determinar)

$$\mathbf{r}_i : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \mathbf{r}_i(t),$$

en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Como es usual, escribiremos \mathbf{v}_i y \mathbf{a}_i para referirnos a la velocidad y a la aceleraci3n de cada part3cula correspondiente a una trayectoria dada, es decir, a la primera $\dot{\mathbf{r}}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ y segunda $\ddot{\mathbf{r}}_i = d^2\mathbf{r}_i/dt^2$ derivadas temporales de $\mathbf{r}_i(t)$, respectivamente. En lo que sigue, y s3lo por simplicidad, tomaremos todas las masas m_i iguales a 1.

Recordemos que, seg3n las leyes de Newton [1, 3], las trayectorias deben satisfacer las ecuaciones

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza sobre la part3cula i -3sima. Si cada \mathbf{F}_i es una funci3n conocida del tiempo y de las posiciones y velocidades de las part3culas del sistema, es decir

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t), \quad (2)$$

la ecuaci3n (1) define para las curvas $\mathbf{r}_i(t)$ un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, y en forma normal. De modo que la existencia y unicidad de soluciones, en ciertos intervalos $[t_1, t_2]$, est3 garantizada una vez fijada una condici3n inicial: $\mathbf{r}_i(t_1)$, $\mathbf{v}_i(t_1)$ (que debe estar contenida, junto con t_1 , en el dominio de cada \mathbf{F}_i).

Diremos que el sistema est3 sujeto a **v3nculos** o **restricciones cinem3ticas** si, por ejemplo,¹ las trayectorias de las part3culas que lo componen deben satisfacer condiciones del tipo

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad \text{con} \quad f : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{\mathbb{R}^{3N}} \rightarrow \mathbb{R}; \quad (3)$$

es decir, $f(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$.

Ejemplo. La condici3n de que dos part3culas mantengan su distancia fija, digamos en un valor l , corresponde al v3nculo

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| - l = 0, \quad (4)$$

¹La idea de v3nculo es mucho m3s general que la dada por (3) (ver ref. [1]). La clase de restricciones definida por dicha ecuaci3n, y en las cuales nos vamos a concentrar a lo largo de estas notas, recibe el nombre de *v3nculos hol3nomos*.

donde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ denota la norma Euclídea de \mathbb{R}^3 . \blacklozenge

Supongamos entonces que nuestro sistema está sujeto a $K < 3N$ restricciones cinemáticas²

$$v_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad 1 \leq l \leq K. \quad (5)$$

Notar que estas últimas también pueden describirse en términos de una aplicación $v : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^K$, con $v = (v_1, \dots, v_K)$, a través de la ecuación

$$v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0. \quad (6)$$

Supongamos además que las partículas del sistema están sometidas a fuerzas que denotaremos \mathbf{F}_i^a y que llamaremos **fuerzas aplicadas**, las cuales se consideran datos del problema y vienen dadas como función de las posiciones, de las velocidades y del tiempo [ver (2)]. En general, estas fuerzas **no** son suficientes para implementar los vínculos mencionados para cualquier condición inicial,³ en el sentido que las soluciones de

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^a, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (7)$$

no tienen porqué satisfacer la ecuación (5): es decir, las ecuaciones (5) y (7), para ciertas condiciones iniciales, pueden ser incompatibles. Luego, deben existir otras fuerzas actuando sobre cada partícula del sistema, que llamaremos **fuerzas de vínculo**, e indicaremos \mathbf{F}_i^v , que haga posible que tales restricciones se cumplan, en el sentido que las ecuaciones

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v, \quad 1 \leq i \leq N,$$

sí tengan soluciones que satisfagan (5) para toda condición inicial. Cada fuerza \mathbf{F}_i^v no suele ser dato del problema, sino una incógnita a determinar. Se trata entonces de funciones incógnita $\mathbf{F}_i^v : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \mathbf{F}_i^v(t)$, que se suman a las incógnitas ya existentes $\mathbf{r}_i(t)$.

Ejemplo. Una forma de lograr que dos partículas se muevan manteniendo fija en una cantidad l la distancia entre ellas [ver ec. (4)], independientemente de fuerzas \mathbf{F}_i^a que se apliquen sobre las mismas, es uniéndolas rígidamente a través de una varilla de longitud l (por supuesto, el vínculo se realizará siempre que las fuerzas \mathbf{F}_i^a sean lo suficientemente pequeñas para no deformar la varilla). La tensión soportada por cada extremo de la varilla durante el movimiento de las partículas (o más precisamente, su reacción) es la fuerza \mathbf{F}_i^v que hace posible la realización del vínculo en cuestión. \blacklozenge

²La condición sobre el número de vínculos es para evitar la situación trivial, en que todas las partículas deben permanecer en reposo.

³Por supuesto, estamos hablando de condiciones iniciales compatibles con los vínculos en cuestión:

$$v_l(\mathbf{r}_1(t_1), \mathbf{r}_2(t_1), \dots, \mathbf{r}_N(t_1)) = 0, \quad 1 \leq l \leq K.$$

En resumen, según las leyes de Newton, un sistema de partículas sujetas a fuerzas aplicadas \mathbf{F}_i^a y vínculos v_l está descrito por las ecuaciones

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v, \quad 1 \leq i \leq N, \quad v_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad 1 \leq l \leq K, \quad (8)$$

donde las incógnitas son las $3N$ funciones que definen las trayectorias $\mathbf{r}_i(t)$ del sistema, y las $3N$ funciones que definen las componentes de las fuerzas de vínculo $\mathbf{F}_i^v(t)$. Se trata claramente de un sistema de ecuaciones subdeterminado, ya que el número de incógnitas es $6N = 3N + 3N$ y el de ecuaciones es $3N + K$, con $K < 3N$. Notar también que ya **no** estamos hablando de un sistema de ecuaciones diferenciales. Estos problema se resuelven agregando ecuaciones adicionales, como las resultantes del *Principio de D'Alembert*, que enunciaremos más adelante.

2.1.1. Espacio de configuraciones y su tangente

Consideremos N copias de \mathbb{R}^3 , una para cada partícula del sistema, e identifiquemos \mathbb{R}^{3N} con la suma directa $\oplus_{i=1}^N \mathbb{R}^3$. Sea \mathbf{R} el vector de \mathbb{R}^{3N} dado por la suma $\oplus_{i=1}^N \mathbf{r}_i$, donde, recordemos, cada \mathbf{r}_i es la posición de la partícula i -ésima. Vamos a decir que \mathbf{R} es la *posición del sistema*. También utilizaremos \mathbf{R} para indicar la *trayectoria del sistema*

$$\mathbf{R} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^{3N} : t \mapsto \mathbf{R}(t) = \oplus_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t),$$

en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. En general, $\mathbf{R}(t)$ denotará una curva cualquiera en \mathbb{R}^{3N} .

Volvamos a los vínculos definidos en (5). Notemos que en términos de \mathbf{R} tales ecuaciones se escriben $v_l(\mathbf{R}) = 0$, $1 \leq l \leq K$; y en la forma (6) adoptan la expresión $v(\mathbf{R}) = 0$. Supongamos que las funciones $v_l : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^∞ e independientes (i.e., el espacio lineal generado por las formas dv_l tienen dimensión constante e igual a K). En otras palabras, supongamos que $v : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^K$ es una submersión. Luego,

$$Q = v^{-1}(0) = \bigcap_{l=1}^k v_l^{-1}(0)$$

define una subvariedad (regular y cerrada) de \mathbb{R}^{3N} con $\dim Q = 3N - K$. La variedad Q recibe el nombre de **espacio de configuraciones**, y si $\dim Q = n$ se dice que el sistema tiene n *grados de libertad* (o que n es el *número de grados de libertad* del sistema). En éstos términos, la ecuación (6) se traduce en la condición $\mathbf{R} \in Q$. Por supuesto, si el sistema no está sujeto a vínculos, el espacio de configuraciones será todo \mathbb{R}^{3N} .

Ejemplo. Describamos el espacio de configuraciones de un sistema formado por 2 partículas sujetas al vínculo (4), desarrollado en los ejemplos anteriores. Las posiciones permitidas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 de tales partículas pueden expresarse como

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{cm} + \frac{l}{2} \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{cm} - \frac{l}{2} \mathbf{e}, \quad (9)$$

siendo $\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ la posición del centro de masa del sistema (que puede tomar cualquier valor en \mathbb{R}^3) y $\mathbf{e} = \frac{1}{l}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, que define un vector arbitrario de norma 1 [pues según (4) tenemos $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = l$]. Luego,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \oplus \mathbf{r}_2 = \left(\mathbf{r}_{cm} + \frac{l}{2} \mathbf{e} \right) \oplus \left(\mathbf{r}_{cm} - \frac{l}{2} \mathbf{e} \right). \quad (10)$$

Ésto dice que un elemento cualquiera de Q es de la forma

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{r} + \frac{l}{2} \mathbf{u} \right) \oplus \left(\mathbf{r} - \frac{l}{2} \mathbf{u} \right), \quad (11)$$

con $\mathbf{r}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|\mathbf{u}\| = 1$. Es claro entonces que el espacio de configuraciones resultante $Q \subset \mathbb{R}^6$ puede identificarse con $\mathbb{R}^3 \times S^2$. En particular, el número de grados de libertad del sistema es igual a 5. \blacklozenge

Del mismo modo que definimos la posición \mathbf{R} del sistema, podemos definir la *velocidad del sistema* como

$$\mathbf{V} = \oplus_{i=1}^N \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{3N}.$$

Notemos que dada una trayectoria $\mathbf{R}(t)$, la magnitud $\mathbf{V}(t)$ puede verse como un elemento de $T_{\mathbf{R}(t)}\mathbb{R}^{3N}$. Teniendo en cuenta la presencia de vínculos, esto último se traduce en que $\mathbf{V}(t) \in T_{\mathbf{R}(t)}Q$ si $\mathbf{R}(t) \in Q$ para todo t . Es decir, *la velocidad de un sistema con vínculos define vectores del fibrado tangente TQ al espacio de configuraciones*.

En lo que sigue, vamos a usar el símbolo Δ para indicar un elemento genérico de $T\mathbb{R}^{3N}$. Si $\Delta \in T_{\mathbf{R}}Q$ diremos que Δ es un **desplazamiento virtual** del sistema en el punto $\mathbf{R} \in Q$.⁴

Ejemplo. Retomemos el ejemplo de las partículas unidas por una varilla. Las velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 de cada una de ellas en posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 [ver (9)] pueden escribirse

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{cm} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{cm} - \frac{l}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}, \quad (12)$$

respectivamente, siendo $\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ la velocidad del centro de masa del sistema, y $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e} \times d\mathbf{e}/dt$. [Notar que $\boldsymbol{\omega}$ es el único vector ortogonal a \mathbf{e} tal que $d\mathbf{e}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$.]⁵ En consecuencia, si el sistema está en la posición $\mathbf{R} \in Q$ [ver (10)], su velocidad $\mathbf{V} \in T_{\mathbf{R}}Q$ valdrá

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2 = \left(\mathbf{v}_{cm} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \right) \oplus \left(\mathbf{v}_{cm} - \frac{l}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \right).$$

⁴Vale la pena destacar la diferencia entre velocidad y desplazamiento virtual. Dada una curva $\mathbf{R}(t)$, la velocidad $\mathbf{V}(t)$ en el punto $\mathbf{R}(t)$ es un elemento de $T_{\mathbf{R}(t)}Q$ unívocamente determinado por la función $\mathbf{R}(t)$; concretamente $\mathbf{V}(t) = d\mathbf{R}(t)/dt$. En cambio, un desplazamiento virtual en $\mathbf{R}(t)$ es un elemento cualquiera de $T_{\mathbf{R}(t)}Q$, que puede no ser tangente a la curva en cuestión.

⁵Estamos denotando por \times el producto vectorial de \mathbb{R}^3 .

De ésto se desprende que un desplazamiento virtual del sistema en un punto [ver (11)]

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{r} + \frac{l}{2} \mathbf{u} \right) \oplus \left(\mathbf{r} - \frac{l}{2} \mathbf{u} \right) \in Q$$

será igual a

$$\Delta = \left(\mathbf{v} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right) \oplus \left(\mathbf{v} - \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right), \quad (13)$$

con $\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u} \rangle = 0$.⁶ Identificando Q con $\mathbb{R}^3 \times S^2$, tenemos

$$TQ = T\mathbb{R}^3 \oplus_{\mathbb{R}^3 \times S^2} TS^2.$$

Luego, en un punto (\mathbf{r}, \mathbf{u}) de Q tendremos $\Delta = \mathbf{v} \oplus \boldsymbol{\Omega}$. \blacklozenge

2.1.2. Principio de D'Alembert

Imitando las ideas de la sección anterior podemos definir la aceleración del sistema y las fuerzas aplicadas y de vínculo que actúan sobre el mismo como⁷

$$\mathbf{A} = \oplus_{i=1}^N \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{F}^a = \oplus_{i=1}^N \mathbf{F}_i^a \quad y \quad \mathbf{F}^v = \oplus_{i=1}^N \mathbf{F}_i^v. \quad (15)$$

En estos términos, las ecuaciones de movimiento (8) toman la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^a + \mathbf{F}^v, \quad \nu(\mathbf{R}) = 0. \quad (16)$$

Dada una curva $\mathbf{R}(t)$, pensaremos a las cantidades definidas en (15), en un tiempo t , como elementos de $T_{\mathbf{R}(t)}^* \mathbb{R}^{3N}$ (las componentes del vector original pasan a ser coordenadas en la base dual a la canónica de \mathbb{R}^{3N}). Lo que estamos diciendo es que, para cada t , a los vectores de \mathbb{R}^{3N} [ver (14) para la expresión de \mathbf{F}^a]

$$\mathbf{A}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{F}^a(t) = \mathbf{F}^a(\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t), t) \quad y \quad \mathbf{F}^v(t)$$

los veremos como covectores de $T_{\mathbf{R}(t)}^* \mathbb{R}^{3N}$. En otras palabras, la aceleración y las fuerzas serán secciones de $T^* \mathbb{R}^{3N}$ a lo largo de la curva $\mathbf{R}(t)$.

Con todo esto estamos listos para enunciar el **Principio de D'Alembert**: *En un sistema mecánico con restricciones cinemáticas definidas por una subvariedad Q , las trayectorias $\mathbf{R}(t)$ [curvas solución de (16)] son tales que las fuerzas de vínculos cumplen $\mathbf{F}^v(t) \in (T_{\mathbf{R}(t)}Q)^o$ en todo instante t , es decir*

las fuerzas de vínculo anulan a los desplazamientos virtuales.

⁶De ahora en más $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará la métrica Euclídea en el espacio que corresponda.

⁷Notar que [compare con (2)]

$$\mathbf{F}^a = \mathbf{F}^a(\mathbf{R}, \mathbf{V}, t). \quad (14)$$

Esta condición sobre \mathbf{F}^v da exactamente $3N - K$ ecuaciones. Identificando $T^*\mathbb{R}^{3N}$ con $T\mathbb{R}^{3N}$ a través de la métrica Euclídea de \mathbb{R}^{3N} , y viendo entonces a $\mathbf{F}^v(t)$ como un elemento de $T_{\mathbf{R}(t)}\mathbb{R}^{3N}$, el principio de D'Alembert dice que $\mathbf{F}^v(t) \in (T_{\mathbf{R}(t)}Q)^\perp$ (donde \perp denota el ortogonal respecto de la métrica Euclídea), o sea:

las fuerzas de vínculo son perpendiculares a los desplazamientos virtuales.

En otras palabras, para todo t se tiene que

$$\langle \mathbf{F}^v(t), \Delta \rangle = 0, \quad \forall \Delta \in T_{\mathbf{R}(t)}Q,$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el *pairing* de $T\mathbb{R}^{3N}$ con su dual, o la métrica Euclídea de $T\mathbb{R}^{3N}$, según veamos a $\mathbf{F}^v(t)$ como elemento de $T^*\mathbb{R}^{3N}$ o $T\mathbb{R}^{3N}$, respectivamente. Dado que la cantidad $\langle \mathbf{F}^v(t), \Delta \rangle$ tiene unidades de trabajo, se la conoce como el *trabajo virtual* de \mathbf{F}^v para un desplazamiento Δ . Es por eso que el principio de D'Alembert a veces se enuncia como:

las fuerzas de vínculo no realizan trabajos virtuales;

y se lo conoce como **Principio de los trabajos virtuales** (aunque esta frase se suele usar solamente para sistemas en equilibrio estático).

Notar que este principio es simplemente un postulado que hace referencia al espacio donde *viven* las fuerzas responsables de implementar un determinado conjunto de vínculos. No hay razones (por eso se habla de *principio*), desde un punto de vista físico, para que tal postulado sea siempre válido. Sin embargo, la clase de sistemas con vínculos donde se cumple es suficientemente grande para que se lo tome como un principio de la mecánica.

Ejemplo. En el caso de las partículas unidas por una varilla, la fuerza de vínculo es $\mathbf{F}^v = \mathbf{F}_1^v \oplus \mathbf{F}_2^v \in T^*\mathbb{R}^6$, donde \mathbf{F}_1^v y \mathbf{F}_2^v (como elementos del mismo \mathbb{R}^3) apuntan en la dirección \mathbf{e} definida por la varilla, y en sentidos opuestos:

$$\mathbf{F}_2^v = -\mathbf{F}_1^v = -\|\mathbf{F}_1^v\| \mathbf{e}$$

(suponiendo que la varilla tiene masa despreciable, y que por ende la tensión en un extremo coincide con la tensión en el otro). Consideremos un elemento arbitrario [ver la ecuación (13)]

$$\Delta = \left(\mathbf{v} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right) \oplus \left(\mathbf{v} - \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right) \in TQ$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^v, \Delta \rangle &= \left\langle \mathbf{F}_1^v, \mathbf{v} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right\rangle + \left\langle \mathbf{F}_2^v, \mathbf{v} - \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}_1^v, \mathbf{v} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right\rangle - \left\langle \mathbf{F}_1^v, \mathbf{v} - \frac{l}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{F}_1^v, l \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \rangle = l \|\mathbf{F}_1^v\| \langle \mathbf{e}, \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que \mathbf{F}^v cumple el principio de D'Alembert. \blacklozenge

Resumiendo lo visto en esta sección, las ecuaciones de movimiento para un sistema con vínculos que cumple el principio de D'Alembert son

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^a + \mathbf{F}^v, \quad \mathbf{R} \in Q, \quad \mathbf{F}^v \in (TQ)^o. \quad (17)$$

Notar que ahora se han agregado $3N - K$ ecuaciones a las $3N + K$ originales, dando un total de $6N$, como el número de incógnitas.

2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

A continuación vamos a recordar algunas ideas elementales sobre coordinización y parametrización de una variedad y su tangente, utilizando una notación conveniente para nuestros propósitos. Luego, haciendo uso de estas ideas, vamos a transformar las ecuaciones (17) en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales reciben el nombre de *ecuaciones de Euler-Lagrange* (E-L).

2.2.1. Parametrización de la posición

Dado un mapa (U, φ) de Q (nuestro espacio de configuraciones), con $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (recordar que estamos indicando por n a la dimensión de Q), y dado $q \in U$, notaremos

$$\varphi(q) = (q^1(q), \dots, q^n(q)) = (q^1, \dots, q^n).$$

A los símbolos q^i los vamos a pensar como:

- funciones coordenadas $q^i : U \rightarrow \mathbb{R}$,
- componentes de los puntos de $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$,
- o componentes $q^i : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ de una curva en $\varphi(U)$,

dependiendo del contexto.

El homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ define una parametrización de los puntos de U en términos de los elementos $(q^1, \dots, q^n) \in \varphi(U)$, dada por

$$q = q(q^1, \dots, q^n) = \varphi^{-1}(q^1, \dots, q^n). \quad (18)$$

Utilizando la inclusión $i : Q \hookrightarrow \mathbb{R}^{3N}$, tenemos para los puntos \mathbf{R} de \mathbb{R}^{3N} contenidos en U la parametrización

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^1, \dots, q^n) = i \circ \varphi^{-1}(q^1, \dots, q^n). \quad (19)$$

Notar que ahora \mathbf{R} va a indicar un punto de $Q \subseteq \mathbb{R}^{3N}$ o la parametrización $\mathbf{R} = i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$.

Ejemplo. Volvamos a las partículas unidas por una varilla. Identifiquemos Q con $\mathbb{R}^3 \times S^2$, viendo a S^2 como los elementos de \mathbb{R}^3 de norma uno. Asociado a Q tenemos una inmersión $i : Q \hookrightarrow \mathbb{R}^6$ dada por [recordar (11)]

$$i(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \left(\mathbf{r} + \frac{l}{2} \mathbf{u} \right) \oplus \left(\mathbf{r} - \frac{l}{2} \mathbf{u} \right).$$

Luego, una parametrización evidente para $\mathbf{R} = i(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ es la dada por las coordenadas (x, y, z, ϕ, θ) , siendo las tres primeras las coordenadas de \mathbb{R}^3 y las últimas las coordenadas esféricas; explícitamente:

$$\mathbf{r}(x, y, z, \phi, \theta) = (x, y, z), \quad (20)$$

$$\mathbf{u}(x, y, z, \phi, \theta) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta). \quad (21)$$

Las ternas (x, y, z) describen la posición del centro de masa del sistema (que coincide con el centro de la varilla), y los ángulos ϕ, θ describen la posición de la partícula 1 respecto del centro de masa. Por supuesto, el abierto $U \subset \mathbb{R}^3 \times S^2$ donde dicha parametrización es válida puede tomarse igual a todo Q menos el producto cartesiano de \mathbb{R}^3 y un meridiano que incluye a los polos $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ y $-\mathbf{n}$, y pasa por el punto $(1, 0, 0)$. \blacklozenge

2.2.2. Parametrización de la velocidad y los desplazamientos virtuales

El mapa (U, φ) de Q induce otro $(T_U Q, \varphi_*)$ en TQ , con $T_U Q = \cup_{q \in U} T_q Q$ (el tangente a Q a lo largo de U) y

$$\varphi_* : T_U Q \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad : \quad X \in T_q Q \mapsto (\varphi(q); \varphi_{*,q}(X)),$$

siendo $\varphi_{*,q} : T_q Q \rightarrow T_{\varphi(q)} \mathbb{R}^n$ la aplicación tangente a φ en un punto q . Para esta última escribiremos

$$\varphi_{*,q}(X) = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n).$$

En lo que sigue, a los símbolos \dot{q}^i los vamos a pensar como

- funciones coordenadas $\dot{q}^i : T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$ del tangente de Q ,
- componentes de los puntos de $T_{\varphi(q)} \mathbb{R}^n$.

Usando la parametrización (18) de los puntos de U , tendremos una para los elementos $X \in T_U Q$ en términos de las $2n$ -uplas

$$(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in \varphi_*(T_U Q),$$

dada por

$$X = X(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \varphi_{*,(q^1, \dots, q^n)}^{-1}(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n).$$

Aplicando a estas expresiones $i_* : TQ \rightarrow T_Q \mathbb{R}^{3N}$ (la aplicación tangente a $i : Q \hookrightarrow \mathbb{R}^{3N}$) obtenemos

$$\begin{aligned} i_* [X(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)] &= i_* \circ \varphi_{*(q^1, \dots, q^n)}^{-1} (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = (i \circ \varphi^{-1})_{*(q^1, \dots, q^n)} (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (i \circ \varphi^{-1})}{\partial q^i} (q^1, \dots, q^n) \dot{q}^i. \end{aligned}$$

Luego, escribiendo $\mathbf{R} = i \circ \varphi^{-1}$, podemos parametrizar las velocidades \mathbf{V} y los desplazamientos virtuales Δ del sistema en $T_U Q$ (que las estamos viendo como elementos de $T\mathbb{R}^{3N}$) según las fórmulas

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} (q^1, \dots, q^n) \dot{q}^i \quad (22)$$

y

$$\Delta = \Delta(q^1, \dots, q^n; \delta q^1, \dots, \delta q^n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} (q^1, \dots, q^n) \delta q^i, \quad (23)$$

respectivamente. Vamos a reservar el uso de los símbolos δq^i sólo para parametrizar desplazamientos virtuales.

Ejemplo. Parametricemos ahora la velocidad \mathbf{V} de las partículas unidas por una varilla. Según la ecuación (10) tenemos que

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \oplus \mathbf{r}_2 = \left(\mathbf{r}_{cm} + \frac{l}{2} \mathbf{e} \right) \oplus \left(\mathbf{r}_{cm} - \frac{l}{2} \mathbf{e} \right).$$

Usando (20) y (21), para $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{cm}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{e}$, se sigue que

$$\mathbf{r}_{cm} = (x, y, z) \quad y \quad \mathbf{e} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta),$$

y por ende

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x, y, z, \phi, \theta) &= \left(x + \frac{l}{2} \cos \phi \sin \theta, y + \frac{l}{2} \sin \phi \sin \theta, z + \frac{l}{2} \cos \theta \right) \oplus \\ &\quad \oplus \left(x - \frac{l}{2} \cos \phi \sin \theta, y - \frac{l}{2} \sin \phi \sin \theta, z - \frac{l}{2} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

En consecuencia [recordar la ecuación (12)], para

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2 = \left(\mathbf{v}_{cm} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \right) \oplus \left(\mathbf{v}_{cm} - \frac{l}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \right),$$

tendremos, según la ecuación (22), la parametrización

$$\mathbf{V} = \mathbf{V} \left(x, y, z, \phi, \theta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta} \right)$$

con

$$\mathbf{v}_{cm} \left(x, y, z, \phi, \theta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta} \right) = \frac{\partial \mathbf{r}_{cm}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{r}_{cm}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{r}_{cm}}{\partial z} \dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (24)$$

y (como $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} = d\mathbf{e}/dt$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \left(x, y, z, \phi, \theta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta} \right) &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta} \dot{\theta} \\ &= \left(-\sin \phi \sin \theta \dot{\phi}, \cos \phi \sin \theta \dot{\phi}, 0 \right) + \left(\cos \phi \cos \theta \dot{\theta}, \sin \phi \cos \theta \dot{\theta}, -\sin \theta \dot{\theta} \right). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\boldsymbol{\omega} \left(x, y, z, \phi, \theta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta} \right) = \left(-\sin \phi \dot{\theta} - \cos \phi \cos \theta \sin \theta \dot{\phi}, \cos \phi \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \sin \theta \dot{\phi}, \sin^2 \theta \dot{\phi} \right), \quad (25)$$

dado que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e} \times d\mathbf{e}/dt$. \blacklozenge

Queremos destacar una relación importante entre las funciones \mathbf{R} y \mathbf{V} , que utilizaremos en seguida, y que es la igualdad

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}^i} (q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} (q^1, \dots, q^n), \quad (26)$$

la cual se deduce inmediatamente de (22).

2.2.3. Desacoplando las incógnitas $\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{F}^v(t)$

Tengamos en mente la ecuación $\mathbf{A} - \mathbf{F}^a - \mathbf{F}^v = 0$. La idea es aplicar miembro a miembro esta ecuación a un desplazamiento virtual arbitrario, y así arribar a ecuaciones donde sólo aparezca la trayectoria $\mathbf{R}(t)$.

Consideremos una trayectoria suave $\mathbf{R}(t)$ tal que existe un t_0 para el cual $\mathbf{R}(t_0) \in U$. En $\varphi(U)$ tendremos asociada un única curva $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, definida en un entorno de t_0 , tal que

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(q(t)) = \mathbf{R}(q^1(t), \dots, q^n(t)).$$

En términos de la parametrización (22), la velocidad correspondiente podremos escribirla

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(q(t); \dot{q}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} (q(t)) \dot{q}^i(t), \quad (27)$$

donde $\dot{q}(t) = (\dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$, y

$$\dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt} q^i(t).$$

Consideremos también, para cada instante t , un desplazamiento virtual arbitrario $\Delta(t) \in T_{\mathbf{R}(t)}Q$, que podemos escribir

$$\Delta(t) = \Delta(q(t); \delta q(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}(q(t)) \delta q^i(t),$$

siendo $\delta q(t) = (\delta q^1(t), \dots, \delta q^n(t))$. Luego, usando el principio de D'Alembert, si para cada t aplicamos $\mathbf{A}(t) - \mathbf{F}^a(t) - \mathbf{F}^v(t) \in T_{\mathbf{R}(t)}^* \mathbb{R}^{3N}$ sobre $\Delta(t)$ tendremos

$$0 = \langle \mathbf{A} - \mathbf{F}^a - \mathbf{F}^v, \Delta \rangle = \langle \mathbf{A} - \mathbf{F}^a, \Delta \rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \mathbf{A} - \mathbf{F}^a, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle \delta q^i(t).$$

Como la expresión anterior debe valer para todo $\delta q(t)$, es necesario que

$$\left\langle \mathbf{A} - \mathbf{F}^a, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

Notemos que de esta forma hemos encontrado una ecuación para $\mathbf{R}(t)$ [a través de sus coordenadas $q^i(t)$], donde no aparecen las fuerzas de vínculo. Luego, si encontramos una solución $q(t)$, tendremos una solución de la ecuación original con

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(q(t)) \quad y \quad \mathbf{F}^v(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R}(t) - \mathbf{F}^a(t).$$

2.2.4. Derivación de las ecuaciones de E-L

Analicemos por separado los términos $\langle \mathbf{A}, \partial \mathbf{R} / \partial q^i \rangle$ y $\langle \mathbf{F}^a, \partial \mathbf{R} / \partial q^i \rangle$.

Para el primero tenemos

$$\left\langle \mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{V}}{dt}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle \mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle - \left\langle \mathbf{V}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right) \right\rangle.$$

Dado que (usando regla de la cadena)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}(q(t)) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q^i \partial q^j}(q(t)) \dot{q}^j(t),$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^j,$$

luego

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^i}(q(t); \dot{q}(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}(q(t)) \right).$$

Este resultado junto con la ecuación (26) implican que

$$\left\langle \mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle \mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}^i} \right\rangle - \left\langle \mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^i} \right\rangle.$$

Si además escribimos

$$\left\langle \mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}^i} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle}{\partial \dot{q}^i} \quad y \quad \left\langle \mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^i} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle}{\partial q^i},$$

tendremos que

$$\left\langle \mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \right)}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \right)}{\partial q^i}. \quad (29)$$

Observemos que la función $\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{V}^2$ puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 = T \circ i_* \circ \varphi_*^{-1}, \quad (30)$$

siendo $T : T\mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \frac{1}{2} \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{Y}^2$ la **energía cinética** del sistema.

Para analizar el otro miembro $\langle \mathbf{F}^a, \partial \mathbf{R} / \partial q^i \rangle$, supondremos de ahora en más que \mathbf{F}^a es sólo función de la posición (i.e. **no** es función de las velocidades ni del tiempo). Más aún, supondremos que todas las \mathbf{F}_i^a 's son **conservativas**, i.e. existe $V : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$, la **energía potencial**, tal que

$$\mathbf{F}_i^a = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i},$$

o equivalentemente

$$\mathbf{F}^a = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}}.$$

En consecuencia,

$$\left\langle \mathbf{F}^a, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle = -\left\langle \nabla V, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right\rangle = -\frac{\partial (V \circ i \circ \varphi^{-1})}{\partial q^i}. \quad (31)$$

Resumiendo, de las ecs. (28), (29), (30) y (31) se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T \circ i_* \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial (T \circ i_* \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} + \frac{\partial (V \circ i \circ \varphi^{-1})}{\partial q^i} = 0. \quad (32)$$

Usando la proyección canónica $\tau : TQ \rightarrow Q$, podemos extender $V \circ i \circ \varphi^{-1}$ a una función de los q^i 's y los \dot{q}^i 's, independiente de los últimos, dada por la composición

$$V \circ i \circ \tau \circ \varphi_*^{-1}.$$

Con ella es posible reescribir (32) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial [(T \circ i_* - V \circ i \circ \tau) \circ \varphi_*^{-1}]}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial [(T \circ i_* - V \circ i \circ \tau) \circ \varphi_*^{-1}]}{\partial q^i} = 0. \quad (33)$$

De este modo queda naturalmente definida una función $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$L = T \circ i_* - V \circ i \circ \tau, \quad (34)$$

en términos de la cual las ecuaciones (17) se transforman en

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

u omitiendo φ_*^{-1} ,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.} \quad (35)$$

Estas últimas se conocen como **ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L)**, y a la función L se le llama **Lagrangiano** o **función Lagrangiana** del sistema.

Observaciones.

- Las ecuaciones de E-L definen un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j + \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j - \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

para las incógnitas $q^i(t)$. Estamos denotando

$$\ddot{q}^i(t) = \frac{d^2}{dt^2} q^i(t).$$

- Es necesario remarcar que la forma de las ecuaciones (35) es independiente del sistema de coordenadas elegido.
- Las ecuaciones (35) aparecen en el *cálculo de variaciones* (ver [1, 3], y referencias allí incluidas). De hecho, veremos más adelante que las ecuaciones de movimiento de los sistemas de partículas con vínculos pueden derivarse a partir de un principio variacional.

El siguiente teorema condensa, y enuncia con precisión, todo lo visto hasta el momento.

Teorema. Consideremos una subvariedad Q de \mathbb{R}^{3N} de dimensión n y una función $V : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$. Definamos la función $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ como $L = T \circ i_* - V \circ i \circ \tau$, con

- $T : T\mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \mathbf{Y}^2$,
- $i : Q \hookrightarrow \mathbb{R}^{3N}$ la inclusión de Q en \mathbb{R}^{3N} ,

- $\tau : TQ \rightarrow Q$ la proyección canónica.

Supongamos que la curva $\mathbf{R}(t)$ de \mathbb{R}^{3N} y la sección $\mathbf{F}^v(t)$ de $T^*\mathbb{R}^{3N}$, a lo largo de dicha curva, definen una solución de las ecuaciones

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{R}(t) = -\nabla V(\mathbf{R}(t)) + \mathbf{F}^v(t), \quad \mathbf{R}(t) \in Q, \quad \mathbf{F}^v(t) \in (T_{\mathbf{R}(t)}Q)^\circ. \quad (36)$$

Luego, para cada mapa (U, φ) de Q tal que $\mathbf{R}(t_0) \in U$ para algún t_0 , se tiene que la curva

$$(q^1(t), \dots, q^n(t)) = \varphi[\mathbf{R}(t)] \quad \text{de } \mathbb{R}^n,$$

en un entorno de t_0 , es solución de (35). Recíprocamente, si para un mapa (U, φ) de Q la curva $(q^1(t), \dots, q^n(t))$ de \mathbb{R}^n es solución de (35), para la función L definida anteriormente, luego la curva

$$\mathbf{R}(t) = i \circ \varphi^{-1}(q^1(t), \dots, q^n(t))$$

y la sección

$$\mathbf{F}^v(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{R}(t) + \nabla V(\mathbf{R}(t)) \in T_{\mathbf{R}(t)}\mathbb{R}^{3N}$$

definen una solución de (36). ■

2.3. Sistemas Lagrangianos

A los efectos de estas notas, entenderemos por *sistema dinámico* todo conjunto de ecuaciones que tiene entre sus incógnitas una curva $I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ en algún conjunto S (que define los *estados del sistema*), y llamaremos *trayectoria* o *evolución* del sistema a cada curva que sea solución de dichas ecuaciones.

Definición. Se llama **sistema Lagrangiano** a todo sistema dinámico para el cual existe una n -variedad Q y una función $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que cada trayectoria del mismo está dada por una curva $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow Q$ cuyas coordenadas $(q^1(t), \dots, q^n(t))$ en un mapa (U, φ) satisfacen las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (37)$$

Cuando describamos a un sistema dinámico en términos de algún par (Q, L) asociado (si éste existe), diremos que estamos considerando la **formulación Lagrangiana** del mismo. Tal como hicieramos para sistemas de partículas con vínculos, a la variedad Q la llamaremos **espacio de configuraciones**, a L **Lagrangiano** o **función Lagrangiana**, y a las ecuaciones (37) **ecuaciones de Euler-Lagrange**. ♦

Observaciones.

- El término *sistema Lagrangiano* también se usa para referirse a un par (Q, L) , siendo Q una variedad y L una función sobre su tangente.

- Un mismo sistema dinámico puede estar definido por distintos pares (Q, L) .
- La idea de sistema Lagrangiano puede extenderse al caso en que la función Lagrangiana depende del tiempo:

$$L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Los sistemas dinámicos descritos por tales Lagrangianos suelen ser no conservativos, y reciben el nombre de *no autónomos*.

- Los sistemas mecánicos que hemos considerado hasta el momento (es decir, sistemas de partículas con vínculos) tienen un Lagrangiano muy particular [ver (34)], que podemos escribir

$$L = T - V \circ \tau, \quad T : TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad V : Q \rightarrow \mathbb{R},$$

donde T es la forma cuadrática de una métrica en TQ , y reciben el nombre de **sistemas Lagrangianos simples**. En la sección anterior T y $V \circ \tau$ eran $T \circ i_*$ y $V \circ i \circ \tau$, respectivamente, siendo T la forma cuadrática que da lugar a la métrica Euclídea en $T\mathbb{R}^{3N}$, y $T \circ i_*$ su *pull-back* a TQ .

Por supuesto, no todo sistema Lagrangiano es de esta forma.

- La existencia y unicidad de las ecuaciones de E-L queda garantizada por la siguiente condición: para todo mapa (U, φ) la matriz de coeficientes

$$H_{ij} = \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}$$

es invertible. En tal caso se dice que el sistema es **regular**. Los sistemas simples son todos regulares, pues H_{ij} es precisamente la matriz de la métrica definida por T en las coordenadas en consideración.

Dado un sistema de partículas con vínculos, que satisfagan el principio de D'Alembert, la ventaja de describirlo utilizando el formalismo Lagrangiano es que éste brinda una *manera sistemática* de derivar sus ecuaciones de movimiento. Los pasos a seguir son:

1. Construir el Lagrangiano L ; para lo cual basta con calcular su energía cinética T y su energía potencial V restringidas a la subvariedad de vínculos Q ;
2. elegir un sistema de coordenadas $\varphi = (q^1, \dots, q^n)$ en una región U , y considerar el inducido en $T_U Q$

$$\varphi_* = (q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n);$$

3. calcular las derivadas parciales $\partial (L \circ \varphi_*^{-1}) / \partial q^i$ y $\partial (L \circ \varphi_*^{-1}) / \partial \dot{q}^i$;
4. evaluar el resultado en una curva incógnita $(q^1(t), \dots, q^n(t); \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$ en $T_U Q$, con $\dot{q}^i(t) = dq^i(t)/dt$;

5. derivar respecto de t a $\partial(L \circ \varphi_*^{-1})/\partial \dot{q}^i$;
6. para cada i , igualar a cero la diferencia entre el resultado del punto anterior y $\partial(L \circ \varphi_*^{-1})/\partial q^i$.

Notar que, en cambio, la escritura de las ecuaciones de Newton demanda la construcción de cantidades vectoriales (como las fuerzas aplicadas), y que además, una vez escritas, es necesario manipularlas para despejar las fuerzas de vínculo de las trayectorias.

Ejemplo. Escribamos el Lagrangiano y las ecuaciones de E-L para el sistema de las masas unidas por una varilla. Supongamos que las partículas están sólo sometidas a la acción de la gravedad. Para construir L debemos dar la energía cinética y la energía potencial restringidas a Q . Obviamente, la energía cinética del sistema es $T = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2)$ (recordar que estamos tomando las masas iguales a 1). Teniendo en cuenta los vínculos, es decir, si restringimos T a TQ tendremos a partir de las ecuaciones (12) que

$$T \circ i_* = \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{l^2}{4} \boldsymbol{\omega}^2.$$

La energía potencial correspondiente es [ver (10)]

$$V \circ i = -2 \langle \mathbf{g}, \mathbf{r}_{cm} \rangle,$$

siendo \mathbf{g} la aceleración de la gravedad. En consecuencia, el Lagrangiano del sistema $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, viendo a Q como $\mathbb{R}^3 \times S^2$, vale

$$L(\mathbf{r}_{cm}, \mathbf{e}, \mathbf{v}_{cm}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{l^2}{4} \boldsymbol{\omega}^2 + 2 \langle \mathbf{g}, \mathbf{r}_{cm} \rangle. \quad (38)$$

En un mapa (U, φ) que dé lugar a la parametrización descrita por (20) y (21), tenemos de (24) y (25)

$$\mathbf{v}_{cm}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad y \quad \langle \mathbf{g}, \mathbf{r}_{cm} \rangle = -g z,$$

si $g = \|\mathbf{g}\|$ y \mathbf{g} apunta en la dirección de los z 's negativos. Por ende,

$$L \circ \varphi_*^{-1} (x, y, z, \phi, \theta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \frac{l^2}{4} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - 2g z. \quad (39)$$

Para hallar las ecuaciones de E-L seguimos los pasos 1–6 anteriores, obteniendo:

- para las coordenadas x , y y z :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g; \quad (40)$$

- para las coordenadas ϕ y θ :

$$\sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0, \quad \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0. \quad \blacklozenge \quad (41)$$

2.3.1. Cuerpos rígidos

Un **cuerpo rígido** es un sistema de partículas sujetas a las restricciones

$$\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| - c_{ij} = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N, \quad (42)$$

siendo los c_{ij} números reales positivos. Puede verse que, si las partículas no están contenidas en una recta (para lo cual es necesario que $N > 2$), el espacio de configuraciones del sistema es difeomorfo a $Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, siendo $SO(3)$ el grupo de Lie de matrices ortogonales de determinante 1. El factor \mathbb{R}^3 describe (por ejemplo) la posición del centro de masa del cuerpo, y el otro factor describe la rotación rígida de los puntos del cuerpo en torno al centro de masa. De hecho, dado un conjunto de N puntos (*fijos*) \mathbf{s}_i que cumplen (42) y tales que $\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i = 0$, es posible escribir

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + A \mathbf{s}_i, \quad A \in SO(3).$$

El espacio tangente a Q será entonces el álgebra de Lie $\mathbb{R}^3 \oplus so(3)$, siendo $so(3)$ el subconjunto de matrices anti-simétricas de 3×3 , munido del conmutador de matrices. Si sobre \mathbb{R}^3 consideramos el corchete de Lie

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

podemos identificar $so(3)$ con este último, vía el isomorfismo

$$(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las velocidades de cada partícula podrán escribirse

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \Omega \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}), \quad \Omega \in so(3).$$

Supongamos que las partículas que conforman el cuerpo rígido están sometidas sólo a fuerzas conservativas, con potencial V . Sea $T = 1/2 \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle$ la energía cinética. A través de la inmersión

$$i : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \hookrightarrow \mathbb{R}^{3N} \quad : \quad (\mathbf{r}_{cm}, A) \mapsto \bigoplus_{i=1}^N [\mathbf{r}_{cm} + A \mathbf{s}_i]$$

o más precisamente, de su diferencial

$$i_* : \mathbb{R}^3 \oplus so(3) \rightarrow T\mathbb{R}^{3N} \quad : \quad (\mathbf{v}_{cm}, \Omega) \mapsto \bigoplus_{i=1}^N [\mathbf{v}_{cm} + \Omega \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm})],$$

se tiene la energía cinética del sistema (teniendo en cuenta los vínculos)

$$T \circ i_* = \frac{N}{2} \langle \mathbf{v}_{cm}, \mathbf{v}_{cm} \rangle + \frac{1}{2} \mathbf{I}(\Omega, \Omega),$$

siendo \mathbf{I} la bilineal

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i \rangle \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{y} \rangle),$$

llamada momento de inercia. Notar que \mathbf{I} define una métrica en $so(3)$. El Lagrangiano del sistema será

$$L(\mathbf{r}_{cm}, A, \mathbf{v}_{cm}, \Omega) = \frac{N}{2} \langle \mathbf{v}_{cm}, \mathbf{v}_{cm} \rangle + \frac{1}{2} \mathbf{I}(\Omega, \Omega) - V \circ i(\mathbf{r}_{cm}, A).$$

Si V corresponde sólo a la fuerza gravitatoria sobre las partículas, entonces $V \circ i(\mathbf{r}_{cm}, A) = -N \langle \mathbf{g}, \mathbf{r}_{cm} \rangle$.

2.3.2. Potenciales dependientes de la velocidad

A pesar de que al deducir las ecuaciones de E-L para un sistema de partículas hemos supuesto que las fuerzas aplicadas no dependen de las velocidades ni del tiempo, existen sistemas donde eso pasa y sin embargo el formalismo Lagrangiano sigue siendo válido. Un caso particularmente interesante es el de la *fuerza de Lorentz*.

Consideremos una partícula de carga e , sometida sólo a la acción de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y uno magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. La ecuación de Newton para la misma es (tomando la velocidad de la luz c igual a 1)

$$\mathbf{a} = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (43)$$

siendo $\mathbf{F} = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ la fuerza de Lorentz correspondiente (que es claramente dependiente de la velocidad y del tiempo). Representemos a \mathbf{E} y \mathbf{B} en términos de un potencial $\phi(\mathbf{r}, t)$ y un potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Luego, la ecuación (43) puede escribirse como las ecuaciones de E-L para el Lagrangiano dependiente del tiempo

$$L : T\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por $L = T - U$, siendo $T = 1/2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ la energía cinética de la partícula y

$$U = e (\phi - \langle \mathbf{A}, \mathbf{v} \rangle)$$

la energía *potencial* (ver [1], pág. 26, para una demostración).

2.3.3. Coordenadas cíclicas: simetría y conservación

Consideremos un sistema Lagrangiano (Q, L) , y fijemos algún mapa (U, φ) , con $\varphi = (q^1, \dots, q^n)$. Se llama *momento canónicamente conjugado* a q^i a las derivadas parciales

$$p_i = \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} (q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \quad (44)$$

Se dice que q^i es una coordenada *cíclica* si

$$\frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} = 0, \quad (45)$$

i.e. $L \circ \varphi_*^{-1}$ no depende de una coordenada q^i .

Proposición. Si q^i es una coordenada cíclica, luego su momento canónicamente conjugado es una *constante de movimiento*, es decir, p_i se mantiene constante a lo largo de toda trayectoria del sistema.

Demostración. Si $(q^1(t), \dots, q^n(t))$ es una solución de

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right] - \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} = 0,$$

entonces, dado que q^i es cíclica, y por ende se cumple (45), tenemos por definición de p_i [ver (44)] que

$$\frac{d}{dt} p_i = 0,$$

como queríamos mostrar. ■

Ejemplo. En el caso de las masas unidas por una varilla y sujetas a la acción de la gravedad, el Lagrangiano asociado [ver (38) y (39)] es independiente de las coordenadas x , y y ϕ . Luego, sus momentos canónicos conjugados

$$p_x = \dot{x}, \quad p_y = \dot{y} \quad y \quad p_\phi = \frac{l^2}{2} \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

serán constantes de movimiento. La conservación de los mismos es evidente de las ecuaciones de movimiento (40) y (41). Notar que p_x y p_y describen los momentos lineales del sistema en las direcciones x e y , mientras que p_ϕ describe el momento angular del sistema en la dirección z . ◆

La existencia de una coordenada cíclica se puede ver como una *invariancia* o *simetría* del Lagrangiano ante la transformación $q^i \mapsto q^i + \varepsilon$. Para ver esto, supongamos que (U, φ) es un mapa tal que $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$. Luego, que $L \circ \varphi_*^{-1}$ no dependa de q^i es equivalente a la igualdad

$$L \circ \varphi_*^{-1} (q^1, \dots, q^i + \varepsilon, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = L \circ \varphi_*^{-1} (q^1, \dots, q^i, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n),$$

para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Consideramos transformaciones más generales, dependiente de parámetros reales $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, de la forma

$$\begin{cases} q^i \mapsto Q^i = Q^i(q^1, \dots, q^n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k), \\ \dot{q}^i \mapsto \dot{Q}^i = \sum_j \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \dot{q}^j, \end{cases} \quad (46)$$

con $Q^i : \varphi(U) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q^i(q^1, \dots, q^n; 0, \dots, 0) = q^i$. La condición de invariancia para L ante esta familia (multiparamétrica) de transformaciones se lee

$$L \circ \varphi_*^{-1} \left(Q^1, \dots, Q^n; \dot{Q}^1, \dots, \dot{Q}^n \right) = L \circ \varphi_*^{-1} \left(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n \right), \quad \forall \varepsilon_j.$$

Si derivamos la igualdad de arriba respecto de los parámetros ε_j e igualamos los últimos a cero tenemos

$$\sum_i \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} Q^{ij} + \sum_{i,k} \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial Q^{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^k = 0, \quad j = 1, \dots, k;$$

siendo $Q^{ij} = \partial Q^i / \partial \varepsilon_j|_{\varepsilon=0}$. Es fácil ver a partir de la última ecuación que sobre las trayectorias del sistema las funciones

$$c^j = \sum_i p_i Q^{ij}$$

son constantes de movimiento. Dejamos la demostración de ésto último como ejercicio.

Existen extensiones globales (i.e. válidas no sólo en cartas locales) de la idea desarrollada arriba, es decir, existen nociones de simetría o invariancia globales del Lagrangiano que tienen asociada una familia de constantes de movimiento (ver refs. [4, 5]). A continuación, vamos a desarrollar una de ellas. Para eso necesitamos considerar los siguientes elementos.

- Sea G un grupo de Lie que actúa sobre Q a través de

$$\phi : G \times Q \rightarrow Q.$$

Si la acción es local, es decir, si sólo está definida sobre una carta U , podemos cambiar arriba y en lo que sigue Q por el abierto U .

Las transformaciones antes analizadas están asociadas a acciones locales. En el caso de las coordenadas cíclicas el grupo involucrado es $G = \mathbb{R}$, y la acción

$$\phi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U \quad : \quad (\varepsilon, u) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(u) + (0, \dots, \varepsilon, \dots, 0)),$$

con ε en la posición i -ésima.

- Definamos para cada $g \in G$ la aplicación

$$\phi_g : Q \rightarrow Q \quad : \quad q \mapsto \phi(g, q)$$

y su tangente

$$(\phi_g)_* : TQ \rightarrow TQ.$$

Vamos a decir que L es *invariante ante la acción de G* (definida por ϕ) si

$$L \circ (\phi_g)_* = L, \quad \forall g \in G.$$

- Para cada elemento η del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ de G , tenemos un campo vectorial sobre Q dado por la fórmula

$$(\eta_Q)_q = \frac{d}{ds} [\phi_{\exp(\eta s)}(q)]_{s=0}.$$

En el caso de las coordenadas cíclicas, $(\eta_Q)_q$ está definido sólo a lo largo de U y vale

$$(\eta_Q)_q = \varphi_{*,q}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right).$$

- La versión intrínseca de la idea de momento canónicamente conjugado esta dada por la de *derivada de L a lo largo de la fibra* $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$, también conocida como *transformada de Legendre* asociada a L , que se define como

$$\langle \mathbb{F}L(X), Y \rangle = \left. \frac{dL(X + tY)}{dt} \right|_{t=0}, \quad \text{con } X, Y \in T_q Q.$$

De hecho, si para cada mapa (U, φ) de Q , y su inducido $(T_U Q, \varphi_*)$ correspondiente, utilizamos en T^*Q el mapa dual $(T_U^* Q, (\varphi^*)^{-1})$, tendremos que

$$(\varphi^*)^{-1} \circ \mathbb{F}L \circ \varphi_*^{-1} (q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = (q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n),$$

con

$$p_i = \frac{\partial (L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} (q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n).$$

El siguiente teorema establece una conexión entre las simetrías de un Lagrangiano y las leyes de conservación del sistema que éste define (para una demostración, ver [4], pág. 285).

Teorema de Nöether. Sea (Q, L) un sistema Lagrangiano y $\phi : G \times Q \rightarrow Q$ una acción de un grupo de Lie G sobre Q . Si L es invariante ante la acción de G , luego, para cada $\eta \in \mathfrak{g}$ tendremos que la función $c_\eta : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$c_\eta(X) = \left\langle \mathbb{F}L(X), (\eta_Q)_q \right\rangle, \quad X \in T_q Q,$$

es constante a lo largo de toda trayectoria del sistema. ■

Podemos condensar todas las cantidades conservadas c_η en una única aplicación

$$J : TQ \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

denominada *aplicación momento*, que en este caso está dada por la ecuación

$$\langle J(X), \eta \rangle_{\mathfrak{g}} = \left\langle \mathbb{F}L(X), (\eta_Q)_q \right\rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ denota el pairing entre \mathfrak{g} y su dual. La aplicación momento es un objeto central en la *teoría de reducción* [4, 5], sobre la cual no vamos a hablar en estas notas.

2.3.4. Formulación variacional

En esta sección vamos a mostrar que las trayectorias de un sistema Lagrangiano pueden definirse como las extremales de una funcional.

Consideremos un par (Q, L) con $L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiano dependiente del tiempo), i.e. $L = L(v, t)$, con $v \in TQ$ y $t \in \mathbb{R}$.

Los conceptos que introduciremos a continuación forman parte del llamado *cálculo de variaciones*. Existen diversos problemas de la física y la matemática que se plantean en dicho contexto. Para una revisión del tema se pueden consultar los libros [1, 3] y las citas allí contenidas.

Dados $q_1, q_2 \in Q$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, denotemos por $\Omega(t_1, t_2; q_1, q_2)$ al espacio de curvas $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow Q$ tales que $\gamma(t_1) = q_1$ y $\gamma(t_2) = q_2$. En tal espacio, definamos la función (o funcional)

$$S_L[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\gamma}(t), t) dt,$$

llamada **acción**, donde por

$$\dot{\gamma} : [t_1, t_2] \rightarrow TQ \quad : \quad t \mapsto \dot{\gamma}(t)$$

estamos denotando la derivada de $\gamma(t)$, i.e.

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma_{*,t}(d/dt|_t) \in T_{\gamma(t)}Q.$$

Definición. Una **variación** de una curva $\gamma \in \Omega(t_1, t_2; q_1, q_2)$ es una aplicación

$$\Delta\gamma : [t_1, t_2] \times \mathbb{R} \rightarrow Q \quad : \quad (t, \lambda) \mapsto \Delta\gamma(t, \lambda)$$

tal que:

- a. $\Delta\gamma(t, 0) = \gamma(t)$, para todo $t \in [t_1, t_2]$;
- b. $\Delta\gamma(t_1, \lambda) = q_1$ y $\Delta\gamma(t_2, \lambda) = q_2$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notemos del punto 2 que para cada λ la curva

$$\Delta\gamma_\lambda : [t_1, t_2] \rightarrow Q \quad : \quad t \mapsto \Delta\gamma(t, \lambda)$$

está en $\Omega(t_1, t_2; q_1, q_2)$.

Definición. Una curva γ es un **extremo** o **extremal** de $S[\gamma]$ si para toda variación $\Delta\gamma$ se tiene

$$\left. \frac{dS_L[\Delta\gamma_\lambda]}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{S_L[\Delta\gamma_\lambda] - S_L[\gamma]}{\lambda} = 0.$$

Ejemplo. Si queremos hallar una función $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\gamma(t_1) = q_1$ y $\gamma(t_2) = q_2$, y que su gráfico defina en \mathbb{R}^3 una superficie de revolución de área mínima, debemos minimizar $S_L[\gamma]$ con

$$L : T\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(v, t) = 2\pi t \sqrt{1 + v^2}.$$

Ésto se debe a que el área de la superficie de revolución definida por γ vale

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} t \sqrt{1 + \dot{\gamma}^2(t)} dt. \quad \blacklozenge$$

Teorema. Una curva γ es extremo de $S[\gamma]$ si y sólo si para todo mapa (U, φ) , tal que γ interseca a U , se cumple que $\varphi(\gamma(t)) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ es solución de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

para todo t tal que $\gamma(t) \in U$.

Demostración. Supongamos que γ es extremo de $S[\gamma]$, y tomemos un mapa (U, φ) por donde pasa γ . Sea $(t_3, t_4) \subset [t_1, t_2]$ el intervalo donde $\gamma(t) \in U$. Tomemos una variación de γ tal que

$$\Delta\gamma(t, \lambda) = \gamma(t), \quad \forall t \in [t_1, t_2] - (t_3, t_4). \quad (47)$$

Luego,

$$\begin{aligned} S[\Delta\gamma_\lambda] &= \int_{t_1}^{t_3} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) dt + \int_{t_3}^{t_4} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) dt + \int_{t_4}^{t_2} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_3} L(\dot{\gamma}(t)) dt + \int_{t_3}^{t_4} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) dt + \int_{t_4}^{t_2} L(\dot{\gamma}(t)) dt, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\left. \frac{dS[\Delta\gamma_\lambda]}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \int_{t_3}^{t_4} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) dt \right|_{\lambda=0} = \int_{t_3}^{t_4} \left. \frac{d}{d\lambda} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) \right|_{\lambda=0} dt.$$

Dado que toda variación cumple $\Delta\gamma_0 = \gamma$, tendremos para ε suficientemente chico que

$$\Delta\gamma(t, \lambda) \in U, \quad \forall t \in (t_3, t_4), \quad \forall |\lambda| < \varepsilon.$$

En consecuencia, podemos escribir

$$L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) = L \circ \varphi_*^{-1} \circ \varphi_*(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) \quad \forall t \in (t_3, t_4), \quad \forall |\lambda| < \varepsilon.$$

Por otro lado, definiendo

$$\varphi(\Delta\gamma_\lambda(t)) = (\Delta q_\lambda^1(t), \dots, \Delta q_\lambda^n(t)), \quad \varphi_*(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) = (\Delta q_\lambda^1(t), \dots, \Delta q_\lambda^n(t); \Delta \dot{q}_\lambda^1(t), \dots, \Delta \dot{q}_\lambda^n(t)),$$

y usando regla de la cadena,

$$\frac{d}{d\lambda} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{d\lambda} + \frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{d\lambda} (\Delta \dot{q}_\lambda^i(t)) \right]. \quad (48)$$

Dado que

$$\frac{d}{d\lambda} (\Delta \dot{q}_\lambda^i(t)) = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{d\lambda} \right],$$

el segundo término de (48) lo podemos re-escribir

$$\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{d\lambda} (\Delta \dot{q}_\lambda^i(t)) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{d\lambda} \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right] \frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{d\lambda}.$$

Si utilizando esta última fórmula integramos (48), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_3}^{t_4} L(\Delta\dot{\gamma}_\lambda(t)) dt &= - \int_{t_3}^{t_4} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right] - \frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{d\lambda} dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{d\lambda} \Big|_{t_3}^{t_4}. \end{aligned}$$

A partir de (47) tenemos que $\Delta\gamma(t_3, \lambda) = \gamma(t_3)$ y $\Delta\gamma(t_4, \lambda) = \gamma(t_4)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, por lo cual

$$\frac{d(\Delta q_\lambda^i(t_3))}{d\lambda} = \frac{d(\Delta q_\lambda^i(t_4))}{d\lambda} = 0.$$

De todo esto concluimos que

$$0 = \frac{dS[\Delta\gamma_\lambda]}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = - \int_{t_3}^{t_4} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right] - \frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right) \Big|_{\lambda=0} \frac{d(\Delta q_\lambda^i(t))}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} dt.$$

Notar que al evaluar en $\lambda = 0$ el factor entre paréntesis (dentro de la sumatoria) queda evaluado en la curva

$$(\Delta q_0^1(t), \dots, \Delta q_0^n(t)) = \varphi(\Delta\gamma_0(t)) = \varphi(\gamma(t)) = (q^1(t), \dots, q^n(t)).$$

Dado que $\Delta q_\lambda^i(t)$ es una función arbitraria, la única posibilidad de que la ecuación de arriba se cumpla es que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} \right] - \frac{\partial(L \circ \varphi_*^{-1})}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

como queríamos mostrar. La recíproca la dejamos como ejercicio para el lector. ■

A partir de este teorema, es posible definir a los sistemas Lagrangianos como los sistemas dinámicos cuyas trayectorias $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow Q$ extreman la funcional

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\gamma}(t)) dt,$$

siendo Q una n -variedad y $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (podemos también introducir dependencia en el tiempo). Los sistemas dinámicos cuyas trayectorias están definidas de esta manera se dice que satisfacen un **Principio variacional**, o más concretamente, que satisfacen el **Principio de Mínima acción**, o **Principio de Hamilton**.

3. Formulación Hamiltoniana de sistemas mecánicos

Hamilton desarrolló inicialmente esta teoría para estudiar cuestiones de óptica geométrica. En 1834 mostró que su formalismo se aplicaba también a la mecánica. El lector interesado puede encontrar transcripciones online de los trabajos originales de Hamilton en [6].

Un estudio detallado de los temas tratados en esta sección puede encontrarse, por ejemplo, en [1, 3, 4, 5].

3.1. Mecánica Hamiltoniana de una partícula con potencial

Consideremos una partícula en \mathbb{R}^3 de masa m , sujeta a una fuerza dada por $F = -\nabla V$. La función V a valores reales definida en \mathbb{R}^3 (o en alguna región de \mathbb{R}^3) se denomina *función potencial*. La segunda ley de Newton ($F = ma$) nos dice que

$$-\frac{\partial V}{\partial q^i} = m\ddot{q}^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si escribimos el Lagrangiano

$$L = K - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q), \tag{49}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange coinciden con las dadas por la ley de Newton:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} \Leftrightarrow -\frac{\partial V}{\partial q} = m\ddot{q}.$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de *segundo* orden. La técnica usual para transformarlo en un sistema de *primer* orden consiste en incorporar \dot{q} como una nueva variable. Haciendo esencialmente lo mismo, introducimos

$$p = m\dot{q},$$

que es el *momento* o *cantidad de movimiento*, y así podemos escribir

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (50a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}. \quad (50b)$$

Definamos ahora el *Hamiltoniano*

$$H = K + V$$

como la suma de la energía cinética y la energía potencial, *expresadas en función de q y p* . Para nuestra partícula con potencial, obtenemos

$$H(q, p) = \frac{1}{2}m \left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (51)$$

Las ecuaciones (50) se pueden escribir ahora como

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (52a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (52b)$$

Estas ecuaciones se conocen como *ecuaciones de Hamilton*.

Espacio de fase Consideremos el “espacio con ejes q y p ”; esto es, $\mathbb{R}^6 \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, donde pensamos el primer factor \mathbb{R}^3 como correspondiente a q y el segundo factor a p . Este es el *espacio de fase* para el sistema de una partícula considerado. (En realidad, veremos después que el espacio de fase es más correctamente $T^*\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^*$.) Una curva $(q(t), p(t))$ en el espacio de fase es solución de las ecuaciones de Hamilton (52) si y sólo si es una línea de flujo del *campo Hamiltoniano* $X_H := (\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$.

3.2. Momento generalizado

Revisemos la definición de $p = m\dot{q}$ de la sección anterior más detenidamente. Observemos que si L está dado por (49), entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} = p.$$

Esto nos lleva a definir, para un Lagrangiano más general, por ejemplo uno que no esté dado por una expresión del tipo (49), el *momento generalizado*

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (53)$$

Cada $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$ se denomina *momento conjugado* a q^i . Observemos que esta expresión pone de manifiesto la naturaleza del momento, en el sentido de que p no es un vector

sino un *covector*. La expresión $p = m\dot{q}$ de la sección anterior presupone, en realidad, una identificación entre vectores y covectores a través de la métrica Euclídea estándar en \mathbb{R}^3 . Así, el Hamiltoniano H es en realidad una función definida en $T^*\mathbb{R}^3$. Denotaremos las componentes de los covectores mediante subíndices, por lo que escribimos $p = (p_1, p_2, p_3)$.

Transformación de Legendre Supongamos, olvidándonos por ahora de los Lagrangianos y los momentos, que se tiene una función suficientemente diferenciable $y = f(x)$ convexa, es decir, $f''(x) > 0$. La *transformación de Legendre* de f será una función g de una nueva variable p . La idea es pensar a la variable x en el espacio vectorial \mathbb{R} , y a p en su dual \mathbb{R}^* . Es claro que \mathbb{R}^* puede identificarse con \mathbb{R} , porque a cada número p se le hace corresponder la funcional $x \mapsto px$. Sea entonces $p \in \mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R}$, y consideremos la recta $y = px$. Sea $x = x(p)$ el punto donde la función $F(p, x) = px - f(x)$ tiene un máximo⁸ con respecto a x , es decir, el punto x en el que la curva $y = f(x)$ está más cerca de la recta $y = px$ en la dirección vertical. Definimos entonces $g(p) = F(p, x(p))$. El punto $x(p)$ está definido por la condición $\partial F/\partial x = 0$, es decir, $f'(x) = p$. Observemos que el teorema de la función inversa nos dice que, como $f''(x) \neq 0$, podemos despejar x de esta última ecuación.

Ejemplo. Si $f(x) = mx^2/2$, entonces $F(p, x) = px - mx^2/2$. Así, $p = f'(x) = mx$ y $x(p) = p/m$. Por lo tanto

$$g(p) = F\left(p, \frac{p}{m}\right) = \frac{p^2}{m} - \frac{mp^2}{2m^2} = \frac{p^2}{2m}.$$

El lector reconocerá $g(p)$ como el término de energía cinética en el Hamiltoniano (51) para una partícula⁹. ♦

Consideremos ahora una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Escribamos $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ y definamos $p = (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$ por

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De esta ecuación se puede despejar $x = x(p)$ si

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0$$

(condición que asumiremos que f cumple). Definimos $F(p, x) = \langle p, x \rangle - f(x)$, donde $\langle p, x \rangle \equiv px$ denota el “pairing” natural entre un espacio vectorial y su dual. Entonces la transformación de Legendre de f es, por definición, la función $g: (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(p) = F(p, x(p)) = \langle p, x(p) \rangle - f(x(p)).$$

Utilizaremos la transformación de Legendre para construir el Hamiltoniano en la siguiente sección.

⁸Pruebe que, de existir, este punto es único.

⁹En \mathbb{R}^1 . Si bien (51) correspondía a una partícula en \mathbb{R}^3 , la analogía es inmediata.

3.3. Las ecuaciones de Hamilton

Para el caso de una partícula con potencial, hemos hallado un Hamiltoniano “a mano”, aplicando las ideas usuales de convertir un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en uno de primer orden, aunque con una ligera variación (en vez de \dot{q} , tomamos $m\dot{q}$ como nueva variable). Veamos cómo la transformación de Legendre nos sirve para sistematizar la obtención del Hamiltoniano en un caso general. Por supuesto, las definiciones ya dadas de Hamiltoniano, ecuaciones de Hamilton y momento serán casos particulares de las que presentaremos a continuación.

Supongamos que tenemos un Lagrangiano¹⁰ $L: T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, del cual asumimos que vale

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0,$$

es decir, para cada q fijo, L es una función de \dot{q} como las consideradas para la transformación de Legendre. Si recordamos la definición de momento generalizado (53), vemos que ésta coincide con la forma de definir p usada para la transformación de Legendre. Podemos aplicar la transformación a la función $L(q, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, función de \dot{q} solamente, y obtenemos la función que llamaremos el *Hamiltoniano* $H: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}).$$

Aquí \dot{q} está expresado en términos de p por la fórmula $p = \partial L / \partial \dot{q}$, y depende además de q .

Observación: Se habla de “transformación de Legendre” para referirse tanto a la construcción de la función (en este caso, de H a partir de L) como a la obtención de las nuevas variables (aquí, (q, p) a partir de (q, \dot{q})).

Teorema 3.1. *Las ecuaciones de Euler-Lagrange son, en estas condiciones, equivalentes al sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden (ecuaciones de Hamilton)*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}$$

Demostración. Diferenciando $H = p\dot{q} - L$ se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp = \dot{q} dp + p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q},$$

pero los términos con $d\dot{q}$ se destruyen pues $p = \partial L / \partial \dot{q}$. Entonces

$$\frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp = \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq,$$

¹⁰Es también de interés el caso en que L depende del tiempo. En estas notas no lo consideraremos, por simplicidad.

de donde

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{\partial H}{\partial q}.\end{aligned}$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

se tiene, por la definición de p ,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p}.$$

Por lo tanto resulta

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q},\end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Hamilton.

Así probamos que si $q(t)$ satisface Euler-Lagrange entonces $(q(t), p(t))$ satisface las ecuaciones de Hamilton. La recíproca se prueba análogamente. Por lo tanto, los sistemas de Euler-Lagrange y de Hamilton son equivalentes. ■

Si estamos trabajando con un sistema mecánico donde el Lagrangiano está dado por la diferencia entre la energía cinética y la potencial, $L = K - V$, donde K es una forma cuadrática con respecto a \dot{q} y $V = V(q)$, entonces se puede probar que el Hamiltoniano es la *energía total* $H = K + V$.

3.4. Campos Hamiltonianos

En este momento tenemos un Hamiltoniano dependiente de dos variables n -dimensionales q y p . El objetivo de esta sección y de las siguientes es deshacernos finalmente de esta distinción entre posición y momento para escribir las ecuaciones en forma intrínseca, lo que en cierto sentido puede interpretarse como considerar una única variable $2n$ -dimensional. Esto puede parecer una cuestión puramente notacional al principio, pero resulta ser un fenómeno más profundo.

Dado un Hamiltoniano $H(q, p)$ definido en el espacio de fase $T^*\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, definamos el campo Hamiltoniano en $T^*\mathbb{R}^n$

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \tag{54}$$

(con la convención de suma). Las ecuaciones diferenciales para obtener las líneas de flujo de este campo son $(\dot{q}, \dot{p}) = X_H$, que son simplemente las ecuaciones de Hamilton.

Hay una forma intrínseca de definir X_H , que nos servirá para situaciones más generales. Se define en el espacio de fase $T^*\mathbb{R}^n$ la 2-forma

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

(En el caso $n = 1$, correspondiente a una partícula que se mueve a lo largo de una recta, ω es la 2-forma de área en $T^*\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$.) Esta es una 2-forma no degenerada, es decir que una ecuación de la forma $\mathbf{i}_X\omega = \omega(X, \cdot) = \alpha$, con α una 1-forma, define unívocamente el campo X . Veamos que la ecuación

$$\mathbf{i}_{X_H}\omega = dH \tag{55}$$

define X_H según la misma expresión (54) de arriba. Lo único que debemos hacer es verificar que el campo (54) satisface esta ecuación. En efecto,

$$\mathbf{i}_{X_H}\omega = \mathbf{i}_{X_H}(dq^i \wedge dp_i) = (\mathbf{i}_{X_H}dq^i) dp_i - (\mathbf{i}_{X_H}dp_i) dq^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i = dH.$$

Entonces, si H determina X_H a través de (55), y a su vez X_H representa las ecuaciones diferenciales de Hamilton (pensando en las líneas de flujo), podemos tomar (55) como nuestras nuevas ecuaciones de Hamilton.

3.5. Sistemas Hamiltonianos en fibrados cotangentes

En lugar de trabajar en $T^*\mathbb{R}^n$, podemos ir un paso más allá y pasar al contexto de variedades diferenciables en general.

Sea entonces Q una variedad (el espacio de configuraciones del sistema) y sea $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangiano. La transformación de Legendre es una aplicación $FL: TQ \rightarrow T^*Q$, que no es más que realizar la transformación que ya conocemos fibra por fibra, como sigue. Sea $q \in Q$, y denotemos la restricción de L a T_qQ por L_q . Entonces la derivada de L_q es una aplicación $DL_q: T_qQ \rightarrow L(T_qQ, \mathbb{R}) \equiv T_q^*Q$, donde $L(T_qQ, \mathbb{R})$ denota el espacio de aplicaciones lineales de T_qQ en \mathbb{R} . Para $w_q \in T_qQ$ definimos

$$FL(w_q) = DL_q(w_q) \in T_q^*Q.$$

Esta aplicación $FL: TQ \rightarrow T^*Q$ se denomina también *derivada de L a lo largo de la fibra*. Esta no es necesariamente una aplicación de fibrados vectoriales, aunque sí preserva la fibra. Si FL es un difeomorfismo local, decimos que el Lagrangiano es *regular*; si es un difeomorfismo global, entonces L es *hiperregular*. Se tiene que las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana son equivalentes en el caso hiperregular (ver [4] para una demostración). Supondremos en lo que sigue que L es hiperregular.

Para hablar de formulación Hamiltoniana debemos definir una función $H: T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ a partir del Lagrangiano, de la siguiente forma. Se define la *acción* $A: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$A(w_q) = FL(w_q) \cdot w_q$, y la *energía* mediante $E = A - L$. En coordenadas locales,

$$A = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

$$E = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L.$$

El Hamiltoniano H se define como $H = E \circ (FL)^{-1}: T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Formas canónicas en T^*Q Sea $\pi_Q: T^*Q \rightarrow Q$ la proyección canónica, con aplicación tangente $T\pi_Q: T(T^*Q) \rightarrow TQ$, y sean $\alpha_q \in T_q^*Q$, $v_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}(T_q^*Q)$. Definimos entonces la *1-forma canónica* θ_0 por

$$\langle \theta_0(\alpha_q), v_{\alpha_q} \rangle = \alpha_q(T\pi_Q(v_{\alpha_q})).$$

Si (q^1, \dots, q^n) son coordenadas locales en Q , se definen coordenadas en T^*Q tomando $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ como coordenadas en cada fibra. Entonces en coordenadas locales se tiene

$$\theta_0 = p_i dq^i.$$

Se define además la 2-forma (simpléctica) canónica, $\omega_0 = -d\theta_0$, que en coordenadas es

$$\omega_0 = dq^i \wedge dp_i,$$

coincidiendo con la ω que habíamos definido en $T^*\mathbb{R}^n$.

Las ecuaciones de Hamilton son entonces $\mathbf{i}_{X_H}\omega_0 = dH$.

3.6. Variedades simplécticas

En lugar de T^*Q , podemos considerar en general una variedad M provista de una 2-forma ω cerrada ($d\omega = 0$) y no degenerada ($\mathbf{i}_X\omega = 0 \Leftrightarrow X = 0$). Una tal variedad se dice *variedad simpléctica*, y ω una *forma simpléctica*. Toda variedad simpléctica tiene necesariamente dimensión par.

Dada una función $H: M \rightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir las ecuaciones de Hamilton en una variedad simpléctica cualquiera mediante $\mathbf{i}_{X_H}\omega = dH$, como ya el lector habrá adivinado.

Coordenadas canónicas El siguiente teorema muestra que toda variedad simpléctica es localmente como un fibrado cotangente, o más precisamente como $T^*\mathbb{R}^n$. Esto es, podemos elegir coordenadas locales (q, p) de forma tal que la forma simpléctica ω tiene la expresión $dq^i \wedge dp_i$.

Teorema 3.2 (Darboux). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Entonces en cada punto $m \in M$ existe una carta $\varphi: U \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$, con $m \in U$, tal que $\varphi_*(\omega|U) = \omega_0|U$. En particular, hay coordenadas locales q^i, p_i de M tales que $\omega|U = dq^i \wedge dp_i$.*

Estas cartas se llaman *cartas de Darboux* o *cartas canónicas*, y q^i y p_i se denominan *coordenadas canónicas*.

3.7. Invariancia de la forma de las ecuaciones de Hamilton

Sean M_1 y M_2 dos variedades y $f: M_1 \rightarrow M_2$ un difeomorfismo. Tomar pull-back por f de una función, k -forma o campo vectorial en M_2 consiste en “traer” en forma natural dicho objeto a M_1 utilizando f adecuadamente. Esto es, componiendo con f , con $Tf \times \cdots \times Tf$, o con Tf^{-1} respectivamente. Hace falta que f sea un difeomorfismo para poder tomar pull-back de un campo vectorial, pero no para funciones o formas diferenciales. La notación que utilizaremos para operación de pull-back por f será f^* , que es la utilizada, por ejemplo en [4].

Si (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) son variedades simplécticas y $f: M_1 \rightarrow M_2$ es un difeomorfismo que respeta la estructura simpléctica, es decir $f^*\omega_2 = \omega_1$, entonces se dice que f es una transformación canónica. Si se tiene un Hamiltoniano $H_2: M_2 \rightarrow \mathbb{R}$, se define $H_1 = f^*H_2 = H_2 \circ f: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 3.3. $X_{H_1} = f^*(X_{H_2})$.

Demostración. El campo Hamiltoniano X_{H_2} está definido por $\mathbf{i}_{X_{H_2}}\omega_2 = dH_2$. Tomando pull-back por f , tenemos

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{i}_{X_{H_2}}\omega_2) &= f^*(dH_2) \\ \mathbf{i}_{f^*(X_{H_2})}\omega_1 &= d(f^*H_2) = dH_1, \end{aligned}$$

lo que significa $f^*(X_{H_2}) = X_{H_1}$ pues ω_1 es no degenerada. ■

Una transformación canónica posee entonces la importante propiedad de *preservar la forma de las ecuaciones de Hamilton*, en el siguiente sentido. El campo Hamiltoniano X_{H_2} , que contiene la información sobre la evolución del sistema, está definido por la ecuación $\mathbf{i}_{X_{H_2}}\omega_2 = dH_2$. El pull-back de este campo por la transformación canónica f satisface una ecuación análoga: $\mathbf{i}_{f^*(X_{H_2})}\omega_1 = dH_1$.

Si Q_1 y Q_2 son variedades, sabemos que T^*Q_1 y T^*Q_2 poseen una estructura simpléctica canónica. Si $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$ es un difeomorfismo, entonces el levantamiento cotangente $T^*\varphi: T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$ resulta ser una transformación canónica, que recibe el nombre de *transformación puntual*.

En particular, si se tiene un cambio de coordenadas locales en Q , el cambio de coordenadas locales inducido en T^*Q preserva la forma de las ecuaciones.

No toda transformación canónica es de este tipo. La transformación puede “mezclar” las variables q y p de posición y momento.

Ejemplo. Consideremos una partícula en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que se mueve bajo una fuerza central. Es decir que el potencial V sólo depende de la distancia de la partícula al origen de coordenadas. Tomemos coordenadas polares (r, θ) en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, lo que da lugar a una transformación puntual del fibrado cotangente de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Debido a la hipótesis sobre el potencial, se tiene $V = V(r)$, y un sencillo cálculo muestra que la energía cinética de la

partícula se escribe como $m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2$. El Lagrangiano es $L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2 - V(r)$ y los momentos conjugados a r y a θ son, respectivamente,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Expresando la energía cinética en términos de p_r y p_θ , el Hamiltoniano queda

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r).$$

Lo dicho arriba nos asegura que las ecuaciones de movimiento de Hamilton presentan la estructura usual $\dot{q} = \partial H / \partial p$, $\dot{p} = -\partial H / \partial q$, donde $q = (r, \theta)$ y $p = (p_r, p_\theta)$. Es decir,

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - V'(r)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Observemos, de paso, que la última ecuación nos indica que el momento angular p_θ se conserva. ♦

Referencias

- [1] H. Goldstein, *Mecánica clásica*, Aguilar (1970).
- [2] W.M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press (1970).
- [3] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag (1980).
- [4] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundation of mechanics*, Benjamin-Cummings (1985).
- [5] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, Springer-Verlag (1994).
- [6] D.R. Wilkins, *On a General Method in Dynamics, by William R. Hamilton*. <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Dynamics/>. School of Mathematics, Trinity College, Dublin. (Último acceso junio 2006.)

VARIETADES PLANAS Y GRUPOS CRISTALOGRAFICOS

JORGE LAURET

1. INTRODUCCIÓN.

En el Congreso Internacional de Matemáticos realizado en París en el año 1900, David Hilbert propuso una lista de problemas abiertos que él consideraba los más importantes del momento (una lista realizada en el año 2000 de los problemas abiertos más famosos en la actualidad se puede encontrar en www.claymath.org/millennium/). Uno de ellos, el número 18 para ser más precisos, hacía la siguiente pregunta (entre otras):

¿Hay en el espacio euclídeo n -dimensional ... sólo una cantidad finita de clases de grupos de movimientos rígidos esencialmente diferentes con dominio fundamental compacto?

Este problema involucra y concierne a varias ramas de la Matemática y la Física, como por ejemplo la Cristalografía. La forma natural de imaginar un cristal es como un sistema de moléculas entrelazadas (o bolas conectadas por varas) que puede ser continuado en todas las direcciones y llena por completo el espacio. La propiedad fundamental requerida para un tratamiento matemático de los cristales es la existencia de una pequeña porción del cristal que actúa como una especie de bloque o ladrillo para toda la estructura, la cual debe ser por supuesto de una forma bien especial para que pueda pegarse adecuadamente y llenar todo el espacio. El enfoque matemático para el estudio de los cristales es reemplazar este ‘dibujo’ del cristal por el grupo de movimientos rígidos del espacio euclídeo \mathbb{R}^n que lo dejan invariante. El dominio fundamental de la acción corresponde entonces al ‘ladrillo’ antes mencionado y la forma de llenar todo es mediante traslaciones. Puede haber sin embargo también otras simetrías del cristal con puntos fijos como rotaciones y reflexiones.

Otra área de la Matemática relacionada con el problema de Hilbert es la Geometría Riemanniana. Una variedad plana es un espacio donde uno puede hablar de geometría (distancia, ángulos, curvatura, ‘líneas rectas’, etc.) y además esa geometría se comporta localmente como la más conocida: la geometría euclídea. Esto significa que cerca de cada punto uno puede introducir coordenadas de tal forma que con respecto a ellas las reglas de la geometría euclídea sean válidas, aunque uno no puede hacer esto

Le agradezco al Comité Académico del **II Encuentro de Geometría Diferencial**, realizado del 6 al 11 de Junio de 2005 en La Falda, Córdoba, por la invitación para dar este curso.

globalmente, es decir en todo el espacio. Las variedades planas que son compactas son precisamente los cocientes de la forma \mathbb{R}^n/Γ , donde Γ es uno de los grupos de movimientos rígidos del espacio euclídeo considerados en la pregunta de Hilbert.

Es así como este problema genera una interacción muy rica entre la ‘geometría’ y el ‘álgebra’.

A pesar del pesimismo de Hilbert sobre una rápida solución del problema (varios de los otros problemas aún se encuentran abiertos), en 1910 L. Bieberbach (i.e. sólo diez años después del congreso de París) logró dar una respuesta positiva a la pregunta (con su correspondiente demostración por supuesto ...).

En este curso, estudiaremos la prueba de Bieberbach en su versión moderna, la cual usa por ejemplo cohomología de grupos y teoría de representaciones enteras de grupos finitos. La intención de estas notas, que no son ‘notas de curso’ en el sentido usual, es la de dar un resumen de las nociones y resultados que se verán en el curso, y carecen por completo tanto de demostraciones como de ejemplos. En otras palabras, pretenden solamente ser un material de ‘lectura’ que sirva como guía para entender el problema de Hilbert y la prueba de Bieberbach.

En la Sección 2 se dan algunos preliminares sobre geometría diferencial y Riemanniana de una forma escueta y algo informal. Los llamados Teoremas de Bieberbach se encuentran en la Sección 3.

No se reclama ningún tipo de originalidad de estas notas, las cuales están totalmente basadas en partes del libro [2] y el artículo [3]. Para un estudio más profundo de este tema se recomienda fuertemente la lectura de dicha literatura como un primer paso.

2. VARIEDADES PLANAS.

2.1. Variedades diferenciables. Una *variedad diferenciable* es un espacio topológico Hausdorff M munido de una colección $\{U_i\}_{i \in I}$ de abiertos y homeomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, V_i abierto de \mathbb{R}^n (n está fijo y se llama la *dimensión* de M), tales que

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

y cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces

$$(1) \quad \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : V_j \rightarrow V_i$$

es C^∞ (en el sentido usual para funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n) donde está definida, es decir en $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. Se asume también que dicha colección es maximal en el sentido que todo par (U, φ) que satisface (1) pertenece a la colección.

Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto de M , se dice *diferenciable* (o C^∞ , o suave) si

$$f \circ \varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow \mathbb{R}$$

es C^∞ en $\varphi_i(U \cap U_i)$ para todo $i \in I$, y se denota por $C^\infty(U)$ al espacio de todas las funciones diferenciables de U en \mathbb{R} . Una función $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades diferenciables se dice *diferenciable* si es continua y $\varphi \circ f \in C^\infty(f^{-1}(U))$ para todo (U, φ) de N , y se la llama *difeomorfismo* si es biyectiva y su inversa también es diferenciable.

Los pares (U, φ) son llamados *sistemas de coordenadas* y si

$$\varphi = (x_1, \dots, x_n), \quad x_k : U \rightarrow \mathbb{R},$$

entonces para todo $p \in M$, los números $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ son las *coordenadas* de p según el sistema (U, φ) .

La noción de derivada direccional se generaliza de la siguiente manera: un *vector tangente* v en $p \in M$ es una función lineal

$$v : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

donde U es algún entorno abierto de p , que satisface

$$v(fg) = v(f)g + fv(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(U).$$

El conjunto de todos los vectores tangentes en p forma un espacio vectorial denotado por $T_p M$ y llamado el espacio tangente a M en p . Todo sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ determina n vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ en todo $p \in U$ de la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) := \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} f \circ \varphi^{-1} = \frac{d}{dt}|_0 f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i), \quad \forall f \in C^\infty(U).$$

Los vectores tangentes $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$ forman una base de $T_p M$, lo que muestra que $\dim T_p M = n = \dim M$. La *diferencial* (o derivada) de una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ se define en cada punto $p \in M$ como la transformación lineal $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ dada por

$$(df)_p(v)(g) = v(g \circ f), \quad \forall g \in C^\infty(U), v \in T_p M,$$

donde U es un entorno abierto de $f(p)$.

Otra interpretación de los vectores tangentes es como ‘derivada de curvas’: una *curva* C^∞ en M es una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\varphi \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es C^∞ donde esté definida para todo sistema de coordenadas (U, φ) . Si $\alpha(t_0) = p$ entonces queda definido un vector tangente $\dot{\alpha}(t_0)$ en p por

$$\dot{\alpha}(t_0)(f) = \frac{d}{dt}|_{t_0} f \circ \alpha,$$

el cual es llamado vector velocidad de α (o derivada de α).

Un campo C^∞ en M es una función X que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $X_p \in T_p M$ de tal forma que la función $p \mapsto X_p(f)$ es diferenciable para toda $f \in C^\infty(M)$.

2.2. Variedades Riemannianas. Una *métrica Riemanniana* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en una variedad diferenciable M es una función que le asigna a cada $p \in M$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en $T_p M$ (definido positivo) de una manera diferenciable en el siguiente sentido: para cada par X, Y de campos C^∞ la función $p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$ es diferenciable. Al par $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se lo llama una *variedad*

Riemanniana. Se prueba usando particiones de la unidad que toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana.

En un sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, la métrica Riemanniana queda determinada por las funciones diferenciables

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p,$$

y recíprocamente, si $[\langle \cdot, \cdot \rangle_{ij}](p)$ es una matriz simétrica definida positiva que es diferenciable como función de p , entonces podemos usarla para definir una métrica Riemanniana en U . Por ejemplo, la métrica euclídea en \mathbb{R}^n satisface $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ij}(p) = \delta_{ij}$, es decir $[\langle \cdot, \cdot \rangle_{ij}](p) = I$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

La longitud de una curva $\alpha : [0, 1] \longrightarrow M$ de una variedad Riemanniana M se define por

$$l(\alpha) = \int_0^1 \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle_{\alpha(t)}^{\frac{1}{2}} dt,$$

y la distancia entre dos puntos $p, q \in M$ es

$$d(p, q) = \inf \{ l(\alpha) : \alpha(0) = p, \alpha(1) = q, \alpha \text{ curva } C^\infty \}.$$

Se cumple que (M, d) es un espacio métrico y la topología definida por d es la misma que tenía M . La variedad Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice *completa* si (M, d) es completo como espacio métrico (i.e. toda sucesión de Cauchy converge), y en consecuencia, toda variedad Riemanniana compacta es completa.

Una isometría $f : M \longrightarrow N$ entre dos variedades Riemannianas es un difeomorfismo tal que

$$\langle (df)_p X_p, (df)_p Y_p \rangle_{f(p)} = \langle X_p, Y_p \rangle_p, \quad \forall p \in M,$$

o equivalentemente, si

$$d_N(f(p), f(q)) = d_M(p, q), \quad \forall p, q \in M.$$

La composición usual de funciones define una estructura de grupo en el conjunto $\text{Iso}(M)$ de todas las isometrías de una variedad Riemanniana M en sí misma, y se podría decir que esta simple observación es la esencia de una profunda interacción entre la geometría y el álgebra.

2.3. Variedades planas. La noción de curvatura de una variedad Riemanniana es bastante más difícil de definir. En este curso, estamos interesados en las variedades planas, es decir de curvatura idénticamente cero en todos los puntos, las cuales se pueden definir de la siguiente manera.

Definición 2.1. Una variedad Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice *plana* si para todo $p \in M$ existe un sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ alrededor de p tal que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_q \right\rangle_q = \delta_{ij}, \quad \forall q \in U.$$

En otras palabras, una variedad se dice plana si localmente es isométrica al espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

Teorema 2.2. [Clifford-Klein] *Sea M una variedad Riemanniana simplemente conexa, completa y plana de dimensión n . Entonces M es isométrica a \mathbb{R}^n .*

Corolario 2.3. *Sea M una variedad Riemanniana conexa, completa y plana de dimensión n . Entonces M es isométrica a un cociente \mathbb{R}^n/Γ , donde $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ es un subgrupo de isometrías de \mathbb{R}^n que satisface las siguientes propiedades:*

(i) *La acción de Γ en \mathbb{R}^n es discontinua: todas las órbitas*

$$\Gamma(x) = \{\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$$

son subconjuntos discretos de \mathbb{R}^n .

(ii) *La acción de Γ en \mathbb{R}^n es libre: el único $\gamma \in \Gamma$ que tiene un punto fijo (i.e. $\gamma(x) = x$) es la identidad.*

Recíprocamente, si un subgrupo $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ satisface (i) y (ii), entonces el espacio topológico cociente \mathbb{R}^n/Γ posee una estructura de variedad diferenciable que admite una métrica Riemanniana plana.

Se deduce que para estudiar las variedades planas, es suficiente (y quizás incluso necesario) entender los grupos Γ en cuestión. Sería de gran utilidad entonces contar con una traducción de las propiedades geométricas y topológicas que deben poseer dichos grupos en propiedades algebraicas. Nuestro primer objetivo será por lo tanto describir el grupo $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$, que es donde viven todos ellos.

3. GRUPOS CRISTALOGRAFICOS Y DE BIEBERBACH.

Si $A \in O(n)$, el grupo de matrices ortogonales $n \times n$, y $a \in \mathbb{R}^n$, es fácil ver que la función $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\alpha(x) = Ax + a,$$

es una isometría de \mathbb{R}^n . Recíprocamente, no es difícil probar que toda isometría de \mathbb{R}^n es de esta forma, lo cual se puede considerar como un resultado fundamental de la geometría euclidea. Notar que esto es equivalente a decir que toda isometría que fija el cero es automáticamente lineal, la primera relación entre una propiedad ‘geométrica’ y una ‘algebraica’.

Dichas funciones son también llamadas *transformaciones* o *movimientos rígidos*. Si $\beta(x) = Bx + b$ con $B \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, entonces la composición de α y β satisface

$$\alpha \circ \beta(x) = ABx + a + Ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego el grupo de todas las isometrías de \mathbb{R}^n es lo que se llama el producto semidirecto

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

donde la estructura de grupo está dada por

$$(A, a)(B, b) = (AB, a + Ab).$$

Notar que el elemento identidad es $e = (I, 0)$, $(A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$ y

$$(A, 0)(I, b)(A, 0)^{-1} = (I, Ab).$$

La *parte lineal* (o rotacional) y la *parte traslacional* de elementos de $O(n) \times \mathbb{R}^n$ están definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} l : O(n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow O(n), & l(A, a) &= A, \\ t : O(n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, & t(A, a) &= a. \end{aligned}$$

Notemos que l es un homomorfismo de grupos y por lo tanto $l(\Gamma)$ (*parte lineal* o rotacional de Γ) es subgrupo de $O(n)$ para todo subgrupo $\Gamma \subset O(n) \times \mathbb{R}^n$. Pero t no lo es. Los elementos de la forma (I, a) con $a \in \mathbb{R}^n$ son llamadas *traslaciones puras* y denotaremos por $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ al conjunto de traslaciones puras de Γ .

Ya estamos en condiciones de describir varias interacciones entre propiedades geométricas, topológicas y algebraicas de subgrupos de $\text{Iso}(\mathbb{R}^n) = O(n) \times \mathbb{R}^n$.

Proposición 3.1. *Sea $\Gamma \subset O(n) \times \mathbb{R}^n$ un subgrupo.*

- (i) Γ es discontinuo si y sólo si Γ es discreto.
- (ii) Si la acción de Γ es libre entonces Γ es libre de torsión (i.e. $\gamma^k \neq e$ for all $\gamma \neq e, k \in \mathbb{Z}$). La recíproca es válida si Γ es discreto.
- (iii) Todo Γ discreto es cerrado.
- (iv) \mathbb{R}^n/Γ es compacto si y sólo si $t(\alpha\Gamma\alpha^{-1})$ genera todo \mathbb{R}^n para toda transformación afín $\alpha \in GL(n) \times \mathbb{R}^n$.

Definición 3.2. Un subgrupo $\Gamma \subset O(n) \times \mathbb{R}^n$ se dice *cristalográfico* si es discreto y \mathbb{R}^n/Γ es compacto. Si además Γ es libre de torsión entonces se lo llama un *grupo de Bieberbach*.

En definitiva entonces, las variedades compactas planas son cocientes \mathbb{R}^n/Γ del espacio euclídeo \mathbb{R}^n por un grupo de Bieberbach Γ (ver Corolario 2.3 y Proposición 3.1). Con el objeto de obtener una especie de guía, podemos formularnos las siguientes preguntas o curiosidades sobre un grupo de Bieberbach Γ , las cuales podrían ser consideradas ‘naturales’ de algún modo:

- (1) Sobre la estructura de Γ : ¿Cuántas traslaciones puras posee Γ ? (i.e. $\Gamma \cap \mathbb{R}^n = ?$). Es fácil ver que $\Gamma \cap O(n) = \{I\}$ pero, ¿cómo es el grupo $l(\Gamma) \subset O(n)$? ¿puede ser infinito?
- (2) Puesto que $\Pi_1(\mathbb{R}^n/\Gamma) \simeq \Gamma$ (grupo fundamental), sabemos que si \mathbb{R}^n/Γ es isométrica, difeomorfa, o apenas homeomorfa (en orden decreciente de generalidad) a otra \mathbb{R}^n/Γ' , entonces $\Gamma \simeq \Gamma'$. ¿Hasta qué punto la recíproca es válida?
- (3) ¿Cuántos grupos de Bieberbach (o cristalográficos) salvo isomorfismo hay en una dimensión dada n ? ¿Es el isomorfismo de grupos la relación ‘correcta’ a considerar en pos de contar cuántos hay?
- (4) La versión geométrica y/o topológica de la pregunta anterior sería: ¿Cuántas variedades compactas planas n -dimensionales salvo isometría

hay? ¿y salvo difeomorfismo? ¿y salvo homeomorfismo? ¿cuál es la relación ‘correcta’ en este caso?

Teorema 3.3. [Primer Teorema de Bieberbach]. *Sea $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^n) = \text{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ un grupo cristalográfico. Entonces*

- (i) $l(\Gamma)$ es un subgrupo finito de $\text{O}(n)$.
- (ii) $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ es un reticulado (o lattice) de \mathbb{R}^n (i.e. un subgrupo abeliano libre finitamente generado de rango n).

En particular, hay muchísimas traslaciones puras en Γ y sólo una cantidad finita de partes lineales. Este resultado concierne a las variedades planas de la siguiente manera:

Corolario 3.4. *Toda variedad compacta plana M está cubierta por un toro plano, y el cubrimiento es una isometría local. Además, el grupo de holonomía de M es finito.*

Sobre la prueba: Para $n = 2$ hay una prueba elemental usando solamente geometría euclídea del plano básica; más precisamente, que si una isometría del plano preserva la orientación (i.e. $\det = 1$) es necesariamente una rotación (si deja un punto fijo, que podría no ser el 0) o una traslación (si no tiene punto fijo). Para el caso general hay una prueba geométrica más o menos elemental en [1], y la prueba más conocida, que se puede encontrar en [4] y [2], es bastante larga. La misma está basada en entender las acciones de subgrupos del grupo ortogonal $\text{O}(n)$ desde varios puntos de vista, donde se entrelazan nociones algebraicas y geométricas constantemente. \square

Teorema 3.5. [Segundo Teorema de Bieberbach]. *Sea $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un isomorfismo entre dos grupos cristalográficos $\Gamma, \Gamma' \subset \text{O}(n) \times \mathbb{R}^n$. Entonces existe $\alpha \in \text{GL}(n) \times \mathbb{R}^n$ tal que $f(\gamma) = \alpha\gamma\alpha^{-1}$ para todo $\gamma \in \Gamma$.*

Es decir, todo isomorfismo entre grupos cristalográficos no es más que un cambio afín de coordenadas. En términos geométricos este teorema asegura lo siguiente:

Corolario 3.6. *Sean M y N dos variedades compactas planas, y supongamos que $\Pi_1(M) \simeq \Pi_1(N)$. Entonces M es afínmente equivalente a N . En particular, M y N son difeomorfas y por lo tanto homeomorfas (pero no necesariamente isométricas).*

Sobre la prueba: La forma moderna de demostrar este teorema es usar cohomología de grupos, aunque a un nivel bien elemental. Asumiendo cierto el primer teorema, el resultado se reduce simplemente a que el primer grupo de cohomología $H^1(\Phi, \mathbb{R}^n)$ de un grupo finito Φ a valores en el grupo aditivo \mathbb{R}^n es trivial. \square

Teorema 3.7. [Tercer Teorema de Bieberbach]. *En cada dimensión n , hay sólo una cantidad finita de grupos cristalográficos salvo conjugación por elementos de $\text{GL}(n) \times \mathbb{R}^n$ (o equivalentemente, por Teorema 3.5, salvo isomorfismo).*

La versión geométrica sería:

Corolario 3.8. *En cada dimensión, hay sólo una cantidad finita de variedades compactas planas salvo equivalencia afín. En particular, también hay un número finito, e incluso la misma cantidad, salvo difeomorfismo y homeomorfismo, pero no salvo isometría.*

Sobre la prueba: Consta de dos partes. La primera usa la teoría de extensiones de grupo y su relación con la cohomología de grupos. Más precisamente, el segundo grupo de cohomología $H^2(\Phi, \Lambda)$ de un grupo finito Φ a valores en un reticulado Λ de \mathbb{R}^n , parametriza las clases de isomorfismo de extensiones de Φ por Λ . Se prueba fácilmente que $H^2(\Phi, \Lambda)$ es finito, lo cual implica la finitud de las posibles extensiones. La segunda parte demuestra que hay sólo una cantidad finita de pares (Φ, Λ) a considerar, para lo cual hay que usar la teoría de representaciones enteras de grupos finitos. Concretamente, hay que probar que existen sólo un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos del grupo $GL_n(\mathbb{Z})$ (matrices $n \times n$ con coeficientes enteros cuyas inversas también poseen coeficientes enteros, o equivalentemente de $\det = \pm 1$). \square

REFERENCES

- [1] P. BUSER, A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups, *L'Enseignement Math.* **31** (1985), 137.
- [2] L. CHARLAP, Bieberbach groups and flat manifolds, *Universitext, Springer-Verlag* (1986).
- [3] H. HILLER, Crystallography and cohomology of groups, *Amer. Math. Monthly* **93** (1986), 765-779.
- [4] J. WOLF, Spaces of constant curvature, second edition, *Berkeley* (1972).

FAMAF Y CIEM, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, MEDINA ALLENDE S/N,
5000 CÓRDOBA, ARGENTINA

E-mail address: lauret@mate.uncor.edu

Curvas Geodésicas en superficies de revolución y generalizaciones

Marcos Salvai (FaMAF - CIEM)

Segundo Encuentro de Geometría Diferencial
La Falda - Junio de 2005

Esta es la versión sin figuras (y sin un par de ejemplos basados en dibujos) del apunte.

Por la corta duración del curso, y en parte para mantenerlo autocontenido y en un nivel elemental, he renunciado por ejemplo a la definición de superficie (que indudablemente tiene muchas ventajas sobre la noción de superficie parametrizada regular que presento) y también a la definición general de una métrica riemanniana en un abierto del plano (he considerado sólo aquellas para las cuales las curvas coordenadas son ortogonales). Por otra parte, advierto que voy de lo particular a lo general de manera muy pausada.

1 Notación y preliminares.

Sea $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función diferenciable, donde A es un abierto de \mathbb{R}^2 y k es un número natural. Para cada $(u_o, v_o) \in A$, la derivada parcial de ϕ con respecto a u en (u_o, v_o) es la velocidad de la curva $u \mapsto \phi(u, v_o)$ en $u = u_o$. La denotamos por

$$\phi_u(u_o, v_o) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_o, v_o) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi(u_o + t, v_o).$$

La definición de ϕ_v es análoga. Repasamos la regla de la cadena: Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ está definida por $\gamma(t) = \phi(u(t), v(t))$, entonces

$$\gamma'(t) = \phi_u(u(t), v(t)) u'(t) + \phi_v(u(t), v(t)) v'(t).$$

Si $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_k v_k$ es el producto escalar usual en \mathbb{R}^k , denotamos $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Si u, v son funciones de una variable, se cumple que

$$\langle u, v \rangle' = \langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle.$$

Con el siguiente ejemplo repasamos la diferencia entre rapidez y velocidad de una curva. La curva plana $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ tiene velocidad variable $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ pero rapidez constante $|\gamma'| = 1$.

Curvas regulares con inversa continua.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $I = (a, b)$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Decimos que una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es regular, si es suave (es decir,

cada coordenada x_i tiene derivadas de todos los órdenes, para $i = 1, \dots, n$) y además $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t .

Se dice que una curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uno a uno (es decir, sin autointersecciones: $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ sólo si $t_1 = t_2$) tiene inversa continua, si para toda sucesión t_n en el intervalo I y $t \in I$, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = \gamma(t) \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$$

(notar que como γ es uno a uno, $\gamma(s)$ determina s de manera unívoca).

Ejemplo 1 La curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3, 0)$, es uno a uno pero no regular: Como $\alpha'(t) = 0$ exactamente para $t = 0$, recorre el eje de las x 's deteniéndose en $t = 0$, pero no permanece detenida.

Ejemplo 2 La curva $\gamma : (-\pi/4, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = \text{sen}(2t)(\cos t, \text{sen } t)$ es regular, uno a uno, pero su inversa no es continua.

2 Superficies parametrizadas regulares.

Una **superficie parametrizada** es una función diferenciable $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde A es un abierto de \mathbb{R}^2 . Las curvas coordenadas de ϕ son las curvas $u \mapsto \phi(u, v_o)$, $v \mapsto \phi(u_o, v)$, con u_o, v_o fijos. La superficie parametrizada ϕ se dice **regular** si para cada $(u, v) \in A$ las velocidades de las curvas coordenadas por ese punto no son colineales, es decir, $\{\phi_u(u, v), \phi_v(u, v)\}$ es linealmente independiente para todo (u, v) .

Por ejemplo, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es una superficie parametrizada regular cuya imagen es el gráfico de f , pues $\phi_u = (1, 0, f_u)$, $\phi_v = (0, 1, f_v)$ son linealmente independientes.

En estas notas consideraremos sólo superficies con **curvas coordenadas ortogonales**, es decir, con $\langle \phi_u(u, v), \phi_v(u, v) \rangle = 0$ para todo (u, v) , especialmente las de revolución:

Superficies de revolución.

Sea $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un curva regular con inversa continua. Denotamos por r y h la primera y segunda coordenadas de c , es decir,

$$c(t) = (r(t), h(t)).$$

Suponemos además que $r(t) > 0$ para todo $t \in I$. La superficie de revolución con curva perfil c es la superficie parametrizada $\phi : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \phi(\theta, t) &= (r(t) \cos \theta, r(t) \text{sen } \theta, h(t)) \\ &= (r(t) (\cos \theta, \text{sen } \theta), h(t)). \end{aligned} \tag{1}$$

Hemos sacado factor común $r(t)$ en las dos primeras coordenadas para facilitar la visualización de la superficie:

Observamos que fijado $t \in I$, la curva $\theta \mapsto \phi(\theta, t)$ describe una circunferencia de radio $r(t)$ en un plano horizontal a altura $h(t)$ (por eso elegimos los nombres r y h para las coordenadas de la curva perfil). Se llama **paralelo** de altura $h(t)$. Puede haber más de un paralelo de una determinada altura.

Si fijamos θ , entonces $t \mapsto \phi(\theta, t)$ describe una curva congruente a la curva perfil contenida en un plano vertical que contiene el eje z . Se llama **meridiano** de ángulo θ .

Verificamos ahora que las curvas coordenadas de una superficie de revolución (los paralelos y meridianos) son ortogonales. Calculando

$$\begin{aligned}\phi_\theta(\theta, t) &= (r(t)(-\operatorname{sen} \theta, \operatorname{cos} \theta), 0) \\ \phi_t(\theta, t) &= (r'(t)(\operatorname{cos} \theta, \operatorname{sen} \theta), h'(t)),\end{aligned}$$

es fácil obtener que $\langle \phi_\theta(\theta, t), \phi_t(\theta, t) \rangle = 0$ para todo (θ, t) .

Ejemplo 3 Las superficies de revolución con curvas perfil

$$c_1(t) = (R, t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad c_2(t) = (t, 0) \quad (t > 0) \quad \text{y} \quad c_3(t) = (t, t^2) \quad (t > 0)$$

donde $R > 0$ constante, describen respectivamente un cilindro, un plano y un paraboloides de revolución (los dos últimos agujereados).

Ejemplo 4 Mapas y mapeos de la tierra. Consideramos a continuación dos curvas $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que recorren toda la semicircunferencia de radio 1 con $x > 0$. Luego las superficies de revolución asociadas tienen todas como imagen la esfera de radio 1 menos los polos, que llamamos S . Para cada una de tales curvas c sea ϕ la restricción al rectángulo $A = (-\pi, \pi) \times I$ de la correspondiente superficie de revolución. Notar que ϕ es uno a uno (aunque la imagen no cubre el meridiano de ángulo π). Si elegimos una unidad de longitud tal que el radio de la tierra mida 1, entonces podemos pensar $\phi : A \rightarrow S$ como un **mapeo** (a cada punto del **mapa** A le corresponde un punto de la tierra).

a) Si la curva perfil es

$$c : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t),$$

entonces los meridianos del mapeo asociado se recorren con rapidez unitaria, pues $|c'(t)| = |(-\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t)| = 1$.

b) Si la curva perfil es $c : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$, que describe la semicircunferencia como un gráfico de una función $x = x(y)$, entonces el mapeo asociado $\phi : A \rightarrow S$ se puede pensar como enroscando el rectángulo A en el cilindro de altura 2 donde la esfera está inscrita, y luego proyectar sobre la esfera, radialmente en cada plano horizontal.

Este mapeo ϕ tiene la propiedad de preservar áreas. Más precisamente, se cumple que

$$\text{área}(D) = \text{área}(\phi(D))$$

para todo dominio $D \subset A$. En otras palabras, una región cualquiera de la tierra y la región del mapa que le corresponde a través de ϕ , tienen la misma área. Este hecho ya era conocido por los griegos antes de Cristo.

Escalas infinitesimales

Para los mapeos de la esfera dados, la escala no es constante, pues dada una curva α en A de longitud ℓ , la longitud de la curva $\phi \circ \alpha$ en S depende no sólo de ℓ , sino también de α . Por ejemplo, para el mapeo del Ejemplo 4 (a), si para cada $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ consideramos la curva

$$\alpha_t : [-1, 1] \rightarrow A, \quad \alpha_t(\theta) = (\theta, t),$$

su longitud es 2 mientras que la longitud de $\phi \circ \alpha_t$ es

$$\int_{-1}^1 |(\phi \circ \alpha_t)'(\theta)| d\theta = 2 \cos t.$$

En otras palabras, esos segmentos de rectas horizontales de longitud 2 en el mapa se corresponden con trozos de paralelos en la esfera, cuya longitud disminuye a medida que se acercan a los polos (o sea cuando $t \rightarrow \pm\pi/2$).

Definición. Sea $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular con curvas coordenadas ortogonales, como en el comienzo de la sección. Los coeficientes de la métrica, también llamados coeficientes de la primera forma fundamental de ϕ , son las funciones $E, G : A \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E(u, v) = |\phi_u(u, v)|^2, \quad G(u, v) = |\phi_v(u, v)|^2.$$

Observación. Si consideramos a $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ como un mapeo (a cada punto del mapa A le corresponde un punto de la imagen de ϕ), las funciones \sqrt{E} y \sqrt{G} pueden interpretarse como **escalas infinitesimales horizontal y vertical**, respectivamente, en el siguiente sentido. Dada una curva α en el mapa A con $\alpha(0) = (u_o, v_o)$ y $\alpha'(0) = (x, y)$ (en particular $\|\alpha'(0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$), entonces la rapidez de la curva correspondiente en S en $s = 0$, es por la regla de la cadena y porque $\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} |(\phi \circ \alpha)'(0)| &= |\phi_u(u_o, v_o)x + \phi_v(u_o, v_o)y| \\ &= \sqrt{|\phi_u(u_o, v_o)|^2 x^2 + |\phi_v(u_o, v_o)|^2 y^2} \\ &= \sqrt{E(u_o, v_o)x^2 + G(u_o, v_o)y^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

O sea, para expresarlo con palabras, aunque no de manera tan precisa, $\sqrt{E(u_o, v_o)}$ y $\sqrt{G(u_o, v_o)}$ son las **proporciones** en las que el mapeo ϕ **deforma** el mapa A cerca de (u_o, v_o) en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

Ejemplo 5 Sea ϕ la superficie de revolución con curva perfil

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = \left(\frac{1}{\cosh t}, \tanh t \right),$$

que recorre toda la semicircunferencia de radio uno con $x > 0$ (notar que $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$). Entonces ϕ describe la esfera menos los polos. Los coeficientes de la métrica se calculan

$$E(\theta, t) = G(\theta, t) = 1/\cosh^2 t.$$

Luego las escalas infinitesimales dependen del punto del mapa pero no de la dirección. Por esta razón es fácil verificar que el mapeo ϕ tiene la propiedad de ser conforme: Si dos curvas en A se intersecan formando un determinado ángulo, entonces sus imágenes mediante ϕ se intersecan formando el mismo ángulo.

3 Geodésicas.

Si $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada regular, una curva $\gamma(t) = \phi(u(t), v(t))$, con u, v diferenciables (notar que la imagen de γ está contenida en la imagen de ϕ) se dice geodésica de ϕ si

$$\langle \gamma'', \phi_u(u, v) \rangle = \langle \gamma'', \phi_v(u, v) \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\text{o sea, si } \langle \gamma''(t), \phi_u(u(t), v(t)) \rangle = \langle \gamma''(t), \phi_v(u(t), v(t)) \rangle = 0$$

para todo t . Es decir, la aceleración de γ es ortogonal a la superficie en cada instante. Desde la superficie se percibirá la velocidad de γ como constante. En particular la velocidad no cambia en magnitud, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 6 *Las geodésicas tienen rapidez constante.*

Prueba. Calculamos

$$\left(|\gamma'|^2\right)' = \langle \gamma', \gamma' \rangle' = 2 \langle \gamma'', \gamma' \rangle = 2 \langle \gamma'', \phi_u(u, v) u' + \phi_v(u, v) v' \rangle = 0.$$

Luego $|\gamma'|^2$ es constante, y por lo tanto $|\gamma'|$ también. □

Ejemplo 7 Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u, v, 0)$, cuya imagen es el plano $z = 0$. Una curva $\gamma(t) = (u(t), v(t), 0)$ es geodésica si y sólo si $u'' \equiv v'' \equiv 0$, o sea si y sólo si γ recorre una recta con rapidez constante.

Proposición 8 *Sea $S = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid |q| = 1\}$ la esfera de centro cero y radio uno. Los círculos máximos de S (intersecciones de S con planos que pasan por el cero), recorridos con rapidez unitaria, son geodésicas.*

Prueba. Supongamos que el plano está generado por dos vectores ortogonales unitarios U, V en \mathbb{R}^3 . La curva $\gamma(t) = (\cos t)U + (\sen t)V$ en S recorre el círculo máximo determinado por ese plano y su aceleración es

$$\gamma''(t) = -(\cos t)U - (\sen t)V = -\gamma(t).$$

Sea $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular cuya imagen esté contenida en S . En particular, $|\phi(u, v)| \equiv 1$, de donde $\langle \phi_u, \phi \rangle \equiv \langle \phi_v, \phi \rangle \equiv 0$ (por un argumento similar al de la prueba de la Proposición 6). Luego, si suponemos que $\gamma(t) = \phi(u(t), v(t))$ para ciertas funciones u, v , resulta que

$$\langle \gamma'', \phi_u(u, v) \rangle = \langle -\gamma, \phi_u(u, v) \rangle = -\langle \phi(u, v), \phi_u(u, v) \rangle = 0.$$

y de manera análoga con v en vez de u . Entonces, γ es una geodésica de ϕ . □

Observación 9 a) Es posible probar que por cada punto p de A y cada vector v existe exactamente una curva α en A con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, definida en un entorno suficientemente pequeño de cero, tal que $\phi \circ \alpha$ es geodésica de ϕ . No lo demostraremos, sólo indicamos que se deduce del teorema de existencia y unicidad para el sistema de ecuaciones diferenciales (3). De manera muy imprecisa podríamos decir entonces que en una superficie parametrizada regular, la noción de “**ir derecho en la superficie**” tiene sentido en cualquier punto y hacia cualquier dirección.

b) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow A$ una curva diferenciable tal que $\gamma = \phi \circ \alpha$ es de rapidez constante. Se puede demostrar que γ es geodésica de la superficie parametrizada ϕ si y sólo si γ **minimiza longitud localmente**. Más precisamente, si para todos $s < t$ en $[a, b]$ que están suficientemente cercanos, se cumple que la longitud de la curva $\phi \circ \alpha$ restringida al intervalo $[s, t]$ es menor o igual que la longitud de la curva $\phi \circ \beta$ para cualquier curva β en A que une $\alpha(s)$ con $\alpha(t)$.

Superficies de Clairaut y Teorema de Clairaut.

Sea $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular con curvas coordenadas ortogonales y sean $E, G : U \rightarrow \mathbb{R}$, como antes, funciones definidas por $E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle$, $G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle$.

Definición. Decimos que una tal ϕ es **de Clairaut** si las funciones E y G no dependen de u , o sea $E_u = G_u = 0$, o equivalentemente, $E(u, v) = f(v)$ y $G(u, v) = g(v)$ para ciertas funciones f, g .

Ejemplo 10 Una superficie de revolución como en (1), con curva perfil c , es de Clairaut con

$$E(\theta, t) = f(t) = r^2(t) \quad \text{y} \quad G(\theta, t) = g(t) = |c'(t)|^2 \quad (4)$$

(ya vimos que $\langle \phi_\theta, \phi_t \rangle = 0$).

Ejemplo 11 El helicoides $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(u, v) = (v(\cos u, \sin u), u)$ es una superficie de Clairaut con $f(v) = 1 + v^2$ y $g(v) = 1$.

Ecuación para las geodésicas de una superficie de Clairaut.

Proposición 12 Si ϕ una superficie parametrizada de Clairaut, entonces la curva $\gamma(s) = \phi(u(s), v(s))$ con u, v diferenciables γ es geodésica si y sólo si u y v satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$0 = f'(v) u'v' + f(v) u'' \quad (5)$$

$$0 = -f'(v) (u')^2 + g'(v) (v')^2 + 2g(v) v'' \quad (6)$$

Prueba. Calculamos $\gamma' = \phi_u(u, v)u' + \phi_v(u, v)v'$ y

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (\phi_{uu}u' + \phi_{uv}v')u' + \phi_u u'' + (\phi_{vu}u' + \phi_{vv}v')v' + \phi_v v'' \\ &= \phi_{uu}(u')^2 + 2\phi_{uv}v'u' + \phi_{vv}(v')^2 + \phi_u u'' + \phi_v v''. \end{aligned}$$

(por abuso de notación omitimos evaluar ϕ y sus derivadas en (u, v)). Luego, como $\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$ pues la superficie es de Clairaut, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \gamma'', \phi_u \rangle &= \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle (u')^2 + 2\langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle v'u' + \langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle (v')^2 + \langle \phi_u, \phi_u \rangle u'' \\ \langle \gamma'', \phi_v \rangle &= \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle (u')^2 + 2\langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle v'u' + \langle \phi_v, \phi_v \rangle v''. \end{aligned}$$

Pero observamos que

$$\begin{aligned} 2 \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle_u = E_u \\ 2 \langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle_v = E_v \\ \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle_u - \langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle = 0 - E_v/2 = -E_v/2 \end{aligned}$$

(hemos usado de nuevo que $\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$). De la misma manera, intercambiando los roles de u y v , se ve que

$$2 \langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle = G_v, \quad 2 \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle = G_u, \quad \langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle = -G_u/2.$$

Como también por hipótesis $E_u = G_u = 0$, y además $E(u, v) = f(v)$ y $G(u, v) = g(v)$ tenemos que γ es geodésica si y sólo si u y v satisfacen las ecuaciones del enunciado. \square

Corolario 13 *Si ϕ es una superficie parametrizada de Clairaut, entonces la curva coordenada horizontal $\gamma(u) = \phi(u, v_0)$ es geodésica si y sólo si $f'(v_0) = 0$.*

En particular, el paralelo $\theta \mapsto \phi(\theta, t_0)$ de una superficie de revolución es geodésica si y sólo si $r'(t_0) = 0$.

Prueba. Para la curva γ tenemos $u' = 1$ y $v = v_0$. Así $u'' = 0$ y $v' = 0$ y luego la ecuación (5) no da condiciones y la ecuación (6) queda $f'(v_0) = 0$. La afirmación sobre las superficies de revolución resulta de (4). \square

Teorema 14 *Sea ϕ una superficie de Clairaut y sea $\gamma(s) = \phi(u(s), v(s))$ una curva con u, v diferenciables y v' nunca nula. Entonces son equivalentes:*

- a) *La curva γ es geodésica.*
- b) *Las funciones $|\gamma'|$ y $f(v)u'$ son ambas constantes*
- c) *La curva γ es una reparametrización de rapidez constante de alguna de las curvas*

$$\gamma_1(t) = \phi(u_0, t) \quad \text{o} \quad \gamma_2(t) = \phi(t, y(t)),$$

para cierta constante u_0 , donde y satisface la ecuación diferencial

$$\lambda f^2(y) = f(y) + (y')^2 g(y) \tag{7}$$

para cierta constante λ .

Ejemplo 15 El teorema de Clairaut se puede aplicar para encontrar, en cada instante, la curva en el mapa de la tierra (Ejemplo 4 (a)) que separa el día de la noche:

El eje de rotación de la tierra está inclinado respecto del plano P donde la tierra gira alrededor del sol. Como la distancia de la tierra al sol es tan grande, cometemos un error muy pequeño si suponemos que los rayos provenientes del sol son paralelos. De este modo, la curva en la tierra que separa el día de la noche en cada instante es un círculo máximo (perpendicular al plano P), en particular una geodésica. Como el mapeo que consideramos es de Clairaut, la curva correspondiente en el mapa A puede obtenerse por la ecuación de Clairaut.

Si la curva perfil es $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, se ve de (4) que $E(\theta, t) = \cos^2 t$ y $G(\theta, t) = 1$, con lo cual $f(t) = \cos^2 t$ y $g(t) = 1$. Por el teorema, una curva en

el mapa que en un instante dado separa el día de la noche es o bien una recta vertical (equinoccio de primavera/otoño) o bien, por (7), el gráfico de una función y que satisface

$$\lambda \cos^4(y) = \cos^2(y) + (y')^2$$

para cierta constante λ que se puede obtener a partir del ángulo de inclinación del eje de la tierra con respecto al plano P . Se verifica fácilmente que las funciones

$$y = \arctan(c \operatorname{sen}(t - d))$$

satisfacen la ecuación, para todo d y para $1 + c^2 = \lambda$.

Ante las preguntas de cómo se obtienen tales soluciones y si efectivamente son todas, comentamos que para resolver ese tipo de ecuación (al menos una algo más débil, despejando y' previa suposición que es positiva o negativa) se aplica el primer método que se aprende usualmente en un curso de ecuaciones diferenciales: Si h es nunca nula, las ecuaciones $y' = h(y)$ y $\frac{y'}{h(y)} = 1$ son equivalentes. Se integra miembro a miembro esta última igualdad (usando sustitución en el miembro izquierdo) y luego se despeja y .

Prueba del Teorema 14.

a) \Rightarrow b) Si γ es geodésica, ya sabemos por la Proposición 6 que $|\gamma'|$ es constante. Pero por (5) tenemos que

$$(f(v)u')' = f'(v)u'v' + f(v)u'' = 0. \quad (8)$$

Luego $f(v)u'$ es constante.

b) \Rightarrow a) Si $f(v)u'$ es constante, entonces por (8) vale la ecuación (5). Con una cuenta similar a la de (2) calculamos

$$\begin{aligned} |\gamma'|^2 &= |\phi_u(u, v)u' + \phi_v(u, v)v'|^2 \\ &= E(u, v)(u')^2 + G(u, v)(v')^2 \\ &= f(v)(u')^2 + g(v)(v')^2. \end{aligned}$$

Si $|\gamma'|$ es constante, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\|\gamma'\|^2\right)' = \left(f(v)(u')^2 + g(v)(v')^2\right)' \\ &= f'(v)v'(u')^2 + f(v)2u'u'' + g'(v)v'(v')^2 + g(v)2v'v'' \end{aligned}$$

Reemplazando $f(v)u''$ por su valor despejado de (8), obtenemos

$$0 = f'(v)v'(u')^2 - 2f'(v)v'(u')^2 + g'(v)v'(v')^2 + g(v)2v'v'',$$

que no es otra cosa que la ecuación (6) multiplicada por v' , que es nunca nula por hipótesis.

c) \Rightarrow b) Supongamos primero que γ es una reparametrización de rapidez constante de γ_1 . Claramente $u' = u'_o = 0$. Luego $f(v)u' \equiv 0$, en particular constante. Si en cambio

$$\gamma(s) = \gamma_1(u(s)) = \phi(u(s), y(u(s))),$$

usando (7) para la última igualdad, calculamos

$$\begin{aligned} |\gamma'|^2 &= |\phi_u(u, y(u))v' + \phi_v(u, y(u))y'(u)u'|^2 \\ &= f(y(u))(u')^2 + g(y(u))(y'(u))^2(u')^2 \\ &= \lambda f^2(y(u))(u')^2. \end{aligned}$$

Luego, si $|\gamma'|$ es constante, resulta $f(y(u))u'$ constante, como queríamos.

b) \Rightarrow c) Si γ es como en el enunciado y $u'(t_0) = 0$ para algún t_0 y $f(y)u'$ es constante, entonces $f(y)u' \equiv 0$, con lo cual $u' \equiv 0$ y γ es una reparametrización de γ_1 .

Si por el contrario u' es nunca nula, entonces u tiene una inversa, que llamamos z . Tenemos que $\gamma(z(t)) = \phi(t, v(z(t))) = \gamma_2(t)$ con $y = v(z)$. Luego γ es una reparametrización $\gamma(s) = \gamma_2(u(s))$. Con argumentos similares a los de arriba se ve que $y = v(z)$ satisface la ecuación diferencial indicada.

Ecuación para las geodésicas en superficies de revolución.

Proposición 16 Sea $\gamma(s) = \phi(\theta(s), t(s))$ una curva de rapidez unitaria de la superficie de revolución ϕ con curva perfil $c = (r, h)$, donde θ, t diferenciables y t' nunca nulo. Sea $\alpha(s)$ el ángulo entre $\gamma'(s)$ y el paralelo por $\gamma(s)$. Entonces γ es geodésica si y sólo si existe una constante C tal que

$$r(t(s)) \cos \alpha(s) = C. \quad (9)$$

Nota. El hecho de requerir que γ tenga rapidez unitaria no representa un problema a la hora de las aplicaciones, pues usamos el resultado para obtener (información sobre) las trayectorias de las geodésicas.

Prueba de la Proposición 16. Como la dirección del paralelo por $\phi(\theta, t)$ es $\phi_\theta(\theta, t) / |\phi_\theta(\theta, t)| = \phi_\theta(\theta, t) / r(t)$, se tiene que

$$r(t) \cos \alpha = r(t) \langle \gamma', \phi_\theta(\theta, t) / r(t) \rangle = \langle \gamma', \phi_\theta(\theta, t) \rangle.$$

Pero $\gamma' = \phi_\theta(\theta, t)\theta' + \phi_t(\theta, t)t'$. Como las curvas coordenadas son ortogonales y $E(\theta, t) = r^2(t)$ por (4), se obtiene

$$r(t) \cos \alpha = E(\theta, t)\theta' = r^2(t)\theta',$$

que es constante si y sólo si γ es geodésica por el Teorema 14, con (θ, t) en el rol de (u, v) y r^2 en el de f .

Ejemplo 17 Cilindro. Para el cilindro $\phi(\theta, t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, t)$ se tiene $r \equiv R$. La Proposición implica fácilmente que las geodésicas son o bien meridianos o bien **hélices** congruentes a una reparametrización de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$ para cierta constante a .

Ejemplo 18 Hiperboloide. Consideremos el hiperboloide de revolución $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuya curva perfil es la parametrización

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\sqrt{1+t^2}, t)$$

de una hipérbola. Aquí $r(t) = \sqrt{1+t^2}$. Sea γ una geodésica de rapidez unitaria de ϕ y α el ángulo entre γ' y el paralelo por γ , como en la Proposición 16. Aceptamos sin demostración que γ está definida para todo s en la recta real. Supongamos que en el instante s_o vale

$$r(s_o) =: r_o > 0, \quad r'(s_o) < 0 \quad y \quad \cos \alpha(s_o) = a_o.$$

O sea, llamando $C = r_o a_o$,

$$t(s_o) > 0, \quad t'(s_o) < 0 \quad y \quad \sqrt{1+t(s_o)^2} \cos \alpha(s_o) = C.$$

Por la Proposición 16 tenemos que

$$\sqrt{1+t(s)^2} \cos \alpha(s) = C \quad \text{para todo } s. \quad (10)$$

Sea $\sigma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ el paralelo donde el hiperboloide es más estrecho. Se cumple que γ nunca corta a σ si $C > 1$, necesariamente corta a σ y pasa hacia el semiespacio inferior $z < 0$ si $C < 1$ y por último, en el caso $C = 1$ se cumple que γ se enrosca una cantidad infinita de veces en el hiperboloide, acercándose tanto como se quiera al paralelo σ .

Caso $C > 1$: Si γ cortara a σ (cuya imagen es una circunferencia de radio uno) en el instante s_1 , se tendría $r(s_1) = 1$, o sea $t(s_1) = 0$ y por (10), $\cos \alpha(s_1) = C > 1$, lo que es imposible.

Los casos $C = 1$ y $C < 1$ los dejamos para que el lector se ejercite, si lo desea.

4 Superficies que no están incluidas de manera canónica en el espacio euclídeo.

A continuación consideraremos un ejemplo de un “superficie” que no está incluida de manera canónica en el espacio euclídeo.

Un intervalo de la recta real se dice no trivial si es no vacío y no consta de un solo punto. Sea

$$\mathcal{I} = \{\text{intervalos cerrados y acotados no triviales de la recta real}\}.$$

Notemos que \mathcal{I} no es un subconjunto de un espacio euclídeo (si bien sus elementos, los intervalos, sí lo son). Nos preguntamos sobre diferentes maneras de definir una noción de distancia y de mejor camino entre dos elementos en \mathcal{I} , naturales desde distintos puntos de vista. La primera respuesta obvia es la siguiente: Para $x < y$ y $x' < y'$ se puede tomar

$$\text{dist}([x, y], [x', y']) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

es decir, copiando la distancia euclídea del abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ mediante la biyección obvia. El mejor camino entre estos dos intervalos es entonces la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{I}$ dada por $\gamma(t) = [(1-t)x + tx', (1-t)y + ty']$.

Ahora bien, esta noción de distancia puede no ser la más adecuada si consideramos la naturaleza de los elementos de \mathcal{I} . En cierto sentido, esta noción de distancia discrimina el tamaño de los segmentos: Por ejemplo,

$$\text{dist}([0, 10^3], [1, 1 + 10^3]) = 1 = \text{dist}([0, 10^{-3}], [1, 1 + 10^{-3}]).$$

Sin embargo, tomando en cuenta el tamaño relativo de los intervalos, los dos primeros parecen estar mucho más cerca uno del otro que los dos últimos (imaginemos que le pedimos al intervalo $[0, 10^{-3}]$ que se mueva hacia el $[1, 1 + 10^{-3}]$; le va a parecer muy lejos). Dicho de otra forma, merecen una definición de distancia distinta de la de más arriba, que contemple ese hecho.

Métricas riemannianas en abiertos del plano.

Una métrica riemanniana en un abierto A del plano es un concepto que permite definir una noción de longitud de curvas en A distinta de la euclídea. Consideraremos sólo aquellas con curvas coordenadas ortogonales. Una tal métrica está dada por un par (E, G) de funciones diferenciables positivas $E, G : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dada una curva diferenciable $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ en A , la longitud de la velocidad de γ en el instante t respecto de la métrica (E, G) se define mediante

$$\|\gamma'(t)\|_{(E,G)} = \sqrt{E(\gamma(t))u'(t)^2 + G(\gamma(t))v'(t)^2}$$

(comparar con (2)). La **longitud** de una curva diferenciable $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ respecto de la métrica (E, G) está definida por

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{(E,G)} dt \quad (11)$$

Como en el caso euclídeo se prueba que no cambia al reparametrizar γ .

Se dice que las curvas coordenadas son ortogonales porque si en cada (u, v) aplicamos polarización a la forma cuadrática $\|\cdot\|_{(E,G)}^2$, resulta que $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 0$ y de allí las velocidades de las curvas $u \mapsto (u, v_o)$, $v \mapsto (u_o, v)$ son ortogonales.

En estas notas consideraremos sólo un tipo especial de métricas riemannianas con curvas coordenadas ortogonales en abiertos del plano, las llamadas **métricas de Clairaut**, que son aquellas para las cuales las funciones E y G no dependen de u , o sea $E_u = G_u = 0$, o equivalentemente $E(u, v) = f(v)$ y $G(u, v) = g(v)$ para ciertas funciones f, g . (Comparar con la definición de superficie parametrizada de Clairaut.)

Ejemplo 19 La métrica usual en \mathbb{R}^2 está dada por $E = G \equiv 1$. En este caso (11) da la noción usual de longitud de una curva en el plano.

Ejemplo 20 Una superficie parametrizada de Clairaut $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ induce una métrica riemanniana en A de Clairaut: Se definen E, G como en (4).

Si pensamos el abierto A como un mapa y ϕ como el mapeo, la longitud de una curva α en el abierto A , calculada con la nueva métrica como en (11), será la longitud de la curva $\phi \circ \alpha$ en la imagen de ϕ , representada por α en el mapa. Esto es fácil de verificar usando la regla de la cadena.

Ejemplo 21 *El plano hiperbólico.* En este caso $A = H = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ y se define

$$E(u, v) = G(u, v) = f(v) = g(v) = 1/v^2 \quad (12)$$

para todo $(u, v) \in H$. El abierto H munido de esta métrica es un modelo para el semiplano de Lobachevsky, el ejemplo clásico (junto con la geometría esférica) de un espacio donde no se cumple el quinto postulado de Euclides: Dada una “recta” y un punto fuera de ella existe una y sólo una “recta” que no corta a la primera. (Veremos más abajo cuáles curvas en H merecen ser el análogo de las rectas en el plano euclídeo.)

No es un caso particular del ejemplo anterior, aunque sí localmente (ver la Proposición 26).

Volvemos a ocuparnos del problema de la distancia en el espacio \mathcal{I} de intervalos de la recta real del comienzo de la sección.

Una métrica en \mathcal{I} que no discrimina tamaños.

Podemos parametrizar \mathcal{I} mediante

$$F : H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \rightarrow \mathcal{I}, \quad F(x, y) = [x, x + y]. \quad (13)$$

Si copiamos mediante F la métrica hiperbólica de H a \mathcal{I} , observamos que, a nivel infinitesimal, cada segmento de \mathcal{I} usa su propio tamaño como patrón para medir la distancia a los segmentos próximos, y esto es lo que entendemos por una métrica que no discrimina tamaños. Más precisamente, sean

$$\gamma(t) = [x_t, x_t + y_t] \quad y \quad \tilde{\gamma}(t) = F^{-1}(\gamma(t)) = (x_t, y_t)$$

una curva en \mathcal{I} y la curva correspondiente en el mapa H de \mathcal{I} , respectivamente (aquí los subíndices no denotan derivada parcial, los usamos para simplificar la notación). Por (12) tenemos que

$$\|\tilde{\gamma}'(t)\|^2 = f(y_t) (x'_t)^2 + g(y_t) (y'_t)^2 = |(x'_t, y'_t)|^2 / y_t^2.$$

Luego la rapidez de $\tilde{\gamma}$ en el instante t según la métrica hiperbólica que estamos considerando es $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = |(x'_t, y'_t)| / y_t$, que relativiza la rapidez según la métrica euclídea al tamaño y_t del intervalo en ese instante t .

Ejemplo 22 Si el intervalo $[x, x + y]$ se traslada hacia la derecha en s veces *su propia longitud*, veamos que el traslado será de s unidades si consideramos la métrica hiperbólica. En efecto, para la curva $\gamma(t) = [x, x + y] + ty = [x + ty, x + y + ty]$, con $0 \leq t \leq s$, tenemos que la rapidez de la curva asociada $\tilde{\gamma}(t) = (x + ty, y)$ en H según la métrica hiperbólica es $\left\| \frac{d}{dt} (x + ty, y) \right\| = \|(y, 0)\|_{(x+ty, y)} = |y| / y = 1$. Luego la longitud de γ es $\int_0^s dt = s$.

Ejemplo 23 Sea γ la curva en \mathcal{I} definida por $\gamma(t) = [0, e^t]$ y sea $\tilde{\gamma}(t) = (0, e^t)$ la curva asociada en H . Tenemos que la rapidez euclídea, $|\tilde{\gamma}'(t)| = |(0, e^t)| = e^t$, coincide con el tamaño del intervalo en el instante t , que es ahora *percibido como unidad de medida* en ese instante, así que no nos sorprende que γ tenga rapidez (hiperbólica) constante uno: $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = |(0, e^t)| / e^t = 1$.

Geodésicas de métricas de Clairaut en abiertos del plano.

Claramente, la manera en que definimos curva geodésica en una superficie parametrizada regular $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ no tiene un análogo obvio para definir curva geodésica en un abierto A del plano provisto de la métrica riemanniana dada por (E, G) : Notemos que si bien uno puede considerar el plano dentro del espacio vía $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$, la métrica en A dada por (E, G) no es necesariamente la euclídea. (La conexión de Levi-Civita provee una tal noción, pero escapa a los alcances de estas notas).

Recurrimos entonces a la caracterización de las geodésicas de la Obsevación 9 (a): Sea A un abierto del plano munido de una métrica riemanniana con curvas coordenadas ortogonales dada por (E, G) . Decimos que una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow A$ de rapidez constante en A es **geodésica** para la métrica dada por (E, G) si **minimiza localmente longitudes**, calculadas por supuesto a partir de (E, G) como en (11). Más precisamente, si para todos $s < t$ en $[a, b]$ que están suficientemente cercanos, se cumple que la longitud (medida usando (E, G)) de la curva α restringida al intervalo $[s, t]$ es menor o igual que la longitud de cualquier curva en U que une $\alpha(s)$ con $\alpha(t)$ (también medida usando (E, G)).

Se puede probar (no lo haremos) que es válida la siguiente versión análoga del Teorema de Clairaut, que difiere muy poco de la del Teorema 14.

Teorema 24 *Sea A un abierto del plano munido de una métrica riemanniana de Clairaut dada por (E, G) y sea $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ una curva diferenciable en A con v' nunca nula. Entonces son equivalentes:*

- a) *La curva γ es geodésica.*
- b) *Las funciones $\|\gamma'\|$ y $f(v)u'$ son ambas constantes*
- c) *La curva γ es una reparametrización de rapidez constante de alguna de las curvas*

$$\gamma_1(t) = (u_o, t) \quad \text{o} \quad \gamma_2(t) = (t, y(t)),$$

para cierta constante u_o , donde y satisface la ecuación diferencial

$$\lambda f^2(y) = f(y) + (y')^2 g(y) \tag{14}$$

para cierta constante λ .

Geodésicas en el plano hiperbólico.

Por el Teorema de Clairaut se tiene que las trayectorias de las curvas geodésicas en H son las curvas obtenidas mediante intersección de H con rectas verticales y circunferencias con centro en el eje horizontal. En efecto, ya vimos que las rectas verticales siempre son trayectorias de geodésicas para una métrica de Clairaut. Si por otra parte consideramos la función $y(t) = \sqrt{r^2 - (t-x)^2}$, para $r > 0$, $|t-x| < r$, vemos que $\gamma(t) = (t, y(t))$ parametriza la semicircunferencia superior de radio r y centro en $(x, 0)$ y satisface la ecuación de Clairaut (14) con f, g como en la métrica hiperbólica, para cierta constante λ .

Vemos que dada la trayectoria de una geodésica en H y un punto $p \in H$ fuera de ella, existe una cantidad infinita de trayectorias de geodésicas por p que no la

cortan. Luego H no cumple el quinto postulado de Euclides. No comentaremos sobre los demás.

Geodésicas en \mathcal{I} con la métrica hiperbólica.

Como la métrica en \mathcal{I} que consideramos es la copiada de la del plano hiperbólico mediante la función F de (13), observamos en particular que la trayectoria del mejor camino entre dos segmentos de la misma longitud, digamos ℓ , consiste de segmentos de longitud mayor que ℓ . Esto se puede explicar notando que como cada segmento toma su propia longitud como unidad para medir distancias recorridas o cambios en su tamaño, un segmento más grande recorrerá distancias grandes con más facilidad. Por eso no le conviene simplemente trasladarse hasta su nueva posición conservando el tamaño constante, como sería el caso para la métrica euclídea para \mathcal{I} , sino destinar un poco de energía extra para ir aumentando de tamaño a medida que se traslada, de manera de percibir distancias como más cortas relativas a su tamaño, y finalmente, destinar un poco de energía extra para ir disminuyendo de tamaño a medida que se acerca a la meta.

Algunos segmentos de la trayectoria del mejor camino entre los segmentos s_1 y s_2 de igual longitud:

Inmersión local del plano hiperbólico.

Tractriz. Supongamos que estamos parados en el origen del plano x - y y tenemos atada con una soga una piedra ubicada en el punto $(1, 0)$. Si caminamos a lo largo del eje y arrastrando la piedra, ¿qué trayectoria describe la piedra en el plano, si la soga no se estira? Una tal curva se llama tractriz.

Proposición 25 *La tractriz es el gráfico de la función $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ primitiva de (o sea cuya derivada es) la función*

$$f'(s) = -\sqrt{\frac{1}{s^2} - 1} \quad (15)$$

que satisface $\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = 0$.

Prueba. Para cada $s \in (0, 1)$ fijo, sea L_s la recta tangente al gráfico de f en $(s, f(s))$ y p_s el punto donde L_s corta al eje y (donde estamos parados en el instante s). Sabemos que el segmento S_s de la recta L_s con extremos $(s, f(s))$ y p_s tiene longitud uno (el largo de la soga).

Sea x_s la distancia entre los puntos p_s y $(0, f(s))$. Vemos en el gráfico que, por el Teorema de Pitágoras,

$$\text{long}(S_s) = \sqrt{x_s^2 + s^2},$$

donde $f'(s) = -x_s/s$. Así,

$$1 = \text{long}(S_s) = \sqrt{(-sf'(s))^2 + s^2} = s\sqrt{1 + f'(s)^2}.$$

Despejando $f'(s)$ obtenemos la función deseada. El comportamiento de f cerca de 1 se deduce de la posición inicial de la piedra. \square

Proposición 26 Sea $c : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $c(t) = (\frac{1}{t}, f(\frac{1}{t}))$ (una parametrización de la tractriz), sea $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 1\}$ y sea $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución con curva perfil c . Entonces la métrica riemanniana inducida por ϕ en A como en el Ejemplo 20 es la métrica hiperbólica en A , como en (12).

Prueba. Como ϕ es una superficie de revolución, $\langle \phi_\theta, \phi_t \rangle = 0$. Además, $r(t) = 1/t$ y $h(t) = f(1/t)$. Por otra parte, sabemos de (4) que

$$\begin{aligned} E(\theta, t) &= |\phi_\theta(\theta, t)|^2 = r(t)^2 = 1/t^2 \\ G(\theta, t) &= |\phi_t(\theta, t)|^2 = |c'(t)|^2 = 1/t^2. \end{aligned}$$

La última igualdad se verifica fácilmente usando (15). □

La proposición anterior nos permitió representar localmente una parte del plano hiperbólico (los puntos $(u, v) \in H$ con $v > 1$) como una superficie parametrizada en \mathbb{R}^3 , respetando longitudes de curva (lo que se denomina una **isometría local**, ver el comentario del Ejemplo 20).

Si queremos representar entornos de puntos de H con $v < 1$, podemos tomar para $0 < v_o < 1$ fijo, $A' = \{(u, v) \in H \mid v > v_o\}$ y $\phi' : A' \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi'(u, v) = \phi(u/v_o, v/v_o)$. También se cumple en este caso que la métrica riemanniana inducida por ϕ' en A' es la métrica hiperbólica en A' , pues la aplicación $(u, v) \mapsto (cu, cv)$ de H en H deja invariante las funciones E y G para todo $c > 0$, en particular para $c = 1/v_o$.

FIN

UNA MIRADITA A LAS SUPERFICIES

CRISTIÁN U. SÁNCHEZ

1. EL ESPACIO R^3

En el espacio vectorial R^3 tenemos, en cada punto $x = (x_1, x_2, x_3)$, su espacio tangente $T_x(R^3)$. Este no es mas que una copia de R^3 pero pensamos que el origen "o" de esta copia, está ubicado en el punto x y los "ejes" son paralelos a los del espacio vectorial. Una manera de decir esto es: tomemos el espacio $R^6 = R^3 \times R^3$ y llamemos $T_x(R^3)$ al siguiente subconjunto de R^6 $T_x(R^3) = \{x\} \times R^3$. Consideremos ahora tres funciones $U_j : R^3 \rightarrow R^3$ ($j = 1, 2, 3$) definidas por $U_1(x) = (1, 0, 0)$, $U_2(x) = (0, 1, 0)$, $U_3(x) = (0, 0, 1)$ las cuales identificamos con sus gráficos en R^6 . De este modo $U_1(x) = (x, (1, 0, 0))$ y similarmente las otras dos. Así podemos escribir todo punto de R^6 de la forma $((x_1, x_2, x_3)(a, b, c)) = ((x)(a, b, c))$ con la siguiente notación

$$((x_1, x_2, x_3)(a, b, c)) = aU_1(x) + bU_2(x) + cU_3(x)$$

y lo pensamos como un vector tangente a R^3 en el punto x . Si ahora $\alpha : (a, b) \rightarrow R^3$ es una curva C^∞ en R^3 es decir una función $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ donde cada una de las componentes reales $x_j(t)$ tiene infinitas derivadas en (a, b) entonces su vector tangente en t es

$$\alpha'(t) = \sum_{j=1}^3 x'_j(t) U_j(\alpha(t)) = ((\alpha(t)), (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t)))$$

y esto define lo que llamaremos el **campo tangente** a la curva α . Observe-mos que de este modo $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(R^3)$, $\forall t \in (a, b)$. La segunda derivada de la curva también define un **campo a lo largo** de α cuya expresión es

$$\alpha''(t) = \sum_{j=1}^3 x''_j(t) U_j(\alpha(t))$$

y similarmente todas las otras derivadas.

Si ahora $V \subset R^n$ es un abierto y $f : V \rightarrow R^3$ es una función C^∞ $f(z) = (f_1(z), f_2(z), f_3(z))$, para cada $z \in V$, diremos que otra función $F : V \rightarrow R^6$ es un **campo C^∞ a lo largo de f** si podemos escribir para cada $z \in V$

$$(1) \quad F(z) = \sum_{j=1}^3 u_j(z) U_j(f(z))$$

donde las tres funciones reales $u_j(z)$ son C^∞ en V . De este modo, para cada $z \in V$, tenemos $F(z) \in T_{f(z)}(R^3)$.

Siguiendo el ejemplo de la derivada segunda, si ahora $G(t)$ es un campo C^∞ a lo largo de la curva α de arriba, entonces podemos escribirlo

$$(2) \quad G(t) = \sum_{j=1}^3 u_j(t) U_j(\alpha(t)), \quad \forall t \in (a, b)$$

y como las funciones $u_j(t)$ son C^∞ podemos "derivarlo" a lo largo de α definiendo

$$G'(t) = \sum_{j=1}^3 u_j'(t) U_j(\alpha(t)), \quad \forall t \in (a, b).$$

Volviendo al caso del campo F en (1) vemos que, como $z = (z_1, \dots, z_n)$, podemos definir la derivada parcial respecto de z_k del campo F como

$$F_{z_k}(z) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial z_k}(z) U_j(f(z)), \quad z \in V.$$

Por otra parte, es claro que una función C^∞ como la f de arriba ($f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(z) = (f_1(z), f_2(z), f_3(z))$) genera n campos C^∞ a lo largo de f que son sus derivadas parciales de la manera obvia

$$f_{z_k}(z) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z) U_j(f(z)), \quad z \in V.$$

Volviendo al caso del campo $G(t)$ definido a lo largo de la curva α en (2) vamos a usar también las siguientes notaciones para el campo $G'(t)$

$$G'(t) = \frac{DG}{dt}(t) = \nabla_{\alpha'(t)}^E G$$

y lo llamaremos **derivada covariante Euclídea de G a lo largo de α** . Si ocurre que el campo $G(t)$ tiene derivada nula es costumbre decir que G es **paralelo a lo largo de α** .

Con este bagaje de notación nos adentramos al estudio de las superficies.

2. SUPERFICIES

Definición 2.1. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para cada $p \in S$ hay un entorno V de p en \mathbb{R}^3 y una función $X: U \rightarrow V \cap S$ de un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

(1) X es C^∞ . Es decir si escribimos, para $(u, v) \in U$,

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

entonces las funciones $x_j(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U . Es decir son funciones reales C^∞ en U . Cada función X se llama una **carta** en S .

(2) X es un homeomorfismo es decir X y la función inversa $X^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ son continuas y esto último significa que X^{-1} es la restricción de una función continua $F: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow U$ definida en un abierto $W \supset V \cap S$.

(3) Para cada $(u, v) \in U$, los campos a lo largo de X (derivadas parciales)

$$(3) \quad \begin{aligned} X_u(u, v) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u}(u, v) U_j(X(u, v)), \\ X_v(u, v) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial v}(u, v) U_j(X(u, v)) \end{aligned}$$

son linealmente independientes en el espacio tangente $T_{X(u,v)}(\mathbb{R}^3)$.

Nuestras consideraciones serán casi siempre "locales" por lo que nos interesarán fundamentalmente las superficies definidas por una sola función X definida en un abierto conexo del plano.

Veamos algunos ejemplos.

Proposición 2.2. (*Cartas de Monge*) Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces el gráfico de f

$$\text{Gr}(f) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\},$$

es una superficie regular en \mathbb{R}^3 .

Prueba. La función $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ cumple las condiciones (1), (2) y (3) de la definición. Para la condición (2) podemos tomar $V = W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in U\}$ y $F = \text{Pr}$ sobre las dos primeras coordenadas. \blacklozenge

Proposición 2.3. (*Valores regulares*) Dada $g : H \rightarrow \mathbb{R}$, función C^∞ en un abierto de \mathbb{R}^3 y $c \in \mathbb{R}$ tal que:

- (1) $M = g^{-1}[c] \neq \emptyset$.
 - (2) $\nabla g(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ (gradiente de g) para todo $(x_1, x_2, x_3) \in M$.
- Entonces M es una superficie regular en \mathbb{R}^3 .

Prueba. Como $\nabla g \neq 0$ en cada punto $a = (a_1, a_2, a_3) \in M$ en dicho punto se cumple que por lo menos una de las derivadas parciales $\partial g / \partial x_j(a)$ es distinta de cero (digamos que $\partial g / \partial x_3(a) \neq 0$) y entonces podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita cuyo enunciado puede ser el siguiente:

Teorema 2.4. (*de la Función Implícita*) Sea $g(x_1, x_2, x_3)$ una función real C^∞ definida en un entorno de (a_1, a_2) en \mathbb{R}^2 y de a_3 en \mathbb{R} con $g(a_1, a_2, a_3) = c$ entonces si $\partial g / \partial x_3(a_1, a_2, a_3) \neq 0$, existe un entorno V de (a_1, a_2) en \mathbb{R}^2 y una función C^∞ $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(a_1, a_2) = a_3$ y

$$g(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = c, \quad \forall (x_1, x_2) \in V.$$

Mas aún h es única en el sentido de que existe un entorno W de a_3 en \mathbb{R} (W es la imagen $h(V)$) tal que hay una única solución $z \in W$ de la ecuación $g(x_1, x_2, z) = c$ y esta es $z = h(x_1, x_2)$.

Entonces existe un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(a_1, a_2) \in U$ y una función C^∞ , $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(u, v, h(u, v)) = c, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Tenemos ahora que $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$ cumple $X(U) \subset M$ y por la Proposición anterior M es una superficie regular en R^3 . ♦

Ejemplo. (Cilindros). Consideremos $R^2 \subset R^3$ como el conjunto de puntos con tercera coordenada nula y sea C una curva en el plano definida implícitamente por la función $f(x_1, x_2) = c$, (f está definida en algún abierto W del plano R^2 es C^∞ allí y para cada punto de C el gradiente ∇f es distinto de cero, por ejemplo $x_1^2 + x_2^2 = 1$) y consideremos ahora la recta que pasa por un punto de esta curva y es ortogonal al plano R^2 . Desplazando esta recta a lo largo de la curva obtenemos un conjunto de puntos de R^3 que denotamos por M . Podemos describir este conjunto mediante la función

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$$

ya que $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : F(x_1, x_2, x_3) = c\}$. Como $\nabla F(x_1, x_2, x_3) = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, 0)$ es distinto de cero para cada punto en M vemos por la Proposición 2.3 que M es una superficie. Estas superficies se llaman genericamente "cilindros en R^3 ".

Ejemplo. (Superficies de revolución) En la misma situación del ejemplo anterior, supongamos que la curva C no contiene puntos de la forma $(x_1, 0, 0)$ (no corta el primer eje) y ahora hacemos girar la curva sobre el primer eje. Cada uno de los puntos $(x_1, x_2, 0) \in C$ genera una circunferencia $(x_1, x_2 \cos v, x_2 \sin v)$ para $0 \leq v \leq 2\pi$ y llamamos M al conjunto de todos estos puntos en R^3 .

Vemos que un punto $(y_1, y_2, y_3) \in M$ sí y sólo sí el punto $(y_1, \sqrt{y_2^2 + y_3^2}, 0)$ está en C y podemos definir

$$g(y_1, y_2, y_3) = f\left(y_1, \sqrt{y_2^2 + y_3^2}\right).$$

Recordar que f está definida en algún abierto W del plano R^2 es C^∞ allí y para cada punto de C el gradiente $\nabla f = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2)$ es distinto de cero. Entonces g está definida en

$$A = \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in R^3 : \left(y_1, \sqrt{y_2^2 + y_3^2} \right) \in W \right\}$$

lo que evidentemente es un abierto en R^3 y contiene a M . De hecho

$$M = \{(y_1, y_2, y_3) \in R^3 : g(y_1, y_2, y_3) = c\}$$

y como

$$\nabla g(y_1, y_2, y_3) = \left(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2 \frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 + y_3^2}}, \partial f/\partial x_2 \frac{y_3}{\sqrt{y_2^2 + y_3^2}} \right)$$

vemos que $(y_1, y_2, y_3) \in M$ implica que $\sqrt{y_2^2 + y_3^2} \neq 0$ y entonces a su vez $\nabla g(y_1, y_2, y_3) \neq 0$.

Si la curva regular está definida paramétricamente y no corta al eje entonces estará dada por $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$ ($t \in (a, b)$) y podemos definir

una carta que cubre "casi todo" M mediante

$$X(t, v) = (x_1(t), x_2(t) \cos v, x_2(t) \sin v)$$

definida en $(a, b) \times (0, 2\pi)$. Se puede cubrir a M con dos cartas de este tipo.

Ejemplo.(Helicoides) Un Helicoide es una superficie generada por el movimiento en "tornillo" de una curva con respecto a una recta fija llamada el "eje". Las distintas posiciones de la curva generatriz son obtenidas primero trasladando dicha curva una distancia λ paralelamente al eje y luego rotándola un ángulo v sobre el eje de modo tal que el cociente λ/v se mantiene constantemente igual a a . La constante $2\pi a$ es llamada el "paso" (pitch) del helicoide siendo esta la distancia a la que es trasladada la curva en una vuelta completa. Podemos convenir que $a \geq 0$ pero es posible girar en sentido horario o antihorario (tornillo derecho o izquierdo). a es cero para una superficie de revolución. Un **helicoide recto** es el generado por una línea recta (o segmento abierto) que corta al eje ortogonalmente. Tomando como eje el tercero de las coordenadas, el vector posición es dado por

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$$

donde u es la "distancia" desde el eje y v el ángulo de rotación. Aquí u y v pueden tomar todos los valores reales.

Las curvas $v = cte.$ son los generadores mientras que las $u = cte.$ son hélices. Como $X_u \cdot X_v = 0$ las hélices son ortogonales a los generadores.

En el caso general, los planos conteniendo al eje "cortan" la superficie en curvas planas que son "congruentes" unas con otras y la superficie es generada por el movimiento en tornillo de cualquiera de estas curvas. Entonces, sin pérdida de generalidad, es posible asumir que la curva generatriz es plana y dada paraméricamente por funciones

$$x_1 = g(u), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = f(u).$$

De este modo la la superficie es dada por

$$X(u, v) = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, f(u) + av).$$

Se verifica facilmente que las curvas $v = cte.$ son las generatoras y las $u = cte.$ hélices y que $X_u \cdot X_v = af'(u)$ y así en este caso estas son ortogonales si, o bien $f'(u) = 0$ (en cuyo caso la superficie es un helicoide recto), o $a = 0$ (y tenemos una superficie de revolución).

3. PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

Supongamos ahora tener una superficie M en R^3 dada por una sola carta

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

para $(u, v) \in U \subset R^2$. Una **curva regular** en M es la imagen por X de una curva C^∞ regular $(u(t), v(t))$ ($t \in (a, b)$) en el plano R^2 tal que para $t_o \in (a, b)$ cumple $(u(t_o), v(t_o)) \in U$. (Recordar que una curva en R^2 se dice regular si $(u'(t), v'(t)) \neq 0, \forall t \in (a, b)$). Entonces nuestra curva en M es la función $\beta(t) = X(u(t), v(t))$ definida en algún intervalo abierto

conteniendo a t_o y contenido en (a, b) . El vector tangente a β en t_o como curva en R^3 , $\beta'(t_o) \in T_{X(u(t_o), v(t_o))}(R^3)$, es llamado el vector tangente a β en M y podemos escribirlo como

$$\beta'(t_o) = X_u(u(t_o), v(t_o))u'(t_o) + X_v(u(t_o), v(t_o))v'(t_o).$$

El conjunto de todos los vectores tangentes a todas las curvas en M que continenen al punto $X(u(t_o), v(t_o))$ es claramente un subespacio de dimensión 2 de $T_{X(u(t_o), v(t_o))}(R^3)$ por la condición (3) de la definición. Lo llamamos el **espacio tangente** a M en el punto $X(u(t_o), v(t_o))$ y es denotado por $T_{X(u(t_o), v(t_o))}(M)$. Es facil ver que todos los vectores del subespacio de $T_{X(u(t_o), v(t_o))}(R^3)$ generado por $X_u(u(t_o), v(t_o))$ y $X_v(u(t_o), v(t_o))$ son vectores tangentes a alguna curva en M que pasa por el punto $X(u(t_o), v(t_o))$. En efecto, dado

$$A = X_u(u(t_o), v(t_o))c + X_v(u(t_o), v(t_o))d, \quad c, d \in R$$

consideremos la recta en R^2 que pasa por $(u(t_o), v(t_o))$ dada por

$$(u(t_o), v(t_o)) + s(c, d).$$

Para s en algún intervalo abierto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ estos puntos están dentro de U y tiene sentido considerar la función

$$\alpha(s) = X(u(t_o) + sc, v(t_o) + sd)$$

para la cual se cumple obviamente

$$\alpha'(0) = A.$$

En nuestra superficie M tenemos además las "curvas coordenadas" que son las curvas $X(u_o, v)$ y $X(u, v_o)$ que provienen de las rectas paralelas a los ejes coordenados de R^2 por el punto $(u_o, v_o) \in U$ definidas en algún intervalo abierto. Obviamente los vectores tangentes a estas curvas son los vectores $X_u(u_o, v_o)$ y $X_v(u_o, v_o)$.

En el espacio tangente a R^3 en $X(u_o, v_o)$, $T_{X(u_o, v_o)}(R^3)$, tenemos el producto escalar usual de R^3 y este induce, de manera obvia, un producto escalar en el subespacio $T_{X(u_o, v_o)}(M)$. Así tenemos un producto escalar natural en cada espacio tangente a M . Esto define, en el abierto U donde esta definida nuestra carta, tres funciones reales C^∞ dadas por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= X_u(u, v) \cdot X_u(u, v) \\ F(u, v) &= X_u(u, v) \cdot X_v(u, v) \\ G(u, v) &= X_v(u, v) \cdot X_v(u, v) \end{aligned}$$

las cuales determinan el producto escalar de cualquier par de vectores tangentes a M en $X(u, v)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (4) \quad A \cdot B &= (X_u(u, v)a + X_v(u, v)b) \cdot (X_u(u, v)c + X_v(u, v)d) = \\ &= Eac + F(ad + bc) + Gcd = \\ &= [a, b] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por esta razón estas tres funciones determinan también la longitud (como curvas en R^3) de las curvas en M ya que, por definición, si $\beta(t) = X(u(t), v(t))$ es una curva en M definida en (c, d) y $[a, b] \subset (c, d)$ la "longitud" de β en $[a, b]$ es

$$L_a^b(\beta) = \int_a^b \|\beta'(t)\| dt$$

donde la norma $\|\cdot\|$ es la usual de R^3 . Para nuestra particular curva en M esto toma la forma

$$L_a^b(\beta) = \int_a^b \left(E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Donde las funciones E, F y G son calculadas sobre la curva. Si escribimos

$$ds = \left(E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

simplificando, como es práctica usual, dt^2 se obtiene

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

que es clásicamente llamada la **primera forma cuadrática** de M . La forma mas "moderna" de pensar es, como ya dijéramos, que las funciones E, F y G (o la matriz formada por ellas) determinan el producto escalar en cada punto de nuestra superficie. Si $D \subset U$ es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados digamos

$$D = [a, b] \times [c, d] \subset U$$

es costumbre definir el **área** de la superficie $X(D)$ como

$$A = \int_a^b \int_c^d \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

siendo $EG - F^2$ el determinante de la matriz en (4). Esta función que suele llamarse el determinante de la primera forma tiene una importancia geométrica que va mucho mas lejos que el cálculo de las áreas.

La primera forma fundamental permite también definir el ángulo entre dos vectores tangentes a la superficie de la misma manera que es usual en R^3 y así el coseno de este ángulo está nuevamente determinado por las funciones E, F y G .

El lenguaje usual de la Geometría Diferencial denomina "**intrínsecas**" a las cantidades que pueden calcularse en términos de estas funciones y de este modo las longitudes de curvas en M así como las áreas y ángulos son cantidades intrínsecas. La idea profunda detrás de esto es que uno puede "independizarse" del espacio ambiente y estudiar las superficies u otros objetos mas generales, sin pensarlos dentro del espacio Euclideo.

4. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Como tenemos nuestra superficie dentro de R^3 es oportuno que saquemos el mayor provecho de ello lo que nos lleva a considerar su **campo unitario normal**. Este se define para nuestra superficie $M = X(U)$ como

$$(5) \quad N(u, v) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\|}.$$

Puesto que por la propiedad (3) de la definición $X_u(u, v)$ y $X_v(u, v)$ son linealmente independientes en cada punto $X(u, v)$ el vector $X_u(u, v) \times X_v(u, v) \in T_{X(u, v)}(R^3)$ (producto vectorial) es no nulo. Así N es, en cada punto $X(u, v)$, un vector unitario que además es ortogonal al espacio tangente a M en el punto. Este N es un campo C^∞ a lo largo de la función X o, como es usual decir, a lo largo de M . Veamos este punto que es de la mayor importancia. Tenemos las expresiones de los campos $X_u(u, v)$ y $X_v(u, v)$ en (3) entonces $X_u(u, v) \times X_v(u, v)$ es por definición el campo

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) = AU_1(X(u, v)) + BU_2(X(u, v)) + CU_3(X(u, v))$$

donde

$$\begin{aligned} A &= A(u, v) = \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v), \\ B &= B(u, v) = \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v), \\ C &= C(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Es claro, de acuerdo con nuestras definiciones, que N es un campo C^∞ a lo largo de M pues la norma de este vector (que es distinto de cero en cada punto de U) también es una función C^∞ en U que nunca se anula.

Sea ahora $Y(u, v)$ un campo C^∞ a lo largo de M y tomemos un punto $p = X(u_o, v_o)$ y un vector tangente $w \in T_{X(u_o, v_o)}(M) = T_p(M)$. Como w es combinación lineal de los vectores $X_u(u_o, v_o)$ y $X_v(u_o, v_o)$ ya vimos en la Sección 3 que hay por lo menos una curva en M que pasa por p y cuyo vector tangente en ese punto es w . Sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $\alpha'(t_o) = w$, entonces podemos restringir Y a α y calcular

$$Y'(t_o) = \frac{DY}{dt}(t_o) = \nabla_{\alpha'(t_o)}^E Y = \nabla_w^E Y.$$

Por definición $\nabla_{\alpha'(t_o)}^E Y \in T_p(R^3)$ y observamos el siguiente hecho simple pero fundamental.

Lema 4.1. *El vector $\nabla_{\alpha'(t_o)}^E Y \in T_p(R^3)$ no depende de la curva $\alpha(t)$ usada para calcularlo, es decir, si $\beta(s) = X(u(s), v(s))$ es otra curva en M tal que $\beta(s_o) = p$ y $\beta'(s_o) = w$ entonces*

$$\nabla_{\alpha'(t_o)}^E Y = \nabla_{\beta'(s_o)}^E Y.$$

Prueba. Para calcular estas derivadas restringimos el campo $Y(u, v)$ a ambas curvas y así tenemos

$$Y(t) = \sum_{j=1}^3 y_j(u(t), v(t)) U_j(\alpha(t)),$$

$$Y(s) = \sum_{j=1}^3 y_j(u(s), v(s)) U_j(\beta(s)).$$

Por definición para calcular estas derivadas debemos derivar las componentes respecto de t en $t = t_o$ y respecto de s en $s = s_o$. Para esto calculamos

$$\left. \frac{dy_j(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=t_o} = \frac{\partial y_j}{\partial u}(u(t_o), v(t_o)) u'(t_o) + \frac{\partial y_j}{\partial v}(u(t_o), v(t_o)) v'(t_o),$$

$$\left. \frac{dy_j(u(s), v(s))}{ds} \right|_{s=s_o} = \frac{\partial y_j}{\partial u}(u(s_o), v(s_o)) u'(s_o) + \frac{\partial y_j}{\partial v}(u(s_o), v(s_o)) v'(s_o).$$

Pero como $u(t_o) = u(s_o) = u_o$, $v(t_o) = v(s_o) = v_o$ y

$$w = X_u(u_o, v_o) a + X_v(u_o, v_o) b,$$

tenemos que

$$a = u'(t_o) = u'(s_o),$$

$$b = v'(t_o) = v'(s_o)$$

y por lo tanto

$$\left. \frac{dy_j(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=t_o} = \left. \frac{dy_j(u(s), v(s))}{ds} \right|_{s=s_o}.$$

Lo que prueba el Lema. \blacklozenge

Entonces podemos escribir esta derivada covariante como $\nabla_w^E Y$ sin preocupación.

Volvamos ahora a nuestro campo $Y(u, v)$ C^∞ a lo largo de M y tomemos nuevamente el punto $p = X(u_o, v_o)$ y un vector tangente $w \in T_{X(u(t_o), v(t_o))}(M) = T_p(M)$. Supodremos ahora que el campo $Y(u, v)$ **es tangente a M** es decir que $Y(u, v) \in T_{X(u, v)}(M)$ para todo $(u, v) \in U$. En el punto p tenemos además de nuestro espacio tangente el vector normal $N(u_o, v_o)$ y por lo tanto podemos escribir nuestro vector $\nabla_w^E Y \in T_p(\mathbb{R}^3)$ descomponiéndolo en sus componentes tangencial y normal como

$$\nabla_w^E Y = ta(\nabla_w^E Y) + no(\nabla_w^E Y)$$

Es costumbre denotar a $ta(\nabla_w^E Y) = \nabla_w Y$ y así nuestra ecuación se ve ahora como

$$\nabla_w^E Y = \nabla_w Y + no(\nabla_w^E Y).$$

Es también usual denotar a la componente normal por

$$no(\nabla_w^E Y) = \alpha(w, Y(u_o, v_o)),$$

(recordar que $Y(u_o, v_o) \in T_p(M)$). La notación parece inadecuada pues aparentemente estamos olvidando al campo Y y quedándonos solamente con

el valor de $Y(u_o, v_o)$, pero en verdad esta componente normal sólo depende de los vectores tangentes w y $Y(u_o, v_o)$. Probaremos esto mas adelante.

La identidad

$$(7) \quad \nabla_w^E Y = \nabla_w Y + \alpha(w, Y(u_o, v_o))$$

se denomina la **identidad de Gauss** y $\alpha(w, Y(u_o, v_o))$ la **segunda forma fundamental de M** .

Estudiemos un poco mas la relación entre las derivadas covariantes y el producto escalar. Supongamos tener un par de campos (no necesariamente tangentes) en M $Z(u, v)$, $Y(u, v)$. Podemos escribir a Z en la forma

$$Z(u, v) = \sum_{j=1}^3 z_j(u, v) U_j(X(u, v)),$$

y similarmente a Y . El producto escalar de los dos campos define en U una función

$$r(u, v) = Y(u, v) \cdot Z(u, v) = \sum_{j=1}^3 y_j(u, v) z_j(u, v)$$

la cual es claramente C^∞ .

Tomemos ahora una curva $\alpha(t)$ tal que $\alpha(t_o) = p = X(u_o, v_o)$ y $\alpha'(t_o) = w$ y restrinjamos ambos campos y la nueva función r a la curva. Podemos ahora calcular la derivada de la función real r en el punto t_o obteniendo

$$\begin{aligned} \left. \frac{dr(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=t_o} &= \sum_{j=1}^3 \left. \frac{dy_j(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=t_o} z_j(u_o, v_o) + \\ + \sum_{j=1}^3 y_j(u_o, v_o) \left. \frac{dz_j(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=t_o} &= \nabla_w^E Y \cdot Z(u_o, v_o) + Y(u_o, v_o) \cdot \nabla_w^E Z. \end{aligned}$$

Podemos escribir esto simplifcadamente olvidando el punto (el cual está implícito en el vector w) como

$$\left. \frac{d(Y \cdot Z)}{dt} \right|_{t=t_o} = \nabla_w^E Y \cdot Z + Y \cdot \nabla_w^E Z$$

y vemos que la derivada covariante satisface la regla de Leibnitz con el producto escalar. Podemos además usar la notación

$$\left. \frac{d(Y \cdot Z)}{dt} \right|_{t=t_o} = w(Y \cdot Z)$$

indicando que derivamos el producto escalar en la dirección de w o sea sobre cualquier curva en M cuyo vector tangente sea w . Así la regla de Leibnitz luce como

$$(8) \quad w(Y \cdot Z) = \nabla_w^E Y \cdot Z + Y \cdot \nabla_w^E Z.$$

Vemos ahora que si Y y Z son campos tangentes obtenemos inmediatamente:

$$(9) \quad w(Y \cdot Z) = \nabla_w Y \cdot Z + Y \cdot \nabla_w Z.$$

Como el campo normal a M que hemos definido en (5) es también un campo en M podemos calcular su derivada covariante con respecto al vector tangente w es decir $\nabla_w^E N$ y observamos que como $(N \cdot N) = 1$ (esta es la función constante 1 en U) la fórmula (8) nos indica que

$$0 = w(N \cdot N) = \nabla_w^E N \cdot N + N \cdot \nabla_w^E N = 2(\nabla_w^E N \cdot N)$$

es decir que $\nabla_w^E N \in T_p(M)$ pues el espacio tangente a M en p es el subespacio de $T_p(\mathbb{R}^3)$ formado por los vectores ortogonales a $N(p)$. Esto produce algo interesante y es que si movemos el vector w a lo largo de todo el espacio tangente $T_p(M)$ (como el N está fijo) se genera un función

$$w \rightarrow \nabla_w^E N$$

que tiene la importante propiedad de ser **lineal en w** como se ve inmediatamente de la definición. Es costumbre usar para este operador lineal de $T_p(M)$ la notación

$$A_N(w) = -\nabla_w^E N$$

y se lo llama **Operador de Weingarten** o más modernamente **Operador Forma de M en el punto p** .

Observamos que si $Y(u, v)$ es un campo tangente en M entonces podemos calcular $A_N(Y)$ lo que nos da un vector tangente en cada punto $X(u, v)$ sin embargo no es claro que esto sea nuevamente diferenciable, (el campo tangente se escribe en términos de X_u y X_v con componentes C^∞ y se usa la Sección 10).

La razón del signo negativo en la definición de A_N tiene su origen en el siguiente hecho. Si $Y = Y(u, v)$ es un campo tangente a M y $w \in T_p(M)$ entonces como $(Y \cdot N) \equiv 0$ en M tenemos por (8) y la identidad de Gauss que

$$\begin{aligned} 0 &= w(Y \cdot N) = \nabla_w^E Y \cdot N + Y \cdot \nabla_w^E N = \\ &= \alpha(w, Y(u_o, v_o)) \cdot N + Y(u_o, v_o) \cdot \nabla_w^E N = \\ &= \alpha(w, Y(u_o, v_o)) \cdot N - Y(u_o, v_o) \cdot A_N(w) \end{aligned}$$

Es decir

$$(10) \quad \alpha(w, Y(u_o, v_o)) \cdot N = Y(u_o, v_o) \cdot A_N(w)$$

que es una identidad fundamental relacionando el operador forma con la segunda forma fundamental. Esta identidad nos permite probar lo que indicáramos más arriba respecto a que $\alpha(w, Y(u_o, v_o))$ no depende más que del vector tangente $Y(u_o, v_o)$ y no del resto del campo Y . En efecto, si $Z(u, v)$ es otro campo tangente a M tal que $Z(u_o, v_o) = Y(u_o, v_o)$ la identidad (10) indica que

$$\alpha(w, Y(u_o, v_o)) \cdot N = \alpha(w, Z(u_o, v_o)) \cdot N$$

y como el espacio vectorial normal tiene dimensión 1 resulta

$$\alpha(w, Y(u_o, v_o)) = \alpha(w, Z(u_o, v_o)).$$

Como todo vector tangente z a M en p es el valor de algún campo tangente C^∞ en $p = X(u_o, v_o)$ podemos escribir ahora $\alpha(w, z)$.

Siendo $\alpha(w, z)$ un vector normal por definición y N un vector unitario normal, su producto escalar define una función escalar (a valores reales) en $T_p(M) \times T_p(M)$ como

$$h(w, z) = \alpha(w, z) \cdot N.$$

Esta función real suele llamarse también segunda forma fundamental de M . Lo mas usual en la Geometría Diferencial clásica es trabajar con h . Esto tiene la ventaja de que ambas formas fundamentales toman valores en \mathbb{R} .

En nuestro contexto dejaremos claro en cada caso si trabajamos con una o la otra pero es obvio que son intercambiables.

5. EL OPERADOR FORMA

Vamos a continuar estudiando el operador forma de nuestra superficie M definida por la carta $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para esto hacemos primero la siguiente observación.

Lema 5.1. *El operador forma es simétrico.*

Prueba. Sea $p = X(u_o, v_o)$ un punto en M y llamemos $w = X_u(u_o, v_o)$ y $z = X_v(u_o, v_o)$ ambos son vectores de $T_p(M)$. Como $X_v(u, v)$ es un campo tangente en M tenemos obviamente $(X_v(u, v) \cdot N(u, v)) = 0$ y podemos calcular usando la fórmula (8)

$$(11) \quad 0 = w(X_v \cdot N) = \nabla_w^E X_v \cdot N + X_v \cdot \nabla_w^E N$$

y similarmente

$$(12) \quad 0 = z(X_u \cdot N) = \nabla_z^E X_u \cdot N + X_u \cdot \nabla_z^E N.$$

Ahora bien $\nabla_w^E X_v$ es la derivada del campo tangente $X_v(u, v)$ sobre una curva en M que tenga al vector w como tangente en el punto p . Como la elección de la curva es arbitraria, podemos tomar la curva $X(u, v_o)$ y restringir el campo $X_v(u, v)$ a esta curva. Tal restricción nos da obviamente el campo $X_v(u, v_o)$ y ahora derivamos ese campo con respecto al parámetro de la curva. Entonces tenemos

$$(13) \quad \nabla_w^E X_v = \left. \frac{dX_v(u, v_o)}{du} \right|_{u=u_o} = X_{vu}(u_o, v_o).$$

Similarmente

$$(14) \quad \nabla_z^E X_u = \left. \frac{dX_u(u_o, v)}{dv} \right|_{v=v_o} = X_{uv}(u_o, v_o).$$

Reemplazando ahora estos resultados en (11) y (12) y restando miembro a miembro por la igualdad de las derivadas segundas cruzadas

$$X_{vu}(u_o, v_o) = X_{uv}(u_o, v_o)$$

resulta

$$X_v \cdot \nabla_w^E N = X_u \cdot \nabla_z^E N$$

o lo mismo

$$X_v(u_o, v_o) \cdot A_N(X_u(u_o, v_o)) = X_u(u_o, v_o) \cdot A_N(X_v(u_o, v_o)).$$

Por la linealidad del operador forma esta igualdad basta para mostrar que este operador es simétrico. \blacklozenge

Corolario 5.2. *La segunda forma fundamental es una función bilineal simétrica. (esto es tanto para $h(w, z)$ como para $\alpha(w, z)$).*

Consideremos ahora una curva en M pasando por el punto $p = X(u_o, v_o)$. Esta será de la forma

$$\rho(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in (a, b), \quad u(t_o) = u_o, \quad v(t_o) = v_o.$$

Hagamos su desarrollo de Taylor de orden 2, alrededor de t_o . Tenemos

$$\begin{aligned} \rho(t_o + \Delta t) - \rho(t_o) &= \\ &= (X_u(u_o, v_o)u'(t_o) + X_v(u_o, v_o)v'(t_o))\Delta t + \\ &+ X_{uu}(u_o, v_o)(u'(t_o))^2 \frac{\Delta t^2}{2} + \\ &+ X_{vu}(u_o, v_o)u'(t_o)v'(t_o)\Delta t^2 + \\ &+ X_{vv}(u_o, v_o)(v'(t_o))^2 \frac{\Delta t^2}{2} + o(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Podemos considerar al vector diferencia $\rho(t_o + \Delta t) - \rho(t_o)$ como un vector en el espacio tangente $T_p(\mathbb{R}^3)$ y tomar la componente normal. Eliminando el punto (u_o, v_o) para simplificar notación tenemos

$$\begin{aligned} N \cdot (\rho(t_o + \Delta t) - \rho(t_o)) &= \\ &= [N \cdot X_{uu}(u')^2 + N \cdot X_{vu}u'v' + \\ &+ N \cdot X_{uv}u'v' + N \cdot X_{vv}(v')^2] \frac{\Delta t^2}{2} + o(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Sigue ahora de las fórmulas (11), (12), (13) y (14) que

$$\begin{aligned} (15) N(u_o, v_o) \cdot X_{vu}(u_o, v_o) &= -X_v(u_o, v_o) \cdot \nabla_{X_u(u_o, v_o)}^E N = \\ &= X_v(u_o, v_o) \cdot A_N(X_u(u_o, v_o)) = \\ &= \alpha(X_u(u_o, v_o), X_v(u_o, v_o)) \cdot N(u_o, v_o) = \\ &= h(X_u(u_o, v_o), X_v(u_o, v_o)); \end{aligned}$$

y similarmente se obtiene

$$(16) \quad N(u_o, v_o) \cdot X_{uu}(u_o, v_o) = h(X_u(u_o, v_o), X_u(u_o, v_o)),$$

$$(17) \quad N(u_o, v_o) \cdot X_{vv}(u_o, v_o) = h(X_v(u_o, v_o), X_v(u_o, v_o)).$$

Vemos así que la forma bilineal simétrica h mide la "desviación" de la curva ρ con respecto al plano tangente p .

Es usual denotar los coeficientes de la forma bilineal simétrica h en la base del espacio tangente $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ con

$$(18) \quad \begin{aligned} L(u, v) &= h(X_u(u, v), X_u(u, v)) = X_u(u_o, v_o) \cdot A_N(X_u(u_o, v_o)), \\ N(u, v) &= h(X_v(u, v), X_v(u, v)) = X_v(u_o, v_o) \cdot A_N(X_v(u_o, v_o)), \\ M(u, v) &= h(X_u(u, v), X_v(u, v)) = X_v(u_o, v_o) \cdot A_N(X_u(u_o, v_o)). \end{aligned}$$

Tomemos el vector unitario tangente en $p = X(u_o, v_o)$, $w = aX_u + bX_v$ y consideremos la curva $\beta(s) = X(u(s), v(s))$ parametrizada por longitud de arco y tal que $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = w$. La segunda derivada $\beta''(s)$ es por definición el **campo de curvatura** de la curva (de velocidad unitaria) $\beta(s)$. Queremos calcular el producto escalar $\beta''(0) \cdot N(u_o, v_o)$ tenemos

$$\beta''(0) \cdot N(u_o, v_o) = h(w, w)$$

pues

$$\beta'(s) \cdot N(u(s), v(s)) = 0, \quad \forall s.$$

Derivando y haciendo $s = 0$ tenemos

$$\beta''(0) \cdot N(u_o, v_o) + \beta'(0) \cdot \nabla_w^E N = 0$$

lo que resulta en

$$\beta''(0) \cdot N(u_o, v_o) = -\beta'(0) \cdot \nabla_w^E N = \beta'(0) \cdot A_N(w) = h(w, w).$$

Si el vector w no fuera unitario podemos tomar $\frac{w}{\sqrt{w \cdot w}}$ y construyendo la curva $\beta(s)$ como arriba parametrizada por longitud de arco tenemos igualmente

$$\beta''(0) \cdot N(u_o, v_o) = \frac{h(w, w)}{w \cdot w} = \frac{La^2 + 2Nab + Mb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

donde los coeficientes son calculados en el punto (u_o, v_o) . Esto muestra que la cantidad $\beta''(0) \cdot N(u_o, v_o)$, que es la componente normal de la aceleración de la curva en $s = 0$, es en verdad "independiente" de la curva y sólo depende del punto p y del vector tangente w . Esta cantidad se denomina la **curvatura normal de la superficie en la dirección del vector w** y se denota por $k_N(w)$. Claramente esta cantidad depende sólo de la dirección pues $k_N(-w) = k_N(w)$.

Vamos a pensar que tomamos la curvatura normal sólo de vectores unitarios tangentes a M en p y de este modo tenemos

$$k_N(w) = h(w, w) = w \cdot A_N(w).$$

Vemos así que $k_N(w)$ es lo que se denomina un polinomio cuadrático (forma cuadrática) en la esfera unidad del espacio tangente $T_p(M)$ y la transformación lineal A_N lo realiza con el producto escalar. Es bien sabido que podemos encontrar una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ del espacio tangente $T_p(M)$ tal

que si escribimos

$$w = ae_1 + be_2$$

entonces

$$(19) \quad k_N(w) = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2.$$

Podemos, si es necesario invertir el orden de los elementos de la base de modo que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2.$$

Estos números reales son los autovalores de la transformación lineal simétrica A_N y se denominan las **curvaturas principales** de M en p . Si las curvaturas principales son iguales, entonces k_N es constante (para todo w de norma 1 en $T_p(M)$) y en ese caso el punto p se denomina, **punto umbílico** de M (en rigor se usa el nombre de umbílico cuando $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ diciendose que el punto es **planar** si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Las direcciones dadas por los vectores tangentes de la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ se denominan las **direcciones principales** en el punto p . En un punto umbílico cualquier base ortonormal sirve para expresar la curvatura normal en la forma (19) y por eso se dice que en esos puntos todas las direcciones son principales.

Es usual considerar las funciones simétricas de las curvaturas principales

$$(20) \quad \begin{aligned} K &= \lambda_1 \lambda_2 = \det(A_N) \\ H &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_N) \end{aligned}$$

las cuales se denominan respectivamente **Curvatura Gaussiana** y **Curvatura Media** de M en el punto p .

6. CURVATURAS

Veamos el siguiente

Lema 6.1. *Sea M una superficie en R^3 y p un punto en M . Si $\{z, w\}$ es una base del espacio tangente $T_p(M)$, entonces*

$$\begin{aligned} A_N(z) \times A_N(w) &= K(p)(z \times w), \\ A_N(z) \times w + z \times A_N(w) &= 2H(p)(z \times w). \end{aligned}$$

Prueba. Como $\{z, w\}$ es una base de $T_p(M)$ podemos escribir

$$\begin{aligned} A_N(z) &= az + bw, \\ A_N(w) &= cz + dw. \end{aligned}$$

y así $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es la matriz de A_N en la base considerada. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} A_N(z) \times A_N(w) &= (az + bw) \times (cz + dw) = \\ &= (ad - bc)(z \times w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_N(z) \times w + z \times A_N(w) &= (az + bw) \times w + z \times (cz + dw) = \\ &= a(z \times w) + d(z \times w) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (20) resulta el lema. \blacklozenge

Ahora la "identidad de Lagrange": Dados cuatro vectores A, B, C, D en R^3 se cumple

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = \det \begin{bmatrix} A \cdot C & A \cdot D \\ B \cdot C & B \cdot D \end{bmatrix},$$

nos dice que

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{(A_N(z) \times A_N(w)) \cdot (z \times w)}{(z \times w) \cdot (z \times w)} \\ &= \frac{\det \begin{bmatrix} A_N(z) \cdot z & A_N(z) \cdot w \\ A_N(w) \cdot z & A_N(w) \cdot w \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} z \cdot z & z \cdot w \\ w \cdot z & w \cdot w \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

Notar que, como $\{z, w\}$ es una base, $(z \times w) \neq 0$ y el divisor, que es su norma al cuadrado, no se anula. Si especificamos la base $\{z, w\} = \{X_u(u_o, v_o), X_v(u_o, v_o)\}$ en el punto $p = X(u_o, v_o)$ tenemos

$$(21) \quad K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Similarmente para la curvatura media se obtiene

$$(22) \quad H(p) = \frac{EN + LG - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

Esto nos permite pensar a K y H como funciones definidas en U y claramente ellas son C^∞ .

Corolario 6.2. *Si la superficie M está libre de puntos umbílicos (propios o planares) entonces las curvaturas principales son funciones C^∞ en \dot{U} . En todo caso ellas son continuas en U y pueden escribirse como*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ \lambda_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}$$

Prueba.

$$H^2 - K = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4} - \lambda_1 \lambda_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4}.$$

Como hemos supuesto $\lambda_1 \geq \lambda_2$ tenemos $\sqrt{H^2 - K} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$ y entonces

$$H \pm \sqrt{H^2 - K} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 & + \\ \lambda_2 & - \end{cases}.$$

Notemos que el punto p es umbílico (o planar) sí y sólo sí $H^2 - K = 0$ lo cual dice que el conjunto

$$\{(u, v) \in U : X(u, v) \text{ no umbílico}\}$$

es abierto en U y por tanto en R^2 (obviamente puede ser \emptyset). \blacklozenge

Es costumbre decir que la superficie es **llana** (flat) si $K \equiv 0$ y **mínima** si $H \equiv 0$. En toda superficie mínima se tiene $K \leq 0$ pues en ellas debe ocurrir $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Es usual eliminar la posibilidad de que $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2$ lo cual se

”consigue” tomando el campo normal $(-N)$. En nuestra superficie de una sola carta donde tenemos la normal unívocamente definida en términos de los campos tangentes y estos tienen un orden dado por el de los parámetros esto puede lograrse definiendo una nueva carta para la misma superficie. Dada $X : U \rightarrow R^3$, tomemos un nuevo abierto $V \subset R^2$

$$V = \{(a, b) : (b, a) \in U\}$$

y consideremos ahora la función $t : V \rightarrow U$ definida por $t(a, b) = (b, a) = (t_1(a, b), t_2(a, b))$; $t_1(a, b) = b$, $t_2(a, b) = a$. La matriz jacobiana de t es claramente

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y ahora definimos $Y : V \rightarrow R^3$ mediante

$$Y(u, v) = X(t(u, v)).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} Y_u(u, v) &= \frac{\partial X}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial t_2}, \\ Y_v(u, v) &= \frac{\partial X}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial t_1} \end{aligned}$$

y de este modo el nuevo N es el opuesto del anterior.

Esto tiene un inconveniente obvio y es que podemos haber arreglado las cosas en algunos puntos pero haberlas arruinado en otros por lo cual necesitamos hacer este cambio ”localmente” restringiendo la nueva carta a un abierto más chico es decir tenemos que fraccionar el dominio de la carta.

7. OTRA VEZ LA identidad de Gauss

Queremos obtener una descripción más pedestre y por ende más clásica, de la identidad de Gauss (7) escribiendo la expresión en términos de la base de $T_p(R^3)$ en cada punto de la superficie M es decir, de $\{X_u, X_v, N\}$. Para esto derivamos los miembros de la base con respecto a ellos mismos, el efecto es similar al de las ecuaciones de Frenet para las curvas.

Tenemos nuestra $M = X(U)$ y tomamos nuevamente un punto $p = X(u_o, v_o)$. Tenemos que $\nabla_{X_u}^E X_u \in T_p(R^3)$ y por tanto puede escribirse como

$$\begin{aligned} \nabla_{X_u}^E X_u &= \Gamma_{uu}^u X_u + \Gamma_{uu}^v X_v + h(X_u, X_u) \hat{N} = \\ &= \Gamma_{uu}^u X_u + \Gamma_{uu}^v X_v + L \hat{N} \end{aligned}$$

(para evitar confusión entre el campo normal N y la función N de la segunda forma, denotamos con \hat{N} al campo normal). Ahora debemos calcular los coeficientes Γ que se denominan **símbolos de Christoffel de segunda especie**.

Si multiplicamos escalarmente esta ecuación por X_u y X_v tenemos, ya que por definición $\nabla_{X_u}^E X_u = X_{uu}$,

$$\begin{aligned} X_{uu} \cdot X_u &= \Gamma_{uu}^u X_u \cdot X_u + \Gamma_{uu}^v X_v \cdot X_u \\ X_{uu} \cdot X_v &= \Gamma_{uu}^u X_u \cdot X_v + \Gamma_{uu}^v X_v \cdot X_v \end{aligned}$$

o igualmente

$$(23) \quad \begin{aligned} X_{uu} \cdot X_u &= \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F \\ X_{uu} \cdot X_v &= \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G \end{aligned}$$

y como nuestra matriz de la primera forma cumple $EG - F^2 > 0$ podemos obtener los coeficientes. Para esto es conveniente tener los productos escalares de la izquierda calculados de alguna otra forma y aquí observamos que como $E = X_u \cdot X_u$ derivando respecto de u tenemos

$$E_u = 2X_{uu} \cdot X_u$$

y similarmente derivando $F = X_u \cdot X_v$ respecto de u tenemos

$$F_u = X_{uu} \cdot X_v + X_u \cdot X_{vu}$$

de modo que para obtener lo que necesitamos hay que hacer también $X_u \cdot X_{vu}$. Hacemos

$$E_v = 2X_{uv} \cdot X_u$$

por la igualdad de las derivadas cruzadas y finalmente

$$X_{uu} \cdot X_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

y así nuestro sistema toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_u &= X_{uu} \cdot X_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v &= X_{uu} \cdot X_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G \end{aligned}$$

y así se ve que los coeficientes son funciones del punto (u, v) que se escriben en términos de los coeficientes de la primera forma. Es también clásico llamar a los productos escalares de la izquierda en (23)

$$\begin{aligned} X_{uu} \cdot X_u &= \Gamma_{uuu} \\ X_{uu} \cdot X_v &= \Gamma_{vuu} \end{aligned}$$

(nótese la vueltita de los subíndices) que son los **símbolos de Christoffel de primera especie**. Ellos son

$$\begin{aligned} \Gamma_{uuu} &= \frac{1}{2}E_u, & \Gamma_{uuv} &= \Gamma_{vuu} = \frac{1}{2}E_v, & \Gamma_{uvv} &= F_u - \frac{1}{2}G_u, \\ \Gamma_{vuu} &= F_u - \frac{1}{2}E_v, & \Gamma_{vuv} &= \Gamma_{vvu} = \frac{1}{2}G_u, & \Gamma_{vvv} &= \frac{1}{2}G_v. \end{aligned}$$

Para obtener los de segunda especie se debe multiplicar por la matriz inversa de la primera forma (ver Sección 10). Nótese que los símbolos de Christoffel de segunda nos dan la expresión de la componente tangencial de la derivada covariante Euclidea que es la derivada covariante intínseca $\nabla_w Y$.

8. EL TEOREMA DE GAUSS

La fórmula (21) parece indicar que la curvatura de Gauss depende inexorablemente de los coeficientes de las formas fundamentales primera y segunda. Es uno de los descubrimientos mas importantes de Gauss que tal dependencia es sólo aparente pues en verdad hay una relación profunda entre ambas formas que hace que K pueda expresarse sólo en términos de las funciones E , F y G . Ese es nuestro próximo resultado

Teorema 8.1. (*Egregium*) *La curvatura Gaussiana puede calcularse en cada punto en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y algunas de sus derivadas.*

Prueba. Tenemos la fórmula (21) y recordemos (15), (16) y (17). Podemos escribir

$$K = \frac{[X_{uu} \cdot X_u \times X_v][X_{vv} \cdot X_u \times X_v] - [X_{uv} \cdot X_u \times X_v]^2}{(EG - F^2)^2},$$

o bien

(24)

$$(EG - F^2)^2 K = [X_{uu} \cdot X_u \times X_v][X_{vv} \cdot X_u \times X_v] - [X_{uv} \cdot X_u \times X_v]^2.$$

Pero

$$A \cdot B \times C = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

de modo que en el denominador tenemos el producto de dos determinantes y el cuadrado de otro. Por otra parte

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= (\det A)(\det B), \\ \det(A^t) &= \det A. \end{aligned}$$

de modo que también

$$A \cdot B \times C = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto tenemos algunas identidades

$$[X_{uu} \cdot X_u \times X_v] = \det [X_{uu}, X_u, X_v]$$

donde en la notación del segundo miembro $[X_{uu}, X_u, X_v]$ indica la matriz (3×3) cuyas columnas son las componentes euclideas de los vectores X_{uu} , X_u y X_v respectivamente. Nótese que también podemos escribir

$$[X_{uu} \cdot X_u \times X_v] = \det \begin{bmatrix} X_{uu} \\ X_u \\ X_v \end{bmatrix}$$

donde ahora los vectores X_{uu} , X_u y X_v son las filas en el orden obvio.

Usando esto podemos escribir

$$\begin{aligned} [X_{uu} \cdot X_u \times X_v] [X_{vv} \cdot X_u \times X_v] &= \det \begin{bmatrix} X_{uu} \\ X_u \\ X_v \end{bmatrix} \det [X_{vv}, X_u, X_v] = \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} X_{uu} \\ X_u \\ X_v \end{bmatrix} [X_{vv}, X_u, X_v] \right) = Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \det \begin{bmatrix} X_{uu} \cdot X_{vv} & X_{uu} \cdot X_u & X_{uu} \cdot X_v \\ X_u \cdot X_{vv} & X_u \cdot X_u & X_u \cdot X_v \\ X_v \cdot X_{vv} & X_u \cdot X_v & X_v \cdot X_v \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} X_{uu} \cdot X_{vv} & X_{uu} \cdot X_u & X_{uu} \cdot X_v \\ X_u \cdot X_{vv} & E & F \\ X_v \cdot X_{vv} & F & G \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Con un esquema similar se puede hacer el otro término de la derecha de (24) obteniendo

$$[X_{uv} \cdot X_u \times X_v]^2 = \det \begin{bmatrix} X_{uv} \cdot X_{uv} & X_{uv} \cdot X_u & X_{uv} \cdot X_v \\ X_u \cdot X_{uv} & E & F \\ X_v \cdot X_{uv} & F & G \end{bmatrix}.$$

Hora, desarrollando ambos determinantes por la primera fila podemos escribir (24) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} (EG - F^2)^2 K &= (X_{uu} \cdot X_{vv} - X_{uv} \cdot X_{uv}) (EG - F^2) + \\ &+ \det \begin{bmatrix} 0 & X_{uu} \cdot X_u & X_{uu} \cdot X_v \\ X_u \cdot X_{vv} & E & F \\ X_v \cdot X_{vv} & F & G \end{bmatrix} - \\ &- \det \begin{bmatrix} 0 & X_{uv} \cdot X_u & X_{uv} \cdot X_v \\ X_u \cdot X_{uv} & E & F \\ X_v \cdot X_{uv} & F & G \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Estudiemos ahora, separadamente, las ocho entradas en estos dos determinantes que están escritas como productos escalares. En verdad son seis los productos a calcular. Empecemos con $X_{uu} \cdot X_u$. Como $E = X_u \cdot X_u$ derivando respecto a u obtenemos inmediatamente

$$X_{uu} \cdot X_u = \frac{1}{2} E_u.$$

Procediendo similarmente se obtiene inmediatamente

$$X_v \cdot X_{vv} = \frac{1}{2} G_v, \quad X_v \cdot X_{uv} = \frac{1}{2} G_u, \quad X_u \cdot X_{uv} = \frac{1}{2} E_v.$$

Por otra parte

$$F_u = X_{uu} \cdot X_v + X_u \cdot X_{uv}$$

de modo que

$$(25) \quad X_{uu} \cdot X_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

y similarmente

$$X_{vv} \cdot X_u = F_v - \frac{1}{2}G_u.$$

De este modo tenemos escritos los seis productos que conforman la ocho entradas en términos de primera derivadas de las funciones E , F y G .

Nos falta ahora una expresión para $(X_{uu} \cdot X_{vv} - X_{uv} \cdot X_{uv})$ para lo cual procedemos como sigue.

A partir de $X_v \cdot X_{uv} = \frac{1}{2}G_u$ derivando ambos miembros con respecto a u obtenemos

$$(26) \quad \frac{1}{2}G_{uu} = X_{uv} \cdot X_{uv} + X_v \cdot X_{uvu}$$

y partiendo de (25) y derivando respecto de v obtenemos

$$(27) \quad F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} = X_{uvv} \cdot X_v + X_{uu} \cdot X_{vv}.$$

Restando ahora miembro a miembro (27) menos (26) y usando la igualdad de las derivadas cruzadas resulta finalmente

$$(X_{uu} \cdot X_{vv} - X_{uv} \cdot X_{uv}) = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Esto completa la demostración del Teorema Egregium. \blacklozenge

Es importante notar que como corolario obtenemos inmediatamente la **ecuación de Gauss**

$$\begin{aligned} (LN - M^2) &= \left(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} \right) + \\ &+ \frac{1}{(EG - F^2)} \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{bmatrix} - \\ &- \frac{1}{(EG - F^2)} \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

que establece una profunda relación entre los coeficientes de la segunda forma y los de la primera como una ecuación diferencial. Esto indica que no se pueden elegir arbitrariamente 6 funciones en el abierto U y esperar que haya una superficie para la cual ellas sean los coeficientes de las formas primera y segunda.

9. OTRA VEZ EL TEOREMA DE GAUSS

Debido a la notable importancia de este resultado, incluimos en esta sección otra demostración del Teorema Egregium.

Como por la parte (3) de la definición de superficie, los campos tangentes

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u}(u, v) U_j(X(u, v)), \\ X_v(u, v) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial v}(u, v) U_j(X(u, v)) \end{aligned}$$

son linealmente independientes para cada (u, v) , tenemos que la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}$$

tiene rango 2 en cada punto y esto dice que al menos uno de los tres determinantes Jacobianos de orden 2 es no nulo en cada punto. Digamos que en el punto (u_o, v_o) (tal que $p = X(u_o, v_o)$) tenemos

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

Entonces el teorema de la función inversa nos dice, para la función de U a R^2 definida por

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u, v) \\ x_2 = x_2(u, v) \end{cases}$$

que hay un entorno abierto V de (u_o, v_o) ($V \subset U$) y otro H de $(x_1(u_o, v_o), x_2(u_o, v_o)) = (x_{1o}, x_{2o})$ tal que la función restringida a V es un difeomorfismo de V sobre H . Podemos escribir la función inversa definida en H como

$$\begin{cases} u = u(x_1, x_2) \\ v = v(x_1, x_2) \end{cases}$$

Entonces si ahora llamamos

$$h(x_1, x_2) = x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))$$

vemos que en el conjunto abierto $H \subset R^2$ tenemos definida la función

$$(28) \quad Y(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$$

cuya imagen coincide con $X(V) \subset M = X(U)$. De hecho $Y(x_1, x_2) = X(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))$ para $(x_1, x_2) \in H$.

Ahora $Y(H)$ coincide con el gráfico de h sobre H y tenemos los vectores tangentes en $p = Y(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} Y_1(x_1, x_2) &= U_1(Y(x_1, x_2)) + \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) U_3(Y(x_1, x_2)), \\ Y_2(x_1, x_2) &= U_2(Y(x_1, x_2)) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) U_3(Y(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Adoptaremos la siguiente notación más sencilla en cada punto de H .

$$h_1 = \frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad h_2 = \frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad h_{12} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ etc.}$$

Con esto es facil calcular

$$(29) \quad \begin{aligned} E &= 1 + h_1^2, & F &= h_1 h_2, & G &= 1 + h_2^2, \\ EG - F^2 &= 1 + h_1^2 + h_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{N} &= \frac{(-h_1, -h_2, 1)}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}} \\ L &= \frac{h_{11}}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}}, M = \frac{h_{12}}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}}, N = \frac{h_{22}}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}} \end{aligned}$$

y entonces por (21), para cada punto $(x_1, x_2) \in H$, la curvatura de Gauss toma la forma:

$$(30) \quad K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{[1 + h_1^2 + h_2^2]^2}.$$

Elijamos ahora un punto $p = Y(x_{1o}, x_{2o})$, $(x_{1o}, x_{2o}) \in H$ y consideremos el conjunto

$$\widetilde{H} = H - (x_{1o}, x_{2o}) = \{(x, y) \in R^2 : (x + x_{1o}, y + x_{2o}) \in H\}$$

en R^2 que es un entorno abierto de $(0, 0)$ y tomemos la función C^∞ a valores reales definida en \widetilde{H} por

$$\widetilde{h}(x, y) = h(x + x_{1o}, y + x_{2o}) - h(x_{1o}, x_{2o}) - xh_1(x_{1o}, x_{2o}) - yh_2(x_{1o}, x_{2o}).$$

Esta $\widetilde{h}(x, y)$ cumple: $\widetilde{h}(0, 0) = 0$, $\widetilde{h}_1(0, 0) = 0 = \widetilde{h}_2(0, 0)$ mientras que $\widetilde{h}_{11}(0, 0) = h_{11}(x_{1o}, x_{2o})$, $\widetilde{h}_{12}(0, 0) = h_{12}(x_{1o}, x_{2o})$ y $\widetilde{h}_{22}(0, 0) = h_{22}(x_{1o}, x_{2o})$. Ahora la función $\widetilde{Y}(x, y) = (x, y, \widetilde{h}(x, y))$ definida en \widetilde{H} define una nueva superficie en R^3 que no es otra cosa que la definida por (28) excepto por un movimiento rigido que lleva el punto p a coincidir con $(0, 0, 0)$ y el plano tangente en p a coincidir con el plano $(x, y, 0)$. Entonces tienen la misma curvatura de Gauss en p y $(0, 0, 0)$. Calculemos ahora $\widetilde{K}(0, 0)$ usando la fórmula (30)

$$\widetilde{K}(0, 0) = h_{11}(x_{1o}, x_{2o})h_{22}(x_{1o}, x_{2o}) - h_{12}^2(x_{1o}, x_{2o}).$$

Hagamos ahora el siguiente cálculo auxiliar a partir de la primera linea de (29).

$$\begin{aligned} E_2 &= 2h_1h_{12} \\ E_{22} &= 2h_{12}h_{12} + 2h_1h_{122} \end{aligned}$$

y similarmente se obtiene

$$\begin{aligned} F_{12} &= h_{112}h_2 + h_{11}h_{22} + h_{12}h_{21} + h_1h_{212} \\ G_{11} &= 2h_{21}h_{21} + 2h_2h_{211}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} E_{22} - 2F_{12} + G_{22} &= 2h_{12}h_{12} + 2h_1h_{122} - \\ &\quad - 2(h_{112}h_2 + h_{11}h_{22} + h_{12}h_{21} + h_1h_{212}) + \\ &\quad + 2h_{21}h_{21} + 2h_2h_{211} \\ &= 2h_{12}^2 - 2h_{11}h_{22} \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\tilde{K}(0,0) = -2(E_{22} - 2F_{12} + G_{22}).$$

Es decir que en el punto la curvatura de Gauss se calcula sólo con los coeficientes de la primera forma. ♦

10. LA MATRIZ DE A_N

Queremos entender cual es la matriz del operador forma en la base $\{X_u, X_v\}$ en cada punto de M .

Lema 10.1. *Sea A la matriz de la transformación lineal A_N en la base $\{X_u, X_v\}$; sabemos que la matriz de productos escalares de los miembros de esta base es*

$$C = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

y que $L = X_u \cdot A_N X_u$, $N = X_v \cdot A_N X_v$, $M = X_v \cdot A_N X_u$. Conforman la matriz

$$B = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz A es de la forma $A = C^{-1}B$ es decir

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - FM & MG - FN \\ ME - FL & NE - FM \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prueba. Ejercicio. ♦

De este modo tenemos

$$(31) \quad A_N(X_u) = \left(\frac{LG - FM}{EG - F^2} \right) X_u + \left(\frac{MG - FN}{EG - F^2} \right) X_v,$$

$$(32) \quad A_N(X_v) = \left(\frac{ME - FL}{EG - F^2} \right) X_u + \left(\frac{NE - FM}{EG - F^2} \right) X_v.$$

11. LAS ECUACIONES DE CODAZZI-MAINARDI

Estas ecuaciones completan el conjunto de ecuaciones necesarias para establecer todas las relaciones entre las funciones de la primera y la segunda forma.

Partiendo de la definición de las funciones L , M y N de (18). Calculamos

$$\begin{aligned} X_v(L) &= \nabla_{X_v}^E N \cdot X_{uu} + N \cdot X_{uuv} = -A_N(X_v) \cdot X_{uu} + N \cdot X_{uuv} \\ X_u(M) &= \nabla_{X_u}^E N \cdot X_{uv} + N \cdot X_{uvu} = -A_N(X_u) \cdot X_{uv} + N \cdot X_{uvu}, \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned} X_u(N) &= \nabla_{X_u}^E N \cdot X_{vv} + N \cdot X_{vvu} = -A_N(X_u) \cdot X_{vv} + N \cdot X_{vvu}, \\ X_v(M) &= \nabla_{X_v}^E N \cdot X_{uv} + N \cdot X_{uvv} = -A_N(X_v) \cdot X_{uv} + N \cdot X_{uvv}, \end{aligned}$$

Restando ahora miembro a miembro cada par de ecuaciones y usando la igualdad de las derivadas terceras cruzadas tenemos

$$X_u(M) - X_v(L) = A_N(X_v) \cdot X_{uu} - A_N(X_u) \cdot X_{uv},$$

$$X_u(N) - X_v(M) = A_N(X_v) \cdot X_{uu} - A_N(X_u) \cdot X_{uv}.$$

Estas son las ecuaciones buscadas. Ahora para completar su expresión es necesario usar (31) que nos da la matriz del operador forma en la base $\{X_u, X_v\}$ y expresar los productos escalares que quedan indicados usando las identidades calculadas en la prueba del Teorema Egregium. Por ejemplo

$$\begin{aligned} A_N(X_v) \cdot X_{uu} &= \left[\left(\frac{LG - FM}{EG - F^2} \right) X_u + \left(\frac{MG - FN}{EG - F^2} \right) X_v \right] \cdot X_{uu} \\ X_u \cdot X_{uu} &= \frac{1}{2} E_u, \quad X_v \cdot X_{uu} = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

y recordar que

$$X_u(M) = \frac{\partial M}{\partial u} = M_u.$$

Aparentemente estas ecuaciones fueron obtenidas independientemente por Peterson (1852) Mainardi (1857) y Codazzi (1868). Como veremos, el conjunto de tres ecuaciones (estas dos más la de Gauss) "determina" la superficie. Estas tres ecuaciones, las cuales son independientes, pueden escribirse de la siguiente manera:

$$(33) \quad \frac{(LN - M^2)}{(EG - F^2)} = -\frac{1}{(EG - F^2)} \det \begin{bmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{bmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{(EG - F^2)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{(EG - F^2)}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{(EG - F^2)}} \right) \right\}$$

(34)

$$2(EG - F^2)(L_v - M_u) - Q(E_v - F_u) + \det \begin{bmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{bmatrix} = 0$$

$$2(EG - F^2)(M_v - N_u) - Q(F_v - G_u) + \det \begin{bmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{bmatrix} = 0$$

donde $Q = EN + LG - 2FM$.

12. EL TEOREMA FINAL

El siguiente Teorema es debido a Peterson (1852) y Bonet (1867).

Teorema 12.1. (*Fundamental*) *Supongamos que en un dominio U (abierto conexo) en R^2 con variables u y v tenemos dadas seis funciones E, F, G y L, M, N (C^∞) que conforman dos formas cuadráticas I y II con $(EG - F^2) > 0$ en U . Entonces si estas satisfacen el sistema de tres ecuaciones (33) y (34), existe una superficie parametrizada por $X : U \rightarrow R^3$ para la cual estas formas cuadráticas son su primera y segunda formas. Esta superficie está univocamente definida salvo movimientos rígidos en R^3 .*

Prueba. Probaremos sólo la unicidad.

La superficie $X : U \rightarrow R^3$ (si existe con los dados E, F, G y L, M, N) está determinada salvo un movimiento rígido. Para ver esto supongamos que son dos las superficies existentes $X(u, v)$ e $Y(u, v)$ ambas definidas en U . Por una traslación en R^3 podemos lograr que ellas tengan en común el punto $p = X(u_o, v_o) = Y(u_o, v_o)$. En el punto p tenemos las bases de $T_p(R^3)$ $\{X_u(u_o, v_o), X_v(u_o, v_o), N^X(u_o, v_o)\}$ y $\{Y_u(u_o, v_o), Y_v(u_o, v_o) = N^Y(u_o, v_o)\}$ y es bien sabido que hay una isometría de R^3 de hecho una transformación ortogonal que lleva la primera base en la segunda pues el ángulo entre $X_u(u_o, v_o)$ y $X_v(u_o, v_o)$ es el mismo que entre $Y_u(u_o, v_o)$ y $Y_v(u_o, v_o)$ y las longitudes de $X_u(u_o, v_o)$ y $Y_u(u_o, v_o)$ (y también las de $X_v(u_o, v_o)$ y $Y_v(u_o, v_o)$) son iguales.

Consideremos ahora cualquier curva C^∞ regular (derivada no nula en todo punto) C en U y pasando por (u_o, v_o) , es decir $(u(t), v(t)), (u'(t), v'(t)) \neq (0, 0)$ y $(u(t_o), v(t_o)) = (u_o, v_o)$.

La curva $X(u(t), v(t))$ y los campos $X_u(u(t), v(t))$ y $X_v(u(t), v(t))$ a lo largo de ella, satisfacen sobre la curva las ecuaciones

$$(35) \quad \begin{aligned} X'(t) &= X_u(t) u'(t) + X_v(t) v'(t), \\ X'_u(t) &= X_{uu}(t) u'(t) + X_{uv}(t) v'(t), \\ X'_v(t) &= X_{vu}(t) u'(t) + X_{vv}(t) v'(t). \end{aligned}$$

Ahora, como por la identidad de Gauss (7) y la Sección 7 tenemos (usando \widehat{N} para indicar el campo normal para evitar confusión con la función N)

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \nabla_{X_u}^E X_u = \Gamma_{uu}^u X_u + \Gamma_{uu}^v X_v + L \widehat{N} \\ X_{uv} &= \nabla_{X_u}^E X_v = \Gamma_{uv}^u X_u + \Gamma_{uv}^v X_v + M \widehat{N} \\ X_{vv} &= \nabla_{X_v}^E X_v = \Gamma_{vv}^u X_u + \Gamma_{vv}^v X_v + N \widehat{N} \end{aligned}$$

las cuales reemplazamos en (35) y recordando que

$$\widehat{N} = \frac{X_u \times X_v}{EG - F^2}$$

y también reemplazándolo en (35) nos quedan tres ecuaciones diferenciales vectoriales ordinarias en las tres funciones vectoriales $X'(t)$, $X'_u(t)$ y $X'_v(t)$ (cada una de ellas tiene tres componentes escalares)

$$\begin{aligned} X'(t) &= \mathbb{R}(X_u(t), X_v(t), t) = X_u(t) u'(t) + X_v(t) v'(t), \\ X'_u(t) &= \mathbb{S}(X_u(t), X_v(t), t), \\ X'_v(t) &= \mathbb{T}(X_u(t), X_v(t), t). \end{aligned}$$

La función \mathbb{R} está determinada sólo por la curva C mientras que en las funciones \mathbb{S} y \mathbb{T} intervienen también las funciones E, F, G, L, M y N sobre la curva.

Por lo tanto **las mismas** ecuaciones diferenciales son satisfechas por las tres funciones vectoriales $Y(t)$, $Y_u(t)$, $Y_v(t)$ y como estas coinciden con las anteriores en el punto (u_o, v_o) , entonces coinciden para todo t en el dominio de C por el teorema de unicidad de las soluciones de de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Como la curva C es arbitraria (pasando por (u_o, v_o)) resulta que las imágenes de todas las curvas en el espacio de parámetros (pasando por (u_o, v_o)) por las funciones $X(u, v)$ e $Y(u, v)$ coinciden salvo el movimiento rígido del comienzo lo cual dice que las funciones coinciden en todo punto de U .

Para la prueba de la existencia de la función $X(u, v)$ se puede consultar [1] o [2]. ♦

REFERENCES

- [1] Stoker J.J., Differential Geometry, Wiley-Interscience 1969 (SBN 471 82825 4).
- [2] Spivak M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. III Publish or Perish, Inc. Berkeley 1979.
- [3] Willmore T.J., An introduction to Differential Geometry, Oxford University Press, 1966
- [4] O'Neill B. Elementary Differential Geometry, Accademic Press 1966.

FAMAF AND CIEM, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, CÓRDOBA, ARGENTINA
E-mail address: `csanchez@mate.uncor.edu`