UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE "B"

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 3/87

Tópicos de la Geometría Riemanniana Homogénea

Isabel G. Dotti

Editor: Oscar A. Cámpoli

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

INSTITUTO DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA

I.M.A.F.

TRABAJOS DE MATEMATICA

(Duplicado)

ISSN 0326-1468

Nº 3/87

TOPICOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA HOMOGENEA

ISABEL G. DOTTI

CIUDAD UNIVERSITARIA
5000 CORDOBA
REPUBLICA ARGENTINA

TRABAJO DE MATEMATICA

Editor: Oscar A. CAMPOLI

ISSN 0326-1468

N° 3/87

TOPICOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA HOMOGENEA

ISABEL G. DOTTI

Publicación realizada con subsidio del CONICOR.

TOPICOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA HOMOGENEA

Isabel G. Dotti

Introducción.

Estas notas contienen el material de un curso de posgrado sobre Geometría Homogénea dictado durante el Segundo Semestre de 1986 en el Departamento de Matemática de FAMAF. Dicho curso fue pensado para que estudiantes de licenciatura y doctorado adquiriesen nociones sobre curvatura de métricas invariantes que le permitieran acceder a varios artículos especializados en el área.

I N D I C E

CAPITULO I

PRELIMINARES

§ 1. Grupos y álgebras de Lie.

En este sección enunciaremos algunos resultados básicos de grupos de Lie y espacios homogéneos con el propósito de establecer un lenguaje mínimo para que el curso "resulte" autocontenido.

Definición 1.1. Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable que tiene la estructura de un grupo de tal forma que la aplicación $\varphi : G \times G \to G$, $(x,y) \to x \cdot y^{-1}$, $x,y \in G$ es diferenciable (C^{∞}).

Definición 1.2. Un álgebra de Lie es un espacio vectorial V junto con una aplicación $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ tal que

(i) $[a_1V_1 + a_2V_2, W] = a_1[V_1,W] + a_2[V_2,W]$,

(ii) $[V,W] = -[W,V]$

(iii) $[V_1[V_2,V_3]] + [V_2[V_3,V_1]] + [V_3[V_1,V_2]] = 0$

para V_1,V_2,V_3,W en V y a_1,a_2 en $\mathbb{R}$.

Ejemplos 1.3.

(i) $(\mathbb{R}^n,+)$ es un grupo de Lie. En efecto $(x,y) \to x - y$ es C^{∞}. Si en $\mathbb{R}^n$ consideramos $[x,y] = 0$ entonces $(\mathbb{R}^n,[\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie.

(ii) $(C - \{0\},\cdot)$ y $(S',\cdot)$, donde $\cdot$ denota producto de números complejos son grupos de Lie. Esta afirmación, en el caso $C - \{0\}$, sigue de observar que

$$xy^{-1} = \frac{x\bar{y}}{|y|^2} = \frac{(x_1 + ix_2)(y_1 - iy_2)}{y_1^2 + y_2^2} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{y_1^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1^2 + y_2^2}$$

de donde resulta la función $(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) \to (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2)^{-1}\, C^{\infty}$.

Para demostrarlo en el caso de S' recordemos que si en el diagrama

$$\begin{tikzcd} S' \times S' \arrow[r] \arrow[rrd, dashed] & C - \{0\} \times C - \{0\} \arrow[r] & C - \{0\} \\ & & S' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

la aplicación superior es C^{∞} y la diagonal es contínua, haciendo el diagrama conmutativo, entonces resulta la diagonal una función C^{∞} ; ver [W, pág. 26].

(iii) Si G_1 y G_2 son grupos de Lie entonces $G_1 \times G_2$ con la estructura producto, algebraica y diferencial, es un grupo de Lie. Resulta de ésto y (ii) que T^n es un grupo de Lie.

<u>Observación 1.4</u>. Es posible demostrar que los únicos grupos de Lie conexos conmutativos son, salvo isomorfismos, los productos $R^n \times T^k$.

(iv) El "primer" ejemplo de álgebra de Lie no conmutativa está dado por $\mathfrak{gl}(n,R)$, matrices $n \times n$ con coeficientes reales donde se define $[A,B] = AB - BA$.

(v) Si M es una variedad diferenciable y $\chi(M)$ es el espacio de campos C^{∞} sobre M entonces $\chi(M)$ con $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ es un álgebra de Lie de dimensión infinita.

Describiremos ahora el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G.

Si $x \in G$ las aplicaciones $L_x : G \to G$, $z \to xz$ y $R_x : G \to G$, $z \to zx$ son difeomorfismos de G denominados traslación a izquierda y a derecha respectivamente.

Definición 1.5. Un campo vectorial $X \in \chi(G)$ se dice invariante a izquierda (respectivamente invariante a derecha) si $X_x = (dL_x)_e X_e$ $\left(\text{resp } X_x = (dR_x)_e X_e\right)$.

Es claro que los campos invariantes a izquierda, que denotamos $\chi^L(G)$, forman un subespacio vectorial de $\chi(G)$. Además, la aplicación natural

$$\chi^L(G) \to T_e(G) \; ; \quad X \to X_e$$

es lineal e inyectiva. $\left(T_e(G)\right.$ denota al espacio tangente al grupo de Lie G en la identidad$\left.\right)$.

Proposición 1.6. Si $v \in T_e(G)$ entonces $X_x = (dL_x)_e(v)$ es un campo C^{∞} (y por definición es invariante a izquierda).

Demostración: Debemos mostrar que $x \to X_x(f) = v(f \circ L_x)$ es C^{∞} para $f \in C^{\infty}(G)$. Para ello consideremos $\varphi : G \times G \to G$ la multiplicación, i_e^1 e i_x^2 de $G \to G \times G$ definidos por $i_e^1(x) = (x,e)$; $i_x^2(z) = (x,z)$. Sea Y campo C^{∞} en G tal que $Y_e = v$. Entonces

$$[(0,Y)(f \circ \varphi)] \circ i_e^1(x) = (0,Y)_{(x,e)}(f \circ \varphi) =$$

$$0_x(f \circ \varphi \circ i_e^1) + Y_e(f \circ \varphi \circ i_x^2) = v(f \circ L_x)$$

lo que exhibe a $x \to v'(f \circ L_x)$ como composición de funciones C^∞. ||

Resulta de esta proposición que la aplicación $X \to X_e$, $\chi^L(G) \to T_e(G)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales. En lo que sigue probaremos que el corchete de Lie de campos vectoriales invariantes a izquierda es invariante a izquierda. Como consecuencia $\chi^L(G) \simeq T_e(G)$ tienen una estructura natural de álgebra de Lie que denotaremos por $\mathfrak{g}$. Diremos que $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G.

Definición 1.7. Sean M,N variedades diferenciables y $\varphi : M \to N$ C^∞. Campos vectoriales $X \in \chi(M)$ e $Y \in \chi(N)$ se dicen φ-relacionados si $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$.

Proposición 1.8. Sea $\varphi : M \to N$ C^∞. Si $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$ y $d\varphi \circ X_1 = Y_1 \circ \varphi$, $X,X_1 \in \chi(M)$, $Y,Y_1 \in \chi(N)$ entonces $[X,X_1]$ está φ-relacionado con $[Y,Y_1]$.

Demostración: Sea $f \in C^\infty(N)$ y $m \in M$, entonces

$$(d\varphi)_m[X,X_1]_m(f) = [X,X_1]_m(f \circ \varphi)$$

$$= X_m(X_1(f \circ \varphi)) - (X_1)_m(X(f \circ \varphi))$$

$$= X_m(Y_1(f) \circ \varphi) - (X_1)_m(Y(f) \circ \varphi)$$

$$= Y_{\varphi(m)}(Y_1(f)) - (Y_1)_{\varphi(m)}(Y(f))$$

$$= [Y,Y_1]_{\varphi(m)}(f). \quad ||$$

Corolario 1.9. Si X e Y son campos invariantes a izquierda en un grupo de Lie G entonces $[X,Y]$ es invariante a izquierda.

Demostración: De la definición de campo invariante a izquieda resulta que X e Y están L_x relacionados con X e Y respectivamente. De la proposición 1.8 resulta que $dL_x \circ [X,Y] = [X,Y] \circ L_x$. ||

Observación 1.10. Como consecuencia de 1.6 un grupo de Lie G es una variedad paralelizable o sea existen $X_1, \dots, X_d$, $X_i \in \chi(G)$, $d = \dim G$ tal que en cada $x \in G$ constituyen una base del espacio tangente a G en x .

§ 2. Homomorfismos.

Definición 2.1. Sean G_1, G_2 grupos de Lie. Una aplicación $\varphi : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie si es un homomorfismo de grupos y es C^∞ . Si φ es además un difeomorfismo decimos que φ es un isomorfismo (de grupos de Lie). Si $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ son álgebras de Lie, una transformación lineal ψ es un homomorfismo de álgebras de Lie si $\psi[X_1, X_2] = [\psi X_1, \psi X_2]$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$. Si ψ es además un isomorfismo de espacios vectoriales se dice que ψ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

La siguiente proposición muestra que un homomorfismo de grupos de Lie induce naturalmente un homomorfismo entre las álgebras de Lie asociadas.

Proposición 2.2. Si $\varphi : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie, $(d\varphi)_e$, la derivada de φ en la identidad $e \in G$, es un homomorfismo entre las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ de G_1 y G_2 respectivamente.

Demostración: Debemos mostrar que

$$(d\varphi)_e[X_1, X_2] = [(d\varphi)_e X_1, (d\varphi)_e X_2]$$

para X_1, X_2 en $\mathfrak{g}_1 = T_e(G_1)$.

Sean $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2$ $(X_1^\varphi, X_2^\varphi)$ los únicos campos invariantes a izquierda en G_1 (G_2) tales que en la identidad toman los valores X_1, X_2 $((d\varphi)_e X_1, (d\varphi)_e X_2)$. Entonces

$$(d\varphi)_e[X_1,X_2] = (d\varphi)_e[\tilde{X}_1,\tilde{X}_2]_e = d\varphi \circ [\tilde{X}_1,\tilde{X}_2](e) .$$

Por otro lado $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$ están φ relacionados con $X_1^{\varphi},X_2^{\varphi}$ respectivamente. En efecto, si $i = 1,2$

$$d\varphi \circ \tilde{X}_i(y) = (d\varphi)_y(dL_y)_e(X_i) = d(\varphi \circ L_y)_e X_i$$

$$= d(L_{\varphi(y)} \circ \varphi)_e X_i = (dL_{\varphi(y)})_e((d\varphi)_e X_i)$$

$$= X_i^{\varphi} \circ \varphi(y) ,$$

y como consecuencia de la proposición 1.8, sigue que

$$d\varphi \circ [\tilde{X}_1,\tilde{X}_2](e) = [X_1^{\varphi},X_2^{\varphi}] \circ \varphi(e) =$$

$$= [(d\varphi)_e X_1,(d\varphi)_e X_2] . \quad \|$$

En lo que sigue veremos que si G es un grupo de Lie conexo, el cubrimiento universal $\tilde{G}$ admite una estructura de grupo de Lie de manera que la aplicación canónica $\pi : \tilde{G} \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie tal que $(d\pi)_e : T_e(\tilde{G}) \to T_e(G)$ es un isomorfismo.

(2.3) Sea G un grupo de Lie conexo. Como G es localmente euclídeo, G tiene un cubrimiento simplemente conexo $\tilde{G}$; más aún existe una única estructura diferenciable en $\tilde{G}$ de manera que la aplicación de recubrimiento $\pi: \tilde{G} \to \tilde{G}$ es C^{∞} y con derivada inyectiva. Con el propósito de darle a $\tilde{G}$ una estructura de grupo de Lie consideremos $\alpha(\tilde{x},\tilde{y}) = \pi(\tilde{x})\pi(\tilde{y})$, $\beta(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})^{-1}$. Si fijamos $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$ existen únicos levantamientos

$$\tilde{\alpha}: \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}, \quad \tilde{\beta}: \tilde{G} \to \tilde{G}$$

tales que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, $\pi \circ \tilde{\beta} = \beta$ y $\tilde{\alpha}(\tilde{e},\tilde{e}) = \tilde{e} = \tilde{\beta}(\tilde{e})$.

Para $\tilde{x},\tilde{y}$ en $\tilde{G}$ sea $\widetilde{xy} = \tilde{\alpha}(\tilde{x},\tilde{y})$, $\tilde{x}^{-1} = \tilde{\beta}(\tilde{x})$.

No es difícil verificar que de esta forma definimos una estructura de grupo de Lie en $\tilde{G}$ de manera que π es un homomorfismo de grupos de Lie. Como π es un difeomorfismo local, resulta $(d\pi)_{\tilde{e}}$ un isomorfismo.

<u>Nota</u>: Si tomamos $\tilde{e}_1 \in \pi^{-1}(e)$ el grupo de Lie que se obtiene es isomorfo al obtenido antes.

§ 3. <u>Exponencial</u>.

Es nuestro propósito mostrar el siguiente resultado:

<u>Proposición 3.1</u>. Sea $X \in \mathfrak{g}$. Existe un único homomorfismo de grupos de Lie, $\theta : R \to G$ tal $\dot{\theta}(0) = X$.

La demostración que daremos en estas notas, aparece en [H, pág. 102], usa resultados básicos de geometría, a saber, exponencial de una conexión afin, geodésicas, etc. Para el lector que no haya visto dichos resultados referimos a [W, pág. 101]. En él aparece una demostración usando formas diferenciales invariantes, que no han sido introducidas pues "creemos" no serán usadas en lo que sigue del curso.

<u>Definición 3.2</u>. Sea G un grupo de Lie y ∇ una conexión afin en G . Diremos que ∇ es invariante a izquierda si L_x , $x \in G$, son transformaciones afines de G .

Sean $X_1, \ldots, X_n$ elementos de una base de T_eG y $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ los campos invariantes a izquierda asociados. Si ∇ es invariante a izquierda entonces $\nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j$ es invariante a izquierda. En efecto, recordemos que un difeomorfismo $\phi : M \to M$ es afin si $(\nabla_X Y)^\phi = \nabla_{X^\phi} Y^\phi$ para $X,Y \in \chi(M)$ donde si $Z \in \chi(M)$, $Z^\phi \circ \phi = d\phi \circ Z$ o sea Z^ϕ es el campo ϕ relacionado con Z. Por lo tanto

$$(dL_x)_y (\nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j)_y = (\nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j)^{L_x}_{xy} = (\nabla_{\tilde{X}_i^{L_x}} \tilde{X}_j^{L_x})_{xy} = (\nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j)_{xy}$$

donde la última igualdad se verifica pues $\tilde{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$ son campos invariantes a izquierda.

Recíprocamente podemos definir una conexión invariante a izquierda en G pidiendo que $\nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j$ sea invariante a izquierda y extendiendo de manera que ∇ sea una conexión afin. Esto es posible pues $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ es una base global de campos (ver 1.10).

<u>Lema 3.3</u>. Existe una correspondencia biunívoca entre conexiones invariantes a izquierda en G y transformaciones bilineales $\alpha : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por $\alpha(X,Y) = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_e$. Más aún $\alpha(X,X) = 0$ sí y solamente si la geodésica $t \to \gamma_X(t)$ es un homomorfismo C^∞ de R en G.

<u>Demostración</u>: Es claro que $\alpha(X,Y) = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_e$ define una transformación bili - neal de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Recíprocamente, dada α definamos $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \alpha(X,Y)^\sim$ donde con $\tilde{Z}$ denotamos el único campo invariante a izquierda cuyo valor en e es Z.

Sea $\tilde{X}$ invariante a izquierda. Existe $\varepsilon > 0$ y una curva

$\gamma^+ : [0,\varepsilon] \to G$ tal que

$$\gamma^+(0) = e \qquad \dot{\gamma}^+(s) = \widetilde{X}_{\gamma^+(s)} \; .$$

Sea $t \in R$, $t > 0$. Entonces $n\varepsilon \leq t \leq (n+1)\varepsilon$ para algún $n \in N$. Definimos, por inducción,

$$\gamma^+(t) = \gamma^+(n\varepsilon)\gamma^+(t - n\varepsilon) \; .$$

Resulta entonces γ^+ una extensión a $t \geq 0$ que satisface

$$\dot{\gamma}^+(t) = \frac{d}{dt}\Big|_t L_{\gamma^+(n\varepsilon)} \circ \gamma^+ \circ L_{-n\varepsilon} = d\left(L_{\gamma^+(n\varepsilon)} \circ \gamma^+ \circ L_{-n\varepsilon}\right)_t \left(\frac{d}{dt}\right)_t$$

$$= \left(dL_{\gamma^+(n\varepsilon)}\right)\left(\left(d\gamma^+\right)_{t-n\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\right)_{t-n\varepsilon}\right) = \left(dL_{\gamma^+(n\varepsilon)}\right)\left(\widetilde{X}_{\gamma^+(t-n\varepsilon)}\right)$$

$$= \widetilde{X}_{\gamma^+(t)} \; .$$

Supongamos $\alpha(X,X) = 0$. Entonces $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{X} = 0$ pues ∇ y $\widetilde{X}$ son invariantes a izquierda. Como consecuencia $\gamma^+(t)$, $t \geq 0$ es geodésica.

Si repetimos el argumento anterior con $-\widetilde{X}$ obtenemos una curva $\gamma^-(t)$ definida para $t \geq 0$, que es curva integral de $-\widetilde{X}$ y que resulta geodésica para $t \geq 0$. Como

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma^+(t) & t \geq 0 \\ \\ \gamma^-(-t) & t \leq 0 \end{cases}$$

es C' resulta $\gamma(t) = \gamma_X(t)$ donde $\gamma_X(t)$ es la geodésica tal que

$\gamma_X(0) = e$ y $\dot{\gamma}_e(e) = X$.

Para ver que $t \to \gamma_X(t)$ es un homomorfismo consideremos las geodésicas $t \to \gamma_X(s + t)$ y $t \to \gamma_X(s)\gamma_X(t)$, $s \in R$. El valor de ambas en $t = 0$ es $\gamma_X(s)$ y

$$d\big(\gamma_X(s)\gamma_X(t)\big)_o\left(\frac{d}{dt}\right)_o = \left(d\,L_{\gamma_X(s)}\right)_e(X) = \tilde{X}_{\gamma_X(s)} ,$$

$$d\big(\gamma_X(s + t)\big)_o \left(\frac{d}{dt}\right)_o = d\left(\gamma_X \circ L_s\right)_o\left(\frac{d}{dt}\right)_o = d\left(\gamma_X\right)_s\left(\frac{d}{dt}\right)_s$$

$$= \tilde{X}_{\gamma_X(s)} .$$

Luego resulta la afirmación.

Supongamos ahora que la geodésica $t \to \gamma_X(t)$ es un homomorfismo. Por ser geodésica, $\nabla_{\dot{\gamma}_X} \dot{\gamma}_X = 0$ a lo largo de $\gamma_X(t)$. Por ser homomorfismo $\gamma_X(t + s) = \gamma_X(t)\gamma_X(s) = L_{\gamma_X(t)}\gamma_X(s)$. Luego $\left(d\gamma_X\right)_t\left(\frac{d}{ds}\right)_t = d\big(\gamma_X(t + s)\big)_o\left(\frac{d}{ds}\right)_o =$ $= \left(dL_{\gamma_X(t)}\right)_e\left(d\gamma_X\right)_o\left(\frac{d}{ds}\right)_o = \tilde{X}_{\gamma_X(t)}$ y como consecuencia $\left(\nabla_{\dot{\gamma}_X} \dot{\gamma}_X\right)_{\gamma(t)} = \left(\nabla_{\dot{\gamma}_X} \tilde{X}\right)_{\gamma(t)}$; en particular $\alpha(X,X) = \left(\nabla_{\dot{\gamma}_X} \tilde{X}\right)_e = 0$. ||

<u>Demostración de la proposición 3.1</u>. Sea $X \in g$ y $\alpha : g \times g \to g$ bilineal tal que $\alpha(X,X) = 0$. (Notar que $\alpha(X,X) = [X,Y]$, $\alpha(X,X) = 0$ son ejemplos de transformaciones bilineales de $g \times g \to g$ que satisfacen $\alpha(X,X) = 0)$. Entonces sigue del lema que la geodésica γ_X , relativa a la conexión invariante que α define, es un homomorfismo que satisface $\dot{\gamma}_X(0) = X$.

Para probar la unicidad consideremos un homomorfismo de grupos de Lie

$\theta : R \to G$ tal que $\dot\theta(0) = X$. De $\theta(t+s) = \theta(t)\theta(s)$ sigue que $\dot\theta(t) = \tilde{X}_{\theta(t)}$ y como consecuencia $\left(\nabla_{\dot\theta}\, \dot\theta\right)_{\theta(t)} = \left(\nabla_{\tilde X}\, \tilde X\right)_{\theta(t)} = 0$. De la unicidad de geodésicas resulta $\theta(t) = \gamma_X(t)$, $t \in R$. ||

<u>Definición 3.4</u>. Para cada $X \in g$ escribimos $\exp X = \theta(1)$ donde θ es el homomorfismo de la proposición 3.1.

Notemos que $\exp(t+s)X = \exp tX \exp sX$. Esto resulta pues $\gamma_X(t) = \gamma_{tX}(1)$ ya que $s \to \gamma_X(ts)$ y $s \to \gamma_{tX}(s)$ son homomorfismos con igual derivada en $t = 0$.

De la definición de $\exp : g \to G$ y usando resultados conocidos de geometría se obtiene

<u>Teorema 3.5</u>. Existe un entorno N_o de 0 en g y un entorno abierto N_e de e en G tal que exp es un difeomorfismo de N_o sobre N_e..

Una relación entre la exponencial y homomorfismos de grupos de Lie la da

<u>Proposición 3.6</u>. Si $\varphi : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo entonces $\varphi(\exp X) = \exp((d\varphi)_e X)$.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia inmediata del hecho

$$t \to \varphi(\exp tX) \quad , \quad t \to \exp(t(d\varphi)_e X)$$

son homomorfismos de $R \to G_2$ con igual derivada en $t = 0$. ||

<u>Ejemplo 3.7</u>. Sea $GL(n,R)$ el grupo de matrices $n \times n$ inversibles con coeficientes en R y sea $g\ell(n,R)$ el álgebra de Lie de matrices $n \times n$, con coeficientes reales donde $[A,B] = AB - BA$ (ver 1.3, iv), A,B en $g\ell(n,R)$.

Si le damos a $GL(n,R)$ la estructura diferencial que hereda como subconjunto abierto de R^{n^2} no es difícil verificar que producto e inversión son C^∞ y por lo tanto $GL(n,R)$ es un grupo de Lie. Veremos en lo que sigue que $g\ell(n,R)$ es el álgebra de Lie de $GL(n,R)$ y que $\exp : g\ell(n,R) \to GL(n,R)$ coincide con la exponencial de matrices.

Sea $X \in T_e(GL(n,R))$ y $\tilde{X}$ el campo invariante asociado. Denotemos $a_{ij}(X) = \tilde{X}_e(x_{ij})$ donde x_{ij} son las funciones coordenadas de $GL(n,R) \subset R^{n^2}$. Es claro que la aplicación $X \to (a_{ij}(X))$, $T_e(GL(n,R)) \to g\ell(n,R)$ es lineal e inyectiva y por lo tanto surjectiva por razones de dimensión. Para verificar que es un homomorfismo de álgebras de Lie consideremos $\tilde{X}(x_{ij})(x) = (d\,L_x)_e\, X(x_{ij})$ $= X(x_{ij} \circ L_x)$. Como

$$(x_{ij} \circ L_x)(y) = x_{ij}(xy) = \sum_k x_{ik}(x)x_{kj}(y) = \left(\sum x_{ik}(x)x_{kj}\right)(y)$$

resulta

$$\tilde{X}(x_{ij})(x) = \sum_k x_{ik}(x)\, \tilde{X}_e(x_{kj}) = \sum_k x_{ik}(x)a_{kj}(X) .$$

Por lo tanto

$$\tilde{Y}_e\left(\tilde{X}(x_{ij})\right) = \sum_k a_{ik}(Y)\, a_{kj}(X) ,$$

y como consecuencia

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]_e(x_{ij}) = \sum a_{ik}(X)\, a_{kj}(Y) - a_{ik}(Y)\, a_{kj}(X) = [\,(a_{ij}(X))\,(a_{ij}(Y))]_{(i,j)}$$

Para obtener $\exp : g\ell(n,R) \to GL(n,R)$ observemos que

$$(\tilde{X}f)(\exp tX) = \dot{\gamma}_X(t)(f) = \frac{d}{dt}(f \exp tX)$$

para f una función C^∞ . Como consecuencia

$$\frac{d}{dt}\left(x_{ij} \circ \exp tX\right) = \left(\widetilde{X}\, x_{ij}\right)(\exp tX) = \sum_k x_{ik}(\exp tX)\; a_{kj}(X) \;.$$

Sea $Y(t) = \exp tX$. Entonces $Y(0) = e$ y

$$\frac{d}{dt}\left(Y(t)\right)_{ij} = \Sigma\, x_{ik}\left(Y(t)\right)X_{kj} = \left(Y(t)X\right)_{ij} \quad ,$$

(identificando $a_{kj}(X) = X_{kj}$) .

Como la exponencial de matrices

$$e^{tX} = I + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \ldots\ldots$$

también satisface la ecuación diferencial

$$Y(0) = e \quad , \qquad Y'(t) = Y(t)X$$

resulta $e^X = \exp X$.

§ 4. Representaciones.

Representación adjunta.

Si G es un grupo de Lie y $\rho : G \to GL(V)$, V espacio vectorial de dimensión finita, es un homomorfismo de grupos de Lie decimos que ρ es una representación de G . Análogamente, un homomorfismo de álgebras de Lie $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ se dice una representación de $\mathfrak{g}$.

Dado un grupo de Lie G , existe una representación "natural" asociada a G , la representación adjunta, definida como sigue:

Sea $I_x = L_x \circ R_{x^{-1}}$. Entonces I_x es un isomorfismo de $G \to G$, cualquiera sea $x \in G$. Por lo tanto $(dI_x)_e : g \to g$ es un isomorfismo de álgebras de Lie. Definimos

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(g) \quad , \qquad x \to (d\, I_x)_e \ .$$

Es claro que Ad es un homomorfismo de grupos y satisface $\exp \mathrm{Ad}(x)X = x \exp Xx^{-1}$ (ver 3.6), cualquiera sea x en G . La demostración de que Ad es un homomorfismo C^∞ es consecuencia inmediata del teorema a continuación.

Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Una aplicación C^∞

$$\mu : G \times M \to M$$

que satisface

$$\mu(xy,m) = \mu(x,\mu(y,m)) \quad , \qquad \mu(e,m) = m$$

se denomina acción a izquierda de G en M .

Teorema 4.1. Sea $\mu : G \times M \to M$ una acción a izquierda de G en M y $m_o \in M$ un punto fijo de dicha acción o sea $\mu(x,m_o) = m_o$, cualquiera sea $x \in G$. Entonces la aplicación

$$\psi : G \to GL\left(T_{m_o} M\right) \quad , \qquad \psi(x) = (d\mu_x)_{m_o}$$

es un homomorfismo de grupos de Lie. $\left(\mu_x : M \to M\right.$ denota al difeomorfismo $\left.\mu_x(m) = \mu(x,m)\right)$.

Demostración: ψ es un homomorfismo pues

$$\left(d\mu_{x_1x_2}\right)_{m_o} = d\left(\mu_{x_1} \circ \mu_{x_2}\right)_{m_o} = \left(d\mu_{x_1}\right)_{m_o} \circ \left(d\mu_{x_2}\right)_{m_o} .$$

Para probar que ψ es C^∞ basta mostrar que $f \circ \psi$ es C^∞ para f función coordenada arbitraria de $GL\left(T_{m_o}M\right)$. Un sistema coordenado para $GL\left(T_{m_o}(M)\right)$ se obtiene fijando una base $\{v_i\}$ de $T_{m_o}(M)$ e identificando, a través de esta base, una transformación lineal T con su matriz. El coeficiente (i,j) de dicha matriz se obtiene calculando $v_i^*T(v_j)$ donde $\{v_i^*\}$ es la base dual. Por lo tanto debemos mostrar que

$$x \to v_i^*\left(d\mu_x\right)_{m_o}(v_j)$$

es C^∞. Como la función $\left(T_{m_o}M\right)^* \times T_{m_o}M \to R$, $(\alpha,v) \to \alpha(v)$ es C^∞ es suficiente mostrar que $\gamma : x \to \left(d\mu_x\right)_{m_o}(v)$ es C^∞ para $v \in T_{m_o}M$. Para ello consideremos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[drrr, dashed, "\gamma"] & T(G) \times T(M) \arrow[r] & T(G \times M) \arrow[r, "d\mu"] & T(M) \\
 & & & T_{m_o}(M) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde la primera aplicación horizontal es $x \to ((x,0),(m_o,v))$ y la segunda es el difeomorfismo canónico. Como las aplicaciones horizontales son C^∞ y $T_{m_o}(M)$ es una subvariedad, con la topología inducida, resulta γ C^∞ (ver [W, pág. 26]). ||

Corolario 4.2. El homomorfismo $Ad : G \to GL(\mathcal{g})$ es C^∞ .

Demostración: Como $\mu : G \times G \to G$, $\mu(x,y) = xyx^{-1}$ es C^∞ , la afirmación resulta del teorema anterior. ‖

Denotemos por $ad : \mathcal{g} \to \mathcal{g}\ell(\mathcal{g})$ la derivada de Ad en la identidad. Resulta de 2.2 que ad es una representación de $\mathcal{g}$ y de 3.6 que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & GL(\mathcal{g}) \\ {\scriptstyle exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e} \\ \mathcal{g} & \xrightarrow{ad} & \mathcal{g}\ell(\mathcal{g}) \end{array} .$$

Proposición 4.3. Si $X,Y \in \mathcal{g}$ entonces $ad_X(Y) = [XY]$.

Demostración: Por definición $ad_X = (dAd)_e(X)$ luego

$$ad_X Y = (dAd)_e(X)(Y) = \left[\frac{d}{dt}_{t=0} Ad(\exp tX)\right](Y)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [Ad(\exp tX)(Y)] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [(dI_{\exp tX})_e(Y)]$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [(dR_{\exp -tX})_{\exp tX} \circ (dL_{\exp tX})_e(Y)]$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (dR_{\exp -tX})_{\exp tX}(\tilde{Y}(\exp tX))$$

donde $\tilde{Y}$ denota el campo invariante a izquierda tal que $\tilde{Y}_e = Y$.

Notemos que $\exp tX$ es la curva integral de $\tilde{X}$ pasando por e y $R_{\exp tX}$ es el grupo a un parámetro de difeomorfismos asociados a $\tilde{X}$. Por lo tanto la última expresión coincide con $(L_{\tilde{X}}\tilde{Y})_e$ o sea $[X,Y]$ como queríamos demostrar, ver [W, pág, 69]. ||

Si $\rho : G \to GL(V)$ es una representación y W es un subespacio de V decimos que <u>W es ρ invariante</u> si $\rho(g)W \subset W$ cualquiera sea $g \in G$. (Análoga definición si ρ es una representación de álgebras de Lie).

<u>Proposición 4.4</u>. Si G es un grupo de Lie conexo, $\rho : G \to GL(V)$ una representación, $d\rho : \mathcal{g} \to \mathcal{gl}(V)$ la representación derivada y W un subespacio de V entonces W es ρ invariante sí y solamente si es $d\rho$ invariante.

<u>Demostración</u>: Sea $X \in \mathcal{g}$ y $w \in W$. Si $\rho(\exp tX)w \in W$ para $t \in R$ entonces $(d\rho)(X)w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp t(d\rho)(X)w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp tX)w \in W$. Recíprocamente,

$$\rho(\exp tX)w = e^{t(d\rho)(X)}w = w + t(d\rho)(X)w + \frac{t^2}{2}(d\rho)(X)^2 w + \ldots \in W .$$

Usando que un entorno de la identidad genera un grupo de Lie conexo (ver [W, pág. 93]) y que ρ es una representación, la proposición resulta. ||

§ 5. <u>Subgrupos de Lie</u>.

Un <u>subgrupo de Lie</u> (H,φ) de un grupo de Lie G es un grupo de Lie H y $\varphi: H \to G$ tal que φ es un homomorfismo inyectivo, C^∞ y regular. Se identifican (H_1,φ_1) y (H_2,φ_2) si existe $\psi : H_1 \to H_2$ isomorfismo de grupos de Lie que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi"'] & G \\ H_2 \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Ejemplos 5.1.

(i) Sea G_o la componente conexa de la identidad en G. Es claro que (G_o,i), i inclusión, es un subgrupo de Lie de G, invariante en G o sea $x G_o x^{-1} = G_o$, $x \in G$.

(ii) Si $O(n) = \{A \in GL(n,R) : AA^t = I\}$ entonces $O(n)$ es un subgrupo de Lie compacto de $GL(n,R)$. En efecto sea $\alpha : GL(n,R) \to S_n(R)$, $\alpha(A) = AA^t$ donde $S_n(R)$ denota al espacio vectorial de matrices simétricas. Como $(d\alpha)_A$ es sobre, $A \in O(n)$, resulta $O(n)$ subvariedad de $GL(n,R)$, compacta pues es un cerrado y acotado en R^{n^2}. Además producto e inversión son operaciones contínuas y por [W, teorema 1.32] son C^∞. La componente conexa de $O(n)$ es $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$.

(iii) Sea G un grupo de Lie conexo y $\tilde{G}$ su cubrimiento universal con la estructura de grupo de Lie dada en (2.3). El núcleo de $\pi : \tilde{G} \to G$ es un subgrupo cerrado, normal y discreto de $\tilde{G}$. Como consecuencia $N_u\pi$ es un subgrupo de Lie contenido en $Z(\tilde{G})$, centro de $\tilde{G}$.

(iv) El núcleo de un homomorfismo $\varphi: G_1 \to G_2$ de grupos de Lie es un subgrupo normal y cerrado de G_1.

Como el rango de $(d\varphi)_x$ es constante, $x \in G_1$, sigue del teorema de la función implícita que $N_u\varphi$ es una subvariedad (con la topología relativa) de G_1 y por lo tanto $N_u\varphi$ es un subgrupo de Lie de G_1.

Cabe observar que existe una única estructura C^∞ en $N_u\varphi$ tal que $N_u\varphi$ es un subgrupo de Lie de G (con la topología relativa). Más aún $N_u\varphi$ no admite dos estructuras C^∞ y N_2 no equivalentes que lo hacen subgrupo de Lie. Estas afirmaciones son consecuencia de los siguientes resultados que enunciamos sin demostración. Para una prueba referimos a [H, pág. 115, 119].

<u>Teorema 2.3 en [H, pág. 115]</u>. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo abstracto de G. Supongamos que H es un subconjunto cerrado de G. Entonces existe una única estructura C^{∞} en H tal que H es un subgrupo de Lie (con la topología relativa) de G.

<u>Corolario 2.8 en [H, pág. 119]</u>. Sea G un grupo de Lie y H_1, H_2 dos subgrupos de Lie con topología N_2. Si $H_1 = H_2$ (como conjuntos) entonces $H_1 = H_2$ como subgrupos de Lie de G.

Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un subespacio vectorial. Decimos que <u>$\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$</u> (respectivamente <u>$\mathfrak{h}$ ideal de $\mathfrak{g}$</u>) si $[X,Y] \in \mathfrak{h}$, para $X,Y \in \mathfrak{h}$ (resp. $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ cualquiera sea $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$).

<u>Proposición 5.2</u>. Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G. Entonces $(d\varphi)_e(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, ($\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ denotan las álgebras de Lie de G y H respectivamente). Si además $\varphi(H)$ es normal en G entonces $(d\varphi)_e(\mathfrak{h})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

<u>Demostración</u>: Como $\varphi: H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie resulta de 2.2 que $(d\varphi)_e(\mathfrak{h})$ es una subálgebra. Supongamos ahora que $\varphi(H)$ sea normal en G y sea $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\exp \operatorname{ad}_Y\left((d\varphi)_e X\right) = \operatorname{Ad}(\exp Y)\left((d\varphi)_e X\right) = \left(dI_{\exp Y}\right)_e \left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp s(d\varphi)_e X\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\exp Y)(\varphi(\exp sX))(\exp -Y)$$

es un elemento de $T_e(\varphi(H)) = (d\varphi)_e(\mathfrak{h})$. Como

$$\exp \operatorname{ad}_{tY}\left((d\varphi)_e X\right) = (d\varphi)_e X + t[Y,(d\varphi)_e X] + \frac{t^2}{2!}[Y[Y,(d\varphi)_e X]] + \ldots$$

es una curva en $(d\varphi)_e(\mathfrak{h})$ resulta $[Y,(d\varphi)_e X] \in (d\varphi)_e(\mathfrak{h})$. $\|$

§ 6. Espacios Homogéneos.

Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado de G, $G/_H$ el espacio de clases a izquierda con la topología cociente y $\pi : G \to G/_H$ la proyección canónica. Como $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in H} A\,x$ la aplicación π resulta abierta y como el gráfico de la relación

$$G_\sim = \{(x,y) : y^{-1}x \in H \ , \ x,y \in G\}$$

coincide con $\alpha^{-1}(H)$, $(\alpha : G \times G \to G \ , \ (x,y) \to x^{-1}y)$ resulta $G/_H$ un espacio T_2 .

Los difeomorfismos $L_x : G \to G$, $x \in G$ inducen homeomorfismos $\tau(x) : G/_H \to G/_H$ tales que $\tau(x) \circ \pi = \pi \circ L_x$. En esta sección nos ocuparemos de estudiar una estructura C^∞ canónica en $G/_H$ que hace de las aplicaciones $\tau(x)$ difeomorfismos. Consideraremos en H la única estructura C^∞ (H con la topología relativa) que lo hace subgrupo de Lie de G .

Lema 6.1. Si g álgebra de Lie de un grupo de Lie G , m y n subespacios vectoriales de g tal que $g = m \oplus n$ existen entornos abiertos acotados y conexos U_m y U_n del cero en m y n respectivamente tal que la aplicación φ: $(A,B) \to \exp A \exp B$ es un difeomorfismo de $U_m \times U_n$ sobre un entorno abierto de la identidad en G .

Demostración: Sean W_1, W_2 entornos de 0 en m y n respectivamente, U entorno de e en G tal que $\exp W_1 \exp W_2 \subset U$ y $\exp : W_1 \times W_2 \to U$ es un difeomorfismo con inversa que denotaremos Log . Tomemos $X_1, \ldots, X_n$ una base de g tal que $X_i \in m$ $1 \leq i \leq r$, $X_j \in n$, $r < j \leq n$. La función φ resulta

$$\varphi\left(x_1X_1 + \ldots + x_nX_n\right) = \exp\left(x_1X_1 + \ldots + x_rX_r\right)\cdot\exp\left(x_{r+1}X_{r+1} + \ldots + x_nX_n\right)$$

y

$$d(\mathrm{Log}\circ\varphi)_o(X_i) = d(\mathrm{Log}\circ\varphi)_o\left(\frac{d}{dt}_{|t=0}\, tX_i\right)$$

$$= \frac{d}{dt}_{|t=0}\, (\mathrm{Log}\circ\varphi(tX_i)) = X_i\ .$$

Por lo tanto $\mathrm{Log}\circ\varphi$ (luego φ) es un difeomorfismo local. ||

Sean G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Denotemos con $\mathfrak{m}$ un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$ y con ψ la restricción de la exponencial a $\mathfrak{m}$.

<u>Proposición 6.2</u>. Existe un entorno U del cero en $\mathfrak{m}$ tal que $\psi : U \to \psi(U)$ es un homeomorfismo y $\pi : \psi(U) \to G/H$ es un homeomorfismo sobre un entorno de $\pi(e)$ en G/H.

<u>Demostración</u>: Sean U_m y U_h los entornos de 0 en $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{h}$ del lema anterior. Como $\varphi : (X,Y) \to \exp X \exp Y$ es un homeomorfismo de $U_h \times U_m$ en un entorno de e en G y la topología en H es la relativa resulta $\exp U_h$ entorno abierto de e en H. Por lo tanto existe V abierto en G, $e \in V$ tal que $\exp U_h = V \cap H$. Sea U entorno de 0 en U_m tal que $\exp(-U)\exp U \subset V$. Entonces $\psi : U \to \psi(U)$ es un homeomorfismo tal que $\pi|\psi(U)$ es inyectiva. En efecto si $\pi(\exp X_1) = \pi(\exp X_2)$ resulta $\exp -X_2 \exp X_1 \in V \cap H = \exp U_h$. Luego existe $Z \in U_h$ tal que $\exp 0 \exp(-X_2) = \exp Z \exp(-X_1)$ o sea $\varphi(0,-X_2) = \varphi(Z,-X_1)$ en $U_h \times U_m$ contradiciendo inyectividad de φ a menos que $Z = 0$, $X_1 = X_2$.

Además, siendo $U_h \times U$ entorno de $(0,0)$ en $U_h \times U_m$ y π abierta resulta $\pi(\psi(U))$ entorno de $\pi(e)$ en $G/_H$. Tomando U compacto obtenemos el homeomorfismo deseado entre U y $(\pi \circ \Psi)(U)$. $\|$

Observación 6.3. Notar que como $\pi : \psi(U) \to \pi(\psi(U))$ es un homeomorfismo existe una función contínua $\sigma : \pi(\psi(U)) \to G$ tal que $\pi \circ \sigma$ es la identidad.

Teorema 6.4. Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado de G , $G/_H$ el espacio de clases a izquierda con la topología cociente. Existe en $G/_H$ una estructura de variedad C^∞ tal que $G \times G/_H \to G/_H$, $(x,yH) \to xyH = \tau(x)(yH)$ es C^∞ .

Demostración: Sea N_o el interior de $\pi(\psi(U))$ (ver proposición 6.2) y sea $X_{s+1} \dots X_n$ base de m . Si $x \in G$ la aplicación

$$\pi\left(x \exp\left(x_{s+1}X_{s+1} + \dots + x_n X_n\right)\right) \to \left(x_{s+1}, \dots, x_n\right)$$

es un homeomorfismo entre $\tau(x)N_o$ y un abierto de R^{n-s} . Para ver que esto define una estructura de variedad C^∞ debemos verificar la condición de compatibilidad en intersección de cartas. Equivalentemente, si $N_1 = \tau(x)N_o \cap \tau(y)N_o$ debemos verificar que

$$\mathrm{id} : \left(N_1, \alpha \circ \tau(x^{-1})\right) \to \left(N_1, \alpha \circ \tau(y^{-1})\right)$$

es C^∞ donde α es la inversa de $\pi \circ \psi : \mathring{U} \to N_o$, $\mathring{U}$ interior de U .

Como $\sigma : \left(N_o, \alpha\right) \to G$ es una sección C^∞ (ver observación 6.3) resulta $\sigma_z : \left(\tau(z)N_o, \alpha \circ \tau(z^{-1})\right) \to G$, $\alpha_z = L_z \circ \sigma \circ \tau(z^{-1})$ sección C^∞ , cualquiera sea $z \in G$. Además el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\pi^{-1}\left(\tau(z)N_o\right) \arrow[rr, "\psi_z"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \left(\tau(z)N_o,\ \alpha\circ\tau(z^{-1})\right)\times H \arrow[dl, "P_1"] \\
& \left(\tau(z)N_o,\ \alpha\circ\tau(z^{-1})\right) &
\end{tikzcd}$$

donde $\psi_z(x) = \left(\pi(x), \left(\sigma_z\pi(x)\right)^{-1}x\right)$ y todas las flechas son C^∞.

Consideremos la siguiente composición de funciones C^∞

$$\left(N_1, \alpha\circ\tau(x^{-1}\right) \xrightarrow{\sigma_x} \pi^{-1}(N_1) \xrightarrow{\psi_y} \left(\tau(y)N_o, \alpha\circ\tau(y^{-1})\right)\times H$$

$$\xrightarrow{P_1} \left(\tau(y)N_o, \alpha\circ\tau(y^{-1})\right)$$

y observemos que

$$p_1\psi_y\sigma_x(p) = p_1\psi_y L_x\circ\sigma\circ\tau(x^{-1})(p) = \pi\circ L_x\circ\sigma\circ\tau(x^{-1})(p) = p$$

luego la id es C^∞ como queríamos demostrar.

<u>Observación</u>: Probamos que con esa estructura diferenciable en $G/_H$ resulta $\pi : G \to G/_H$ un fibrado C^∞.

Resta mostrar que $G\times G/_H \to G/_H$, $(x,yH) \to \tau(x)yH$ es C^∞. Para ello sea yH en un entorno $\tau(y_o)N_o$ y consideremos

$$G\times\tau(y_o)N_o \xrightarrow{1\times\sigma_{y_o}} G\times G \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\pi} G/_H$$

donde α es el producto. Es claro que la composición considerada es C^∞ y coincide con la función buscada. ||

De la proposición que sigue resultará que existe una única estructura C^∞ en $G/_H$ tal que $G \times G/_H \to G/_H$, $(x,yH) \to \tau(x)yH$ es C^∞ .

Definición 6.5. Una acción a izquierda $\mu : G \times M \to M$ se dice transitiva si cualquiera sean $m_1, m_2 \in M$ existe $g \in G$ tal que $\mu(g,m_1) = m_2$. En este caso decimos que el grupo de Lie G es un grupo de Lie transitivo de transformaciones de la variedad M .

Proposición 6.6. Sea G un grupo de Lie transitivo de transformaciones de M , M variedad C^∞ y sea $G_{p_o} = \{g \in G : \mu(g,p_o) = p_o\}$, isotropía de G en p_o . Entonces G_{p_o} es cerrado y si $\alpha : G/_{G_{p_o}} \to M$, $\alpha(gG_{p_o}) = \mu(g,p_o) = g \cdot p_o$ resulta

(i) Si G es N_2 , α es un homeomorfismo;

(ii) Si α es un homeomorfismo entonces α es un difeomorfismo ($G/_{G_{p_o}}$ con la estructura del teorema 6.4).

(iii) Si α es un homeomorfismo y M es conexa, la componente conexa G_o actúa transitivamente en M .

Demostración: Como todo grupo de Lie es N_1 sea $g_n \to g$, $g_n \in G_{p_o}$; entonces $\mu(g_n,p_o) = p_o \to \mu(g,p_o)$ y G_{p_o} resulta cerrado.

(i) Sea $\beta : G \to M$, $\beta(g) = g \cdot p_o$. Como $\beta^{-1}(p_o) = G_{p_o}$ resulta α inyectiva y contínua. α es suryectiva pues la acción es transitiva. Veamos que β es abierta (luego α abierta). Sea V entorno de $g \in G$ y U entorno compacto de e en G tal que $UU^{-1} \subset U$ y $gU \subset V$. Como G es N_2 resulta $G = \bigcup x_n U$, $x_n \in G$, luego $M = \bigcup (x_n U) \cdot p_o$. Por el teorema de Baire (M es localmente compacto) existe $x_i u \cdot p_o \in W \subset x_i U \cdot p_o$, W abierto en M . Luego $g \cdot p_o \in gu^{-1} x_i^{-1} W \subset gU^{-1} U \cdot p_o \subset V \cdot p_o$

(ii) Como $\alpha \circ \pi = \beta$, β y π son C^∞ y existen secciones locales C^∞ resulta α una función C^∞ .

Sea $H = G_{p_o}$ y h el álgebra de Lie de H . En lo que sigue veremos que $N_u(d\pi)_e = N_u(d\beta)_e = h$. Sean X,Y en g , álgebra de Lie de G , tal que $(d\pi)_e X = (d\beta)_e Y = 0$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\pi \exp tX\right) = 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\exp tY \cdot p_o\right)$$

Como $\frac{d}{ds}\Big|_t (\pi \exp sX) = d(\pi(\exp sX))_t \left(\frac{d}{ds}\right)_t = d(\pi(\exp(t+s)X)_o \left(\frac{d}{ds}\right)_o$

$$= d(\pi(\exp tX \exp sX))_o \left(\frac{d}{ds}\right)_o$$

$$= d(\pi \circ L \exp tX)_e (X) = d\tau(\exp tX)_{eH} (d\pi)_e X$$

$$= 0$$

y $\frac{d}{ds}\Big|_t \left(\exp sY \cdot p_o\right) = d(\beta(\exp sY))_t \left(\frac{d}{ds}\right)_t$

$$= d(\beta(\exp tY \exp sY))_o \left(\frac{d}{ds}\right)_o$$

$$= d(\beta \circ L \exp tY)_e (X)$$

$$= d\left(\mu_{\exp tY} \circ \beta\right)_e (X)$$

$$= 0$$

resulta $\exp sX$, $\exp sY$ en H para $s \in R$, luego $X,Y \in h$.

Como la otra inclusión es inmediata resulta la afirmación.

De $N_u(d\pi)_e = N_u(d\beta)_e = h$ se obtiene $(d\alpha)_{eH}$ inyectiva y por lo tanto $(d\alpha)_{xH}$ inyectiva, $x \in G$ pues $\alpha \circ \tau(x) = \mu_m \circ \alpha$. Como α es un homeomorfismo, M y $G/_H$ tienen igual dimensión y como consecuencia α es un difeomorfismo.

(iii) Si α es abierta resulta β abierta. Existen entonces $x_i \in G$, $i \in I$, tal que $G = \bigcup_i G_o x_i$, luego $M = \bigcup_i (G_o x_i)\cdot p_o$ con $(G_o x_i)\cdot p_o$ abiertos tales que coinciden o son disjuntos. Como M es conexa resulta la afirmación. $\|$

CAPITULO II

VARIEDADES RIEMANNIANAS HOMOGENEAS

§ 1. Métricas G-invariantes.

Sea G un grupo de Lie conexo, H un subgrupo cerrado y $G/_H$ el espacio cociente con la estructura C^∞ estudiada en el Capítulo anterior. Nos ocuparemos del estudio de métricas riemannianas en $G/_H$ tal que $\tau(x) : G/_H \to G/_H$ sean isometrías cualquiera sea $x \in G$. A tales métricas en $G/_H$ las denominaremos métricas G-invariantes. Veremos en 1.9 y 2.3 que existen cocientes $G/_H$ que no admiten métricas G-invariantes.

Haremos a seguir un análisis que "justificará" la hipótesis G conexo. Para ello precisaremos de

Teorema 1.1. (ver [MS_2]). Si M es variedad riemanniana N_2 entonces el grupo de isometrías $I(M)$ con la topología compacto abierta admite estructura C^∞ tal que $I(M)$ es un grupo de Lie de transformaciones de M.

Supongamos que $M = G/_H$ admite una estructura riemanniana G-invariante y M es N_2 (no suponemos G-conexo). Sea G^* el grupo de isometrías de M y M_α una componente conexa de M. Entonces

Proposición 1.2. G^*_o la componente conexa de G^*, es un grupo de Lie transitivo de transformaciones de M_α. Más aún, M_α es isométrica a un cociente con métrica invariante de un grupo de Lie conexo por un subgrupo cerrado.

Demostración: Sea $G^*_\alpha = \{f \in G^* : fM_\alpha = M_\alpha\}$. Entonces G^*_α es un subgrupo cerrado de G^* y por lo tanto un subgrupo de Lie topológico de G^* , ver [H, pág. 115]. Además de

$$\begin{tikzcd} G^*_\alpha \times M_\alpha \arrow[r] \arrow[drr, dashed] & G^* \times M \arrow[r] & M \\ & & M_\alpha \arrow[u] \end{tikzcd}$$

y de la transitividad de G^* en M resulta que G^*_α es un grupo de Lie transitivo de transformaciones de M_α . Sea H_α la isotropia en G^*_α de un punto p_α de M_α . Como $G^*_\alpha/H_\alpha \to M_\alpha$ es un homeomorfismo (pues la topología en G^* es N_2) sigue de 6.6, Cap. I, que la componente conexa $(G^*_\alpha)_o$ es un grupo de Lie transitivo de transformaciones de M_α y que M_α es difeomorfa a $(G^*_\alpha)_o / H_\alpha \cap (G^*_\alpha)_o$. Si le copiamos al cociente la métrica de M_α ésta resulta $(G^*_\alpha)_o$ invariante.

Observación: $G^*_o \subset G^*_\alpha$ cualquiera sea α . Más aún $G^*_o = (G^*_\alpha)_o$ luego resulta la proposición. ||

Sea entonces $M = G/H$, G grupo de Lie conexo, H subgrupo cerrado y supongamos que M admite una métrica G-invariante. En varias situaciones conviene asumir que la acción de G en G/H es efectiva o sea $\tau(x) = id$ implica $x = e$. Esta hipótesis no es restrictiva como muestra la proposición siguiente.

Proposición 1.3. Sea $M = G/H$ con métrica G-invariante. Entonces M es isométrica a G_1/H_1 con métrica G_1 invariante y la acción de G_1 en G_1/H_1 es efectiva.

Demostración: Sea $N = \{x \in G : \tau(x) = id\}$. Entonces N es un subgrupo normal y cerrado de G contenido en H . Más aún, N es maximal con esa propiedad. No es difícil verificar que $G_1 = G/_N$ con la estructura cociente, algebraica y C^∞ , es un grupo de Lie; $H_1 = H/_N$ es un subgrupo cerrado de G_1 ; la acción de G_1 en $G_1/_{H_1}$ es efectiva y $G_1/_{H_1}$ es difeomorfo a $G/_H$. Además la métrica que hereda $G_1/_{H_1}$ es G_1 - invariante. ||

Si la acción de G en $G/_H$ es efectiva, G conexo y $G/_H$ posee una métrica riemanniana G-invariante entonces G es un subgrupo de Lie de $G^* = I(G/_H)$. En efecto

$$\tau : G \to G^* \quad , \quad x \to \tau(x)$$

es un homomorfismo inyectivo. La continuidad de τ es consecuencia de

Lema 1.4. (ver [BG] ó [H]). Sea M una variedad riemanniana conexa y $\{f_n\}$ una sucesión en $I(M)$ que converge puntualmente sobre M a una función $f : M \to M$. Entonces f es isometría y $f_n \to f$ en $I(M)$.

La diferenciabilidad de τ es consecuencia de que todo homomorfismo contínuo de grupos de Lie es C^∞ (ver por ejemplo [H] ó [W]). Veamos ahora que $(d\tau)_e$ es inyectiva. Sea $X \in \mathfrak{g}$, álgebra de Lie de G , tal que $(d\tau)_e X = 0$. Entonces $\frac{d}{dt}\Big|_{t_o} \tau(\exp tX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tau(\exp t_oX \exp tX) = \left(dL_{\tau(\exp t_oX)}\right)_e \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tau(\exp tX) = 0$

Luego $\tau(\exp tX) = e$ o sea $\exp tX = e$ y $X = 0$. Cabe observar que τ no es necesariamente un homeomorfismo sobre la imagen. Para ver ejemplos donde la topología de G es estrictamente más fina ver por ejemplo [DM] .

Denotemos con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ las álgebras de Lie de G y H respectiva - mente y $\pi : G \to G/_H$, $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/_\mathfrak{h}$ las proyecciones al cociente.

<u>Proposición 1.5(i)</u>. El conjunto de métricas G-invariantes en $G/_H$ está naturalmente identificado con el conjunto de productos internos en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ invariantes por $\mathrm{Ad}(h)$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $h \in H$.

(ii) Si $G : G/_H$ es efectiva entonces $G/_H$ admite una métrica riemanniana G-invariante sí y solamente si la clausura de $\{\mathrm{Ad}(h) : h \in H\}$ en $GL(\mathfrak{g})$ es compacta.

<u>Demostración</u>: (i) Vimos en la demostración de 6.6(ii), Capítulo I, que el núcleo de $(d\pi)_e : \mathfrak{g} \to T_{eH}\, G/_H$ es $\mathfrak{h}$. Por razones de dimensión, $(d\pi)_e$ induce un isomorfismo $(\overline{d\pi})_e$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "(d\pi)_e"] \arrow[d, "p"'] & T_{eH}(G/_H) \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[ur, "(\overline{d\pi})_e"'] & \end{tikzcd}$$

Para cada producto interno en $T_{eH}(G/_H)$ consideremos el correspondiente en $\mathfrak{g}/_\mathfrak{h}$ (vía $(\overline{d\pi})_e$).

Sea $h \in H$. Como $\mathrm{Ad}(h) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, existe una representación de $H \to GL(\mathfrak{g}/_\mathfrak{h})$ que denotamos $\overline{\mathrm{Ad}(h)}$ y satisface $\overline{\mathrm{Ad}(h)} \circ p = p \circ \mathrm{Ad}(h)$. Más aún, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r, "(\overline{d\pi})_e"] \arrow[d, "\overline{\mathrm{Ad}}(h)"'] & T_{eH}(G/_H) \arrow[d, "(d\tau(h))_{eH}"] \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r, "(\overline{d\pi})_e"] & T_{eH}(G/_H) \end{tikzcd}$$

En efecto $(d\tau(h))_{eH}(\overline{d\pi})_e X = (d\tau(h))_{eH}(\overline{d\pi})_e(pX_1) = (d\tau(h))_{eH}(d\pi)_e X_1 =$

$$= (d\pi)_e (dL_h)_e X_1 = (d\pi)_e (dI_h)_e X_1 = (\overline{d\pi})_e (p\ Ad(h)X_1) =$$

$$= (\overline{d\pi})_e (\overline{Ad(h)}pX_1) = (d\pi)_e \overline{Ad(h)}X \ .$$

por lo tanto una métrica G-invariante en $G/_H$ produce un producto interno $\overline{Ad(h)}$ invariante en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $h \in H$.

Recíprocamente, dado un producto interno $\overline{Ad(h)}$ invariante en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, lo copiamos (vía $(\overline{d\pi})_e$) en $T_{eH}(G/_H)$. Definimos en $T_{xH}(G/_H)$:

$$\langle X,Y \rangle_{xH} = \langle d\tau(x^{-1})X, d\tau(x^{-1})Y \rangle_{eH} \ .$$

La buena definición de ese producto interno en $T_{xH}(G/_H)$ resulta pues $(d\tau(h))_{eH}$ son transformaciones ortogonales respecto del producto interno fijado en $T_{eH}(G/_H)$. Resta mostrar que para cada par de campos X,Y la función

$$G/_H \to R \quad , \qquad xH \to \langle X,Y \rangle_{xH}$$

es C^∞ .

Sea U entorno en $G/_H$, σ sección local C^∞ definida en U y $X \in \mathcal{X}(U)$. La función

$$U \to T_{eH}(G/_H) \quad , \qquad z \to d\tau(\sigma(z)^{-1})_z X_z$$

es diferenciable pues coincide con la diagonal de

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[drrr, dashed] & TG \times T(G/_H) \arrow[r] & T(G \times G/_H) \arrow[r, "d\mu"] & T(G/_H) \\ & & & T_{eH}(G/_H) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde, la primera aplicación horizontal es $z \to ((\sigma(z)^{-1},0),X_z)$, la segunda es el difeomorfismo canónico y $\mu : G \times G/_H \to G/_H$ es la acción a izquierda $(x,yH) \to \tau(x)(yH)$. Como consecuencia, si X e Y son campos en U , la función $z \to \langle d\tau(\sigma(z)^{-1})X_z \, , \, d\tau(\sigma(z)^{-1})Y_z \rangle_{eH}$ es C^∞ .

Para demostrar (ii) precisaremos de

<u>Lema 1.6</u>. Si H es un grupo de Lie compacto y $\rho : H \to GL(V)$ es una representación, existe un producto interno en V tal que $\rho(h)$ es ortogonal, para todo $h \in H$.

<u>Demostración</u>: Sea $\langle\ \rangle$ un producto interno arbitrario en V . La media

$$\langle\langle X,Y \rangle\rangle = \int_H \langle \rho(h)X,\rho(h)Y \rangle$$

define un nuevo producto interno en V . Como en un grupo de Lie compacto la integral es invariante a izquierda y a derecha (ver [W, pág. 152]) las transformaciones $\rho(h)$ resultan ortogonales. ||

<u>Observación</u>: Sigue de 1.5(i) y 1.6 que si G es conexo y H cerrado entonces $\overline{\{Ad(h),\ h \in H\}}$ tiene clausura compacta en $GL(\mathfrak{g}/_{\mathfrak{h}})$ sí y solamente si el cociente $G/_H$ admite métrica G-invariante.

(ii) Vimos, previo al enunciado 2.5, que si $G : G/_H$ es efectiva y $G/_H$ posee métrica G-invariante entonces G es un subgrupo de Lie de G^* . Como $H^* = \{f \in G^* : f(eH) = eH\}$ es un subgrupo compacto de G^* (ver teorema 3.22 en [BG] ó [H, pág. 204]) existe en $\mathfrak{g}^*$, álgebra de Lie de G^* , un producto interno tal que $Ad(h^*)$ es ortogonal, cualquiera sea h^* en H^* . Si $\tau : G \to G^*$ es el homomorfismo $x \to \tau(x)$ entonces definimos en $\mathfrak{g}$, $\langle X,Y \rangle = \langle (d\tau)_e X, (d\tau)_e Y \rangle$

y no es difícil verificar que $Ad(h)$, $h \in H$, son transformaciones ortogonales o sea $\{Ad(h) : h \in H\} \subset O(g, \langle\ \rangle)$ y este último grupo es compacto.

Recíprocamente, por 1.6, existe en g un producto interno tal que $Ad(h) : g \to g$ es ortogonal, cualquiera sea $h \in H$. Sea m el complemento ortogonal de h y restrinjamos el producto interno a m . Como m es preservado por $Ad(h)$, $h \in H$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "Ad(h)"] \arrow[d, "p"'] & m \arrow[d, "p"] \\ g/h \arrow[r, "\overline{Ad(h)}"] & g/h \end{tikzcd}$$

Sigue ahora de (i) que $G/_H$ admite métrica G-invariante. ||

<u>Observación 1.8</u>. Probamos en (ii) de 1.5 que si $G : G/_H$ es efectiva y $G/_H$ admite métrica G-invariante entonces $G/_H$ es un espacio <u>homogéneo reductivo</u> o sea $h \subset g$ admite un complemento m tal que m es preservado por $Ad(h)$, $h \in H$. Si el grupo H es conexo sigue de 4.4, Capítulo I que m es $Ad(H)$ invariante sí y solamente si $[h, m] \subset m$.

(ii) Cuando el cociente $G/_H$ es reductivo y m es un complemento $Ad(H)$ invariante de h , es fácil ver que las métricas G-invariantes en $G/_H$ se corresponden con productos internos en m tales que $Ad(h)$ es ortogonal cualquiera sea $h \in H$.

<u>Ejemplos 1.9</u>. Sea $G = SL(n,R) = \{A \in GL(n,R) : \det A = 1\}$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} : \pi\, a_{ii} = 1 \right\} \qquad \text{y } n \text{ impar.}$$

Entonces $G : G/_H$ es efectiva y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ no admite complemento Ad(H)-invariante. Luego $G/_H$ no es un espacio homogéneo reductivo y por lo tanto no admite métrica G-invariante. Sin embargo $G/_H$ es difeomorfo a $SO(n)/_{\{e\}}$ y este último si es reductivo.

Para demostrar que la acción de G en $G/_H$ es efectiva notemos que $N = \{x \in G : \tau(x) = id\}$ es normal en G y por lo tanto discreto, pues G es simple. Sigue entonces que $N \subset Z(G) = \{e\}$.

Supongamos ahora que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Es fácil ver que $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ donde $\mathfrak{a}$ es la subálgebra de matrices diagonales de trazo cero y $\mathfrak{n}$ es la subálgebra de matrices triangulares superiores. Sea X_{ij} , $i > j$, la matriz con 1 en (i,j) y cero en los restantes. Si $X_{ij} = U_{ij} + Z_{ij}$ donde $U_{ij} \in \mathfrak{h}$ y $Z_{ij} \in \mathfrak{m}$ y $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ entonces

$$[X_{ji},X_{ij}] = [X_{ji},U_{ij}] + [X_{ji},Z_{ij}] ,$$

$[X_{ji},X_{ij}] \in \mathfrak{a}$, $[X_{ji},U_{ij}] \in \mathfrak{n}$ (pues $[\mathfrak{n},\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$) y $[X_{ji},Z_{ij}] \in \mathfrak{m}$. Por lo tanto deben ser todos nulos lo que es un absurdo pues $[X_{ji},X_{ij}] \neq 0$.

§ 2. Grupos de Lie con métrica bi-invariante.

Esta sección tiene por objetivo dar la demostración que aparece en [M] de la clasificación de los grupos de Lie que admiten métricas bi-invariantes.

Una métrica en un grupo de Lie G se dice invariante a izquierda (resp. invariante a derecha) si las traslaciones a izquierda (resp. traslaciones a derecha) son isometrías. Decimos que una métrica en G es bi-invariante si ella es invariante a izquierda y a derecha.

Proposición 2.1. Una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie conexo G es bi-invariante sí y solamente si $ad_X : g \to g$, $X \in g$, es antisimétrica.

Demostración: Sea $\langle \ , \ \rangle$ métrica invariante a izquieda en G . La métrica es además invariante a derecha sí y sólo si $Ad(x) = d\left(L_x \circ R_x^{-1}\right)_e$ es ortogonal, para todo $x \in G$. En particular, si $X \in g$,

$$\langle Y,Z\rangle = \langle Ad(\exp tX)Y, Ad(\exp tX)Z\rangle$$

Derivando respecto de t obtenemos

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle e^{tad_X}Y, e^{tad_X}Z\rangle = \langle [X,Y],Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle .$$

Recíprocamente sea $x \in G$, $x = \exp X$ y ad_X antisimétrica. Entonces

$$Ad(x)^{-1} = Ad(\exp -X) = e^{-ad_X} = \left(e^{ad_X}\right)^t = Ad(x)^t .$$

Siendo G conexo, existe un entorno de la identidad que lo genera (ver [W, pág. 93]), y como producto de transformaciones ortogonales es ortogonal, la proposición resulta. ||

Sigue de 1.6 que si H es un grupo de Lie compacto existe en h , su álgebra de Lie, un producto interno tal que $Ad(h)$, $h \in H$ es ortogonal. Si trasladamos a izquierda en H dicho producto interno, la métrica que se obtiene es bi-invariante. Además si A es un grupo de Lie abeliano $Ad(a) = id$, cualquiera sea $a \in A$ y por lo tanto toda métrica invariante a izquierda es bi-invariante. No es difícil verificar que la métrica producto en $A \times H$ es invariante a izquierda y a derecha.

La recíproca vale, para grupos conexos, como lo muestra el siguiente

Teorema 2.2. Un grupo de Lie conexo G admite métrica bi-invariante sí y solamente si G es isomorfo a $R^n \times K$, K compacto y conexo.

Demostración: Ya vimos que un grupo de la forma $R^n \times K$ admite una tal métrica. Para la recíproca sea G un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Como ad_X, $X \in g$, es antisimétrica (ver 2.1) entonces $g = a \oplus (\oplus b_i)$ donde a es ideal abeliano, b_i es un ideal simple de dimensión > 1 y la descomposición es ortogonal. (Recordemos que un álgebra de Lie es simple si solo posee ideales triviales). En efecto, si g no posee ideales no triviales entonces g es abeliana si $\dim g = 1$ ó g es simple con $\dim > 1$. Si U es un ideal de g entonces $U^\perp$ también es ideal pues si $X \in U^\perp$, $Y \in g$ y $Z \in U$, la antisimetría de ad_Y implica

$$\langle [X,Y],Z\rangle = \langle X,[Y,Z]\rangle = 0$$

y como consecuencia $g = U \oplus U^\perp$. Repitiendo el proceso, si necesario, y observando que todo ideal unidimensional es simple, terminaremos por obtener la descomposición ortogonal buscada.

Sea B_i grupo de Lie simplemente conexo tal que su álgebra de Lie es b_i (ver [J, pág. 199]). De la antisimetría de ad_Z, $Z \in b_i$ resulta para $X,Y \in b_i$

$$\langle \nabla_X Y,Z\rangle = \frac{1}{2}\langle ad_X Y,Z\rangle .$$

Luego, si $X,Y \in b_i$ es un sistema ortonormal

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2$$

y si X es unitario y X_i es una base ortonormal de b_i

$$R_{ic}\, X = \frac{1}{4}\Sigma\, \|[X,X_i]\|^2 .$$

Ahora bien, $R_{ic}\, X > 0$ pues de lo contrario X es un elemento del centro de b_i que es trivial pues b_i es simple y de dimensión > 1. Sigue entonces del teorema de Myers que B_i es compacto.

Usando que grupos de Lie simplemente conexos con álgebras de Lie isomorfas son isomorfos (ver [W, pág. 101]) obtenemos que $R^s \times B$, $B = \prod B_i$ es el cubrimiento simplemente conexo de G .

Sea $\pi : R^s \times B \to G$ la aplicación de recubrimiento con núcleo N y sea $p_1 : R^s \times B \to R^s$. Como N es discreto, $p_1(N) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i e_i \ , \ n_i \in \mathbb{Z} \ , \ e_1, \ldots, e_k \text{ linealmente independientes} \right\}$. Si $V = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_k$ entonces

$$G \simeq (R^s \times B)/_N \simeq (V^\perp \times V \times B)/_N \simeq V^\perp \times \left(V \times B/_N\right)$$

donde $V \times B/_N$ es compacto. ||

<u>Ejemplo 2.3</u>. El cociente $SL(n,R)/_{SL(n-1,R)}$ no admite métrica $SL(n,R)$ invariante. En efecto si admitiese, como la acción de $SL(n,R)$ es efectiva en el cociente, existiría en $\mathcal{SL}(n,R)$ el álgebra de Lie de $SL(n,R)$ un producto interno $Ad(SL(n-1,R))$ invariante (por 1.5(ii) y 1.6). En particular $SL(n-1,R)$ admitiría una métrica bi-invariante. De 2.2 seguiría que $SL(n-1,R)$ (que es conexo) sería isomorfo a $R^n \times K$, K compacto lo que es un absurdo pues $SL(n-1,R)$ es simple (luego $R^n = \{0\}$) y no acotado. Es importante destacar que como consecuencia del teorema de Weyl (ver [V, pág. 222]) el cociente $SL(n,R)/_{SL(n-1,R)}$ es reductivo. En efecto sigue del teorema de Weyl que toda representación de un álgebra de Lie simple es semisimple o sea todo subespacio invariante tiene complemento invariante. ||

§ 3. Submersiones riemannianas.

En el Capítulo III realizaremos una exposición detallada del artículo de O'Neill [O'N], obteniendo como consecuencia curvaturas de métricas invariantes en $G/_H$. Como dicho trabajo versa sobre relaciones de curvaturas en los casos de submersiones riemannianas introduciremos aquí este concepto y veremos además varios ejemplos de submersiones, entre ellos $\pi : G \to G/_H$ donde G y $G/_H$ poseen métricas G-invariantes.

Definición 3.1. Una submersión es una función diferenciable $\pi : M^{n+k} \to N^n$ tal que en todo $x \in M$, $(d\pi)_x$ tiene rango n .

Sigue del teorema de la función implícita que $\pi^{-1}(p)$ es una subvariedad de M^{n+k} de dimensión k para todo $p \in N$. Sea V_q el espacio tangente a $\pi^{-1}(p)$ en $q \in \pi^{-1}(p)$, supongamos M y N son riemannianas y sea $H_q = V_q^{\perp}$. Llamaremos a H_q y a V_q los espacios horizontales y verticales respectivamente.

Definición 3.2. Una submersión $\pi : M \to N$, M,N riemannianas se dice submersión riemanniana si $(d\pi)_{q|H_q} : H_q \to T_{\pi(q)}N$ es ortogonal cualquiera sea $q \in M$.

Ejemplo 3.3. Sea $G/_H$ con métrica G-invariante y supongamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Si $\langle\ \rangle$ en $\mathfrak{g}$ está definido como $\langle\ \rangle = \langle\ \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle\ \rangle_{\mathfrak{m}}$ donde $\langle\ \rangle_{\mathfrak{h}}$ es cualquier producto interno en $\mathfrak{h}$ y $\langle\ \rangle_{\mathfrak{m}}$ es el que proviene de $T_{eH}(G/_H)$ entonces $\pi : G \to G/_H$ es una submersión riemanniana donde la métrica en G es traslación a izquierda del producto interno en $\mathfrak{g}$. En efecto $V_{xh} = (dL_{xh})_e\mathfrak{h}$, $H_{xh} = (dL_{xh})_e\,\mathfrak{m}$ y $\langle (d\pi)_{xh}(dL_{xh})_eX\ ,\ (d\pi)_{xh}(dL_{xh})_eY\rangle =$

$= \langle (d\tau(xh))_{eH}(d\pi)_e X,\ (d\tau(xh))_{eH}(d\pi)_e Y\rangle = \langle (d\pi)_e X,\ (d\pi)_e Y\rangle = \langle X,Y\rangle =$

$= \langle (dL_{xh})_e X,\ (dL_{xh})_e Y\rangle$ o sea $d\pi_{|H_{xh}}$ es ortogonal. //

Cuando la acción de G en $G/_H$ es efectiva es posible tomar en h un producto interno $Ad(H)$ invariante y como consecuencia, el producto interno en g satisface ad_X antisimétrica, cualquiera sea $X \in h$. Cuando esto ocurre H (luego xH) es totalmente geodésica pues si $X,Y \in h$ y $Z \in m$ entonces

$$\langle \nabla_X Y,Z\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle [X,Y],Z\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\langle [X,Y],Z\rangle + \langle Z,[Y,X]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle\right\}$$

$$= 0 \ . \quad ||$$

Si $\pi : M \to N$ es una submersión entonces es posible contruir un fibrado vectorial K_π sobre M a partir de los núcleos de $(d\pi)_x$. Más aún si M es riemanniana, su fibrado tangente $T(M)$ es suma de Whitney de K_π y $(K_\pi)^\perp$. Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^*TN \arrow[r] \arrow[d] & TN \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

donde $\pi^*TN = \{(x,y) \in M \times TN : \pi x = py\}$. Como $d\pi_{|(K_\pi)^\perp}$ es una aplicación de fibrados tal que

$$\begin{array}{ccc} K_\pi^\perp & \xrightarrow{d\pi} & TN \\ q\downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow[\pi]{} & N \end{array}$$

resulta $K_\pi^\perp$ isomorfo a π^*TN (ver [MS_1, pág. 26]).

Estamos ahora en condiciones de estudiar levantamiento horizontal de campos en N.

Sea X campo en N, definimos $\bar{X}_m$ como el único vector en T_mM perpendicular a $N_u(d\pi)_m$ y tal que $(d\pi)_m\bar{X}_m = X_{\pi(m)}$. Para probar que la correspondencia $m \to \bar{X}_m$ es C^∞ observemos que

$$m \to \left(m, X_{\pi(m)}\right) \in \pi^*TN$$

es diferenciable pues π^*TN es una subvariedad (con la topología relativa) de $M \times TN$. Como el isomorfismo entre $K_\pi^\perp$ y π^*TN está dado por $\varphi : z \to (q(z), (d\pi)z)$ resulta

$$m \to \left(m, X_{\pi(m)}\right) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \bar{X}_m$$

o sea el levantamiento horizontal es C^∞. Notar que sobre la fibra $\pi^{-1}(p)$ el campo $\bar{X}$ es "constante". Además no es difícil verificar que todo campo en M puede escribirse como suma de dos campos C^∞, uno vertical y otro horizontal.

Ejemplo 3.4. Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado y $\pi : G \to G/H$ la aplicación cociente. Vimos en el Capítulo I que $\pi : G \to G/H$ es una submersión. Veremos ahora que si g es una métrica invariante a derecha en G ella induce naturalmente una métrica g_1, en $G/_H$ tal que $\pi : (G,g) \to (G/_H, g_1)$ es una submersión riemanniana.

El espacio vertical es $\mathcal{V}_{xh} = (dL_{xh})_e(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{h}$ álgebra de Lie de H . Respecto de g , consideremos $\mathcal{H}_{xh} = \mathcal{V}_{xh}^{\perp}$. Como $(dR_h)_x \mathcal{V}_x = d(R_h \circ L_x)_e(\mathfrak{h}) =$ $= d(L_x \circ R_h)_e \left(d(R_{h^{-1}} \circ L_h)_e \mathfrak{h}\right) = \mathcal{V}_{hx}$ y $(dR_h)_x$ es ortogonal el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_x \arrow[rr, "(dR_h)_x"] \arrow[dr, "(d\pi)_x"'] & & \mathcal{H}_{xh} \arrow[dl, "(d\pi)_{hx}"] \\
& T_{\pi(x)}(G/_H) &
\end{tikzcd}$$

Esto nos permite definir para $v,w \in T_{\pi(x)}(G/_H)$ un producto interno

$$g_1(v,w) = g_x(\bar{v},\bar{w})$$

donde $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son los levantamientos horizontales.

Si X e Y son campos en $G/_H$, sean $\bar{X},\bar{Y}$ los levantamientos horizontales y sea $\sigma : U \to G$ sección local, U entorno en $G/_H$. Entonces sigue de la definición que $z \to g_1(X_z, Y_z)$ coincide en U con $z \to \sigma(z) \to g(\bar{X}_{\sigma(z)}, \bar{Y}_{\sigma(z)})$ y por lo tanto g_1 es una métrica riemanniana en $G/_H$. Por construcción de g_1 , resulta π submersión riemanniana. ||

Supongamos que tenemos ahora una acción C^{∞}

$$\mu : G \times M \to M ,$$

(G grupo de Lie, M variedad diferenciable) no necesariamente transitiva. Si denotamos $\mu(g,x) = g\cdot x$ entonces $G\cdot x = \{g\cdot x : g \in G\}$ es la órbita de G por x y $G_x = \{g \in G : g\cdot x = x\}$ es la isotropía en x. Es claro que μ define una relación de equivalencia en M y por lo tanto un espacio topológico cociente, el espacio de órbitas, que denotamos $M/_G$. Además $\pi : M \to M/_G$ es abierta pues $\pi^{-1}\pi A = \bigcup_{g\in G} g\cdot A$; como consecuencia $M/_G$ será un espacio Hausdorff sí y solamente si el gráfico de la relación $G_\sim = \{(x,g\cdot x) : x \in M ,\ g \in G\}$ es cerrado.

Interesa estudiar casos en que $M/_G$ admita estructura de variedad diferenciable, tal que $\pi : M \to M/_G$ sea submersión. Notemos que si $M/_G$ es variedad C^∞, $G\cdot x$ será una subvariedad de dimensión igual a $\dim M - \dim M/_G$. Además, sigue de 6.6, Capítulo I, que si G es N_2, $G\cdot x$ es difeomorfo a $G/_{G_x}$. Más aún si $M/_G$ posee estructura C^∞ entonces $\pi^{-1}(p)$ es localmente compacto y de [H, pág. 121] resulta $G/_{G_x}$ homeomorfo a $\pi^{-1}(\pi(x))$. En particular las estructuras diferenciables en $G\cdot x$ dadas por G/G_x y $\pi^{-1}(\pi(x))$ (función implícita) coinciden.

A seguir veremos condiciones para que $M/_G$ admita estructura C^∞ tal que π sea submersión, en el caso $G_x = \{e\}$ cualquiera sea $x \in M$, ver [V].

<u>Teorema 3.5</u>. Si G actúa libremente en M entonces son equivalentes

(1) $G_\sim$ cerrado y $\gamma : M \times G \to G_\sim$, $\gamma(x,g) = (x,g\cdot x)$ es un homeomorfismo

(2) $G_\sim$ cerrado y cualquiera sea $x \in M$ existe una subvariedad N pasando por x tal que

(a) $T_xM = T_xN \oplus T_x(G\cdot x)$ y (b) π es inyectiva en N.

(3) Existe una estructura C^{∞} en $M/_G$ tal que π es una submersión.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $x \in M$ y N_1 una subvariedad de M tal que $x \in N_1$ y $T_xM = T_xN_1 \oplus T_xG\cdot x$. Sea

$$\mu : G \times N_1 \to M$$

la restricción, de la acción dada, a $G \times N_1$. Como $(d\mu)_{(e,x)}$ es suryectiva (por elección de N_1) y $\dim G\cdot x = \dim G$ resulta $(d\mu)_{(e,x)}$ un isomorfismo. Eligiendo N_1 , suficientemente pequeño, podemos suponer μ es un difeomorfismo entre $U \times N_1$, U entorno de e en G y un abierto en M .

Afirmamos que existe N entorno de x en N_1 tal que π es inyectiva en N . Supongamos que no, entonces existe $x_n \to x$, $x'_n = g_nx_n \to x$, x_n , $x'_n \in N_1$ y $x'_n \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como γ es un homeomorfismo, $g_n \to e$ luego existe k tal que $g_k \in U$. Como $\mu(g_k,x_k) = \mu(1,g_kx_k)$ obtenemos una contradicción.

(2) $\Rightarrow$ (3). Le damos a $M/_G$ la topología cociente y sea N subvariedad de M , $x \in N$ tal que (a) y (b) de (2) se satisfacen. Como en la demostración anterior, $(d\mu)_{(e,x)}$ es un isomorfismo y como consecuencia $(d\mu)_{(e,y)}$ es un isomorfismo para y próximo a x en N .

Como $\mu \circ (L_g \times 1) = \mu_g \circ \mu$ sigue que $(d\mu)_{(g,y)}$ es un isomorfismo cualquiera sea $g \in G$ e y en un abierto N_o en N que contiene a x . Resulta así $G\cdot N_o$ abierto en M y $\mu : G \times N_o \to G\cdot N_o$ un difeomorfismo, (inyectividad de μ es consecuencia de (b) en (2)). Como π es abierta, πN_o es entorno abierto de $\pi(x)$ y $N_o \to exN_o \xrightarrow{\mu} N_o \xrightarrow{\pi} \pi N_o$ es un homeomorfismo.

Dejamos a cargo del lector la verificación de la condición de compatibilidad en la intersección de cartas. Notar que con esta estructura π resulta ser un difeomorfismo entre N_o y πN_o, luego π es submersión.

(3) $\Rightarrow$ (1). Como la topología en $M/_G$ es la cociente, el gráfico $G_\sim$ es cerrado. Además $\gamma : M \times G \to G_\sim$ es contínua, suryectiva y si $(x,g\cdot x) = (y,h\cdot y)$ entonces $x = y$ y $(h^{-1}g)\cdot x = x$ o sea $h = g$ luego γ es inyectiva. Resta solo mostrar que si $(x_n,g_n\cdot x_n) \to (x,g\cdot x)$ entonces $x_n \to x$ y $g_n \to g$. Sea $h_n = g^{-1}g_n$, mostraremos que $h_n \to e$.

Como π es submersión existe una subvariedad N pasando por x y tal que (a) y (b) de (2) se cumple y argumentando como en la demostración precedente podemos suponer $G\cdot N$ abierto y $\mu : G \times N \to G\cdot N$ un difeomorfismo. Si $x_n \to x$ y $g^{-1}g_nx_n \to x$, $x \in N$, podemos suponer x_n y $g^{-1}g_nx_n$ pertenecen a $G\cdot N$ cualquiera sea $n \in N$.

Siendo μ un difeomorfismo, de $x_n = \mu(u_n,y_n) \to x = \mu(e,x)$ y $h_nx_n = \mu(v_n,z_n) \to x = \mu(e,x)$ obtenemos $\mu_n \to e$ y $v_n \to e$. Además $\mu(v_n,z_n) = h_nx_n = \mu(h_nu_n,y_n)$ de donde $h_nu_n = v_n$ y $h_n \to e$ como queríamos demostrar. ||

<u>Corolario 3.6</u>. Sea G un grupo de Lie compacto actuando libremente y diferenciablemente en una variedad M. Entonces $M/_G$ admite estructura C^∞ tal que π es submersión.

<u>Demostración</u>: Veremos que si G es compacto entonces (1) de 3.5 se verifica. En efecto $G_\sim$ es cerrado pues si $(x_n,g_n\cdot x_n) \to (x,z)$ entonces $x_n \to x$ y $g_{n_j} \to g$ luego $g_{n_j}x_{n_j} \to g\cdot x = z$ y $(x,z) \in G_\sim$. Además γ es biyectiva y contínua. Si $(x_n,g_nx_n) \to (x,g\cdot x)$ sigue de la compacidad de G que $g_n \to g$ y como consecuencia γ es un homeomorfismo. ||

Corolario 3.7. Sea G un grupo discreto actuando libremente y diferenciablemente en M y tal que el gráfico $G_\sim$ cerrado. $M/_G$ admite estructura C^∞ tal que $\pi : M \to M/_G$ es submersión sí y solamente si para cada $x \in M$ existe U abierto tal que $x \in U$ y $gU \cap U = \phi$, cualquiera sea $g \in G$, $g \neq e$.

Demostración: Verificaremos que esta condición es equivalente al hecho de que $\gamma : M \times G \to G_\sim$, $(x,g) \to (x,g\cdot x)$ es un homeomorfismo.

Supongamos que γ es un homeomorfismo y que un tal entorno U no existe. Podemos entonces encontrar sucesiones $u_n \to x$, $g_n \cdot u_n \to x$, $g_n \in G$, $g_n \neq e$, $u_n \in M$. Como γ es un homeomorfismo $g_n \to e$ y como G es discreto $g_n = e$ $n \geq n_o$ lo que es un absurdo. Recíprocamente supongamos $(x_n, g_n \cdot x_n) \to (x, g\cdot x)$ o $(x_n, h_n \cdot x_n) \to (x,x)$, $h_n = g^{-1} g_n$. Dado U entorno de x existe un k_o tal que $x_k \in U$, $h_k x_k \in U$ para $k \geq k_o$. Luego $x_k \in U \cap h_k^{-1} U$ y si U es como en el enunciado resulta $h_k = e$ $k \geq k_o$. ||

C A P I T U L O III

CURVATURAS DE SUBMERSIONES RIEMANNIANAS

En las secciones § 1 y § 2 seguiremos fundamentalmente el trabajo de O'Neill Michigan Math. Journal 13, 1966. En la sección § 3 daremos una aplicación en el caso $\pi : G \to G/_H$.

§ 1. Tensores canónicos asociados a una submersión.

Sean M y N variedades riemannianas y $\pi : M \to N$ una submersión riemanniana. Diremos que un campo en M es vertical (resp. horizontal) si es tangente (resp. ortogonal) a la fibra $\pi^{-1}(p)$, $p \in N$. Con $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ denotaremos las proyecciones de los espacios tangentes de M sobre los subespacios de vectores verticales y horizontales respectivamente. Denotaremos generalmente con U,V,W a los vectores verticales y con X,Y,Z a los vectores horizontales.

Tensor T . Si E y F son campos en M

$$T_E F = \mathcal{H}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{V}F + \mathcal{V}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}F \,.$$

Sigue de la definición que

i) T_E es antisimétrico

ii) $T_E = T_{\mathcal{V}E}$

iii) Si V y W son verticales entonces $T_V W = T_W V$.

iv) $T = 0$ sí y solamente si las fibras son totalmente geodésicas.

En efecto para probar i) observemos que

$$\begin{aligned}\langle T_E F, G\rangle &= \langle \mathcal{H}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{V}F, G\rangle + \langle \mathcal{V}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{V}F, G\rangle \\ &= \langle \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{V}F, \mathcal{H}G\rangle + \langle \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}F, \mathcal{V}G\rangle \\ &= -\langle \mathcal{V}F, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}G\rangle - \langle \mathcal{H}F, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}G\rangle \\ &= -\langle F, \mathcal{V}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}G + \mathcal{H}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}G\rangle = -\langle F, T_E G\rangle\end{aligned}$$

ii) resulta de la definición y previo a iii) probemos

<u>Propiedad 1.1</u>. Si V y W son campos verticales entonces $[V,W]$ es un campo vertical. En efecto

$$\begin{aligned}\left((d\pi)_q [V,W]_q\right)(f) &= [V,W]_q (f \circ \pi) \\ &= V_q\left(W(f \circ \pi)\right) - W_q\left(V(f \circ \pi)\right) = 0 ,\end{aligned}$$

ya que $x \to W_x(f \circ \pi) = (d\pi)_x (W_x)(f) = 0$. ||

Si V y W son verticales, $T_V W = \mathcal{H}\, \nabla_V W$ y $T_W V = \mathcal{H}\, \nabla_W V$. Como $0 = \mathcal{H}[V,W] = \mathcal{H}\, \nabla_V W - \mathcal{H}\, \nabla_W V$ iii) queda probada.

Probemos iv). Si V y W son verticales entonces

$$0 = T_V W = \mathcal{H}\, \nabla_V W$$

luego las fibras son totalmente geodésicas. Recíprocamente, $\mathcal{H}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{V}F = 0$ y $\langle \mathcal{V}\, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}F, G\rangle = \langle \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{H}F, \mathcal{V}G\rangle = -\langle \mathcal{H}F, \nabla_{\mathcal{V}E}\, \mathcal{V}G\rangle = 0$ luego $T = 0$.

<u>Tensor A</u>. Si E y F son campos en M definimos

$$A_E F = \mathcal{V}\,\nabla_{\mathcal{H}E}\,\mathcal{H}F + \mathcal{H}\,\nabla_{\mathcal{H}E}\,\mathcal{V}F\ .$$

Sigue de la definición que

i) A_E es antisimétrico

ii) $A_E = A_{\mathcal{H}E}$

iii) Si X e Y son campos horizontales entonces $A_X Y = -A_Y X$.

iv) Son equivalentes: $A = 0$, $\mathcal{V}(\nabla_X Y) = 0$ X e Y horizontales y $\mathcal{V}[X,Y] = 0$, X e Y horizontales.

La prueba de i) es similar a la ya realizada para T_E y ii) sigue de la definición de A . Para demostrar iii) precisamos de algunas propiedades.

Definición 1.2. Diremos que un campo X en M es básico si X es horizontal y X está π-relacionado con un campo X_* en N .

Recordemos que si Z es un campo en N entonces $\bar{Z}$, el levantamiento horizontal, es un campo horizontal en M , π-relacionado con Z . Existe por lo tanto una correspondencia biunívoca entre campos en N y campos básicos en M , esta última dada por $X \to X_*$ o $Z \to \bar{Z}$. Además si X es cualquier campo horizontal en M , dicho campo es una sección de $\mathcal{H}(M) = (K_\pi)^\perp \to M$ (ver Capítulo II) y por lo tanto es localmente una combinación C^∞ de campos básicos.

Propiedad 1.3. Si X es un campo básico y V es un campo vertical entonces $[X,Y]$ es un campo vertical.

En efecto $(d\pi)_q [X,V]_q\ (f) = X_q\big(V(f \circ \pi)\big) - V_q\big(X(f \circ \pi)\big)$

$= -V_q\big(X(f \circ \pi)\big)$ ya que $V(f \circ \pi) = 0$. Además $X(f \circ \pi)(y) = X_y(f \circ \pi) =$

$= (d\pi)_y(X_y)(f) = \big(X_*\big)_{\pi(y)}(f)$ pues X está π-relacionado con X_* . Por lo tanto

$$V_q\big(X(f \circ \pi)\big) = V_q\big(X_*(f) \circ \pi\big) = (d\pi)_q(V_q)\big(X_*(f)\big) = 0 \ .$$

Propiedad 1.4. Si X e Y son campos básicos entonces

$$\big(H[X,Y]\big)_* = [X_*,Y_*]$$

$$\big(H(\nabla_X Y)\big)_* = \nabla^*_{X_*} Y_* \ ,$$

donde ∇^* denota la conexión riemanniana en N . Equivalentemente, si X e Y son campos en N entonces

$$H[\bar{X},\bar{Y}] = \overline{[X,Y]}$$

$$H\big(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}\big) = \overline{\nabla^*_X Y} \ ,$$

donde ∇^* denota la conexión riemanniana en N .

La demostración de la primera identidad es consecuencia de 1.8, Capítulo I. Para demostrar la segunda afirmación observemos que

$$2\langle \nabla_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z}\rangle = \langle[\bar{X},\bar{Y}],\bar{Z}\rangle - \langle[\bar{Y},\bar{Z}],\bar{X}\rangle + \langle[\bar{Z},\bar{X}],\bar{Y}\rangle + \bar{X}\langle\bar{Y},\bar{Z}\rangle + \bar{Y}\langle\bar{Z},\bar{X}\rangle - \bar{Z}\langle\bar{X},\bar{Y}\rangle$$

$$= 2\langle\overline{\nabla^*_X Y},\bar{Z}\rangle$$

pues $\langle[\bar{X},\bar{Y}],\bar{Z}\rangle = \langle\overline{[X,Y]},\bar{Z}\rangle$ y $\bar{X}\langle\bar{Y},\bar{Z}\rangle = \bar{X}\big(\langle Y,Z\rangle \circ \pi\big) = X\big(\langle Y,Z\rangle \circ \pi\big)$.

Prueba de iii). Si X e Y son campos básicos y V es un campo vectorial entonces

$$\langle \nabla_X Y, V\rangle = \frac{1}{2}\Big\{\langle [X,Y], V\rangle - \langle [Y,V], X\rangle + \langle [V,X], Y\rangle + X\langle Y,V\rangle + Y\langle V,X\rangle - $$

$$- V\langle X,Y\rangle\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\langle [X,Y], V\rangle$$

ya que el segundo y el tercer sumando son nulos por la propiedad 1.3, el cuarto y el quinto sumando son nulos pues V es vertical y X e Y horizontales y el sexto sumando es nulo pues $\langle X,Y\rangle = \langle X_*, Y_*\rangle \circ \pi$ luego $V\langle X,Y\rangle = 0$.
Probamos así que si X e Y son campos básicos entonces

$$A_X Y = \frac{1}{2}\, \mathcal{V}[X,Y] .$$

Sean X e Y campos horizontales. Luego, localmente $X = \Sigma\, f_i X_i$, $Y = \Sigma\, g_i X_i$, X_i campos básicos y como consecuencia

$$A_X Y = \sum_{i,j} f_i g_j\, A_{X_i} X_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_i g_j\, \mathcal{V}[X_i, X_j] = \frac{1}{2}\, \mathcal{V}[X,Y]$$

lo que implica inmediatamente iii).

Probamos iv). De $A = 0$ se obtiene $\mathcal{V}\, \nabla_X Y = 0$ si X e Y son horizontales. Recíprocamente si E y F son arbitrarios, $\mathcal{V}\, \nabla_{\mathcal{H}E}\, \mathcal{H}F = 0$ pues $\nabla_{\mathcal{H}E}\, \mathcal{H}F$ es horizontal. Además como

$$\langle \mathcal{H}\, \nabla_{\mathcal{H}E}\, \mathcal{V}F, G\rangle = \langle \nabla_{\mathcal{H}E}\, \mathcal{V}F, \mathcal{H}G\rangle = -\langle \mathcal{V}F, \nabla_{\mathcal{H}E}\, \mathcal{H}G\rangle$$

resulta que $A = 0$.

Para probar la equivalencia restante es suficiente ver que si X e Y son campos horizontales entonces

$\mathcal{V}\,\nabla_X Y = \mathcal{V}\,\nabla_Y X = 0$ sí y sólo si $\mathcal{V}[X,Y] = 0$ y esto resulta de

$\mathcal{V}[X,Y] = \mathcal{V}\,\nabla_X Y - \mathcal{V}\,\nabla_Y X$ y $0 = \mathcal{V}\,\nabla_X Y + \mathcal{V}\,\nabla_Y X$.

Lema 1.5. Sean X,Y campos horizontales, V,W campos verticales, $\hat{\nabla}$ conexión en la fibra y ∇ conexión en M. Entonces

i) $\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$

ii) $\nabla_V X = \mathcal{H}\,\nabla_V X + T_V X$

iii) $\nabla_X V = A_X V + \mathcal{V}\,\nabla_X V$

iv) $\nabla_X Y = \mathcal{H}\,\nabla_X Y + A_X Y$

Más aún, si X es básico $\mathcal{H}\,\nabla_V X = A_X V$.

Demostración: Inmediata usando definición de los tensores T y A. $\|$

Lema 1.6. Si X e Y son campos horizontales y V,W son campos verticales entonces

i) $(\nabla_V A)_W = -A_{T_V W}$ iii) $(\nabla_X T)_Y = -T_{A_X Y}$

ii) $\left(\nabla_X A\right)_W = - A_{A_X W}$ iv) $\left(\nabla_V T\right)_Y = - T_{T_V Y}$.

Demostración: Sea E un campo arbitrario entonces

i) $$\left(\nabla_V A\right)_W E = \nabla_V\left(A_W E\right) - A_{\nabla_V W} E - A_W \nabla_V E$$

$$= - A_{H \nabla_V W} E = - A_{T_V W} E$$

por propiedades de A y T .

ii) $$\left(\nabla_X A\right)_W E = \nabla_X\left(A_W E\right) - A_{\nabla_X W} E - A_W \nabla_X E$$

$$= - A_{H \nabla_X W} E = - A_{A_X W} E \ .$$

Dejamos como ejercicio las demostraciones de iii) y iv). ||

Lema 1.7. Si X es un campo horizontal y U,V,W son campos verticales entonces

$$\langle \left(\nabla_U A\right)_X V, W\rangle = \langle T_U V, A_X W\rangle - \langle T_U W, A_X V\rangle \ .$$

Demostración:

$$\left(\nabla_U A\right)_X V = \nabla_U\left(A_X V\right) - A_{\nabla_U X} V - A_X \nabla_U V$$

Como $A_X V$ es horizontal resulta

(*) $$\langle \nabla_U\left(A_X V\right), W\rangle = - \langle A_X V, H\left(\nabla_U W\right)\rangle = - \langle A_X V, T_U W\rangle \ .$$

Como $A_{\nabla_U X} V$ es horizontal resulta

(**) $\langle A_{\nabla_U X} V, W\rangle = 0$

Como A_X es antisimétrico sigue que

(***) $\langle A_X \nabla_U V, W\rangle = -\langle \nabla_U V, A_X W\rangle = -\langle T_U V, A_X W\rangle$

y de (*) (**) y (***) resulta el lema. ||

§ 2. Curvatura seccional.

Calcularemos en esta sección el tensor de curvatura de M relacionándolo a información geométrica de la fibra y del espacio N. Precisamos calcular 5 ecuaciones que enumeraremos n, $n = 0,1, \ldots, 4$ dependiendo del número de vectores horizontales que aparezcan en $\langle R(E_1,E_2)E_3,E_4\rangle$; el orden no es esencial debido a propiedades del tensor de curvatura.

Sean X,Y,Z,H campos horizontales y U,V,W,F campos verticales. Debemos determinar

(0) $\langle R(U,V)W,F\rangle$ (1) $\langle R(U,V)W,H\rangle$

(2) $\langle R(X,U)Y,F\rangle$ (3) $\langle R(H,X)Y,F\rangle$

(4) $\langle R(H,X)Y,Z\rangle$

Cálculos. Usando básicamente el lema 1.5 obtenemos

$$\langle R(U,V)W,F\rangle = \langle \nabla_{[U,V]} W,F\rangle - \langle \nabla_U \nabla_V W,F\rangle + \langle \nabla_V \nabla_U W,F\rangle$$

$$= \langle \hat{\nabla}_{[U,V]} W,F\rangle - \langle \nabla_U T_V W,F\rangle - \langle \nabla_U \hat{\nabla}_V W,F\rangle$$

$$+\langle \nabla_V\, T_U W,F\rangle + \langle \nabla_V\, \hat{\nabla}_U W,F\rangle$$

$$= \langle \hat{\nabla}_{[U,V]} W,F\rangle - \langle T_U T_V W,F\rangle - \langle \hat{\nabla}_U\, \hat{\nabla}_V W,F\rangle + \langle T_V T_U W,F\rangle + \langle \hat{\nabla}_V\, \hat{\nabla}_U W,F\rangle$$

Luego

(0) $$\underline{\underline{\langle R(U,V)W,F\rangle = \langle \hat{R}(U,V)W,F\rangle + \langle T_V W, T_U F\rangle - \langle T_U W, T_V F\rangle}}\ .$$

Para calcular (1) observar que

$$\langle \nabla_{[U,V]} W,H\rangle = \langle T_{[U,V]} W,H\rangle = \langle T_{\nabla_U V - \nabla_V U} W,H\rangle\ ,$$

$$-\langle \nabla_U\, \nabla_V W,H\rangle = -\langle \nabla_U^{\mathcal{H}}\, \nabla_V W,H\rangle - \langle \nabla_U^{\mathcal{V}}\, \nabla_V W,H\rangle$$

$$= -\langle \nabla_U T_V W,H\rangle - \langle T_U\, \nabla_V W,H\rangle\ ,$$

$$\langle \nabla_V\, \nabla_U W,H\rangle = \langle \nabla_V\, T_U W,H\rangle + \langle T_V\, \nabla_U W,H\rangle$$

y sumando obtenemos

(1) $$\underline{\underline{\langle R(U,V)W,H\rangle = \langle (\nabla_V T)_U W,H\rangle - \langle (\nabla_U T)_V W,H\rangle}}\ .$$

En lo que sigue estimaremos (2)

$$\langle R(X,U)Y,F\rangle = \langle \nabla_{\nabla_X U} Y,F\rangle - \langle \nabla_{\nabla_U X} Y,F\rangle - \langle \nabla_X^{\mathcal{H}}\, \nabla_U Y,F\rangle$$

$$-\langle \nabla_X T_U Y,F\rangle + \langle \nabla_U^{\mathcal{H}}\, \nabla_X Y,F\rangle + \langle \nabla_U A_X Y,F\rangle\ .$$

Como

$$\langle \nabla_X \mathcal{H}\, \nabla_U Y, F\rangle = \langle A_X\, \nabla_U Y, F\rangle \quad \text{y} \quad \langle \nabla_U \mathcal{H}\, \nabla_X Y, F\rangle = \langle T_U\, \nabla_X Y, F\rangle$$

resulta

$$\langle R(X,U)Y,F\rangle = \langle \nabla_{\nabla_X U} Y, F\rangle - \langle T_{\nabla_X U} Y, F\rangle - \langle (\nabla_X T)_U Y, F\rangle$$

$$- \langle \nabla_{\nabla_U X} Y, F\rangle + \langle A_{\nabla_U X} Y, F\rangle + \langle (\nabla_U A)_X Y, F\rangle .$$

Usando que

$$\langle \nabla_{\nabla_X U} Y, F\rangle - \langle T_{\nabla_X U} Y, F\rangle = \langle \nabla_{A_X U} Y, F\rangle = \langle A_{A_X U} Y, F\rangle ,$$

$$\langle \nabla_{\nabla_U X} Y, F\rangle - \langle A_{\nabla_U X} Y, F\rangle = \langle \nabla_{T_U X} Y, F\rangle = \langle T_{T_U X} Y, F\rangle$$

y las propiedades iii) de los tensores T y A (notar que $A_X U$ es horizontal y $T_U X$ es vertical) obtenemos

(2) $$\underline{\langle R(X,U)Y,F\rangle = -\langle A_Y A_X U, F\rangle - \langle (\nabla_X T)_U Y, F\rangle - \langle T_Y T_U X, F\rangle + \langle (\nabla_U A)_X Y, F\rangle} .$$

Antes de calcular (3) observemos que siendo R un tensor podemos suponer X,Y y H básicos. Más aún, localmente en M existe una base de campos básicos que satisfacen que el corchete de Lie 2 a 2 es vertical (basta tomar en N una base local de campos tal que el corchete 2 a 2 es cero y luego levantar horizontalmente).

(3) $$\langle R(H,X)Y,F\rangle = \langle \nabla_{[H,X]} Y, F\rangle - \langle \nabla_H \mathcal{H}\, \nabla_X Y + \nabla_H A_X Y, F\rangle + \langle \nabla_X \mathcal{H}\, \nabla_H Y + \nabla_X A_H Y, F\rangle$$

$$= \langle T_{[H,X]} Y, F\rangle - \langle A_H\, \nabla_X Y + \nabla_H A_X Y, F\rangle + \langle A_X\, \nabla_H Y + \nabla_X A_H Y, F\rangle$$

$$= \langle T_{[H,X]}Y,F\rangle - \langle (\nabla_H A)_X Y,F\rangle - \langle A_{\nabla_H X}Y,F\rangle + \langle (\nabla_X A)_H Y,F\rangle + \langle A_{\nabla_X H}Y,F\rangle$$

$$= \langle T_{[H,X]}Y,F\rangle - \langle (\nabla_H A)_X Y - (\nabla_X A)_H Y,F\rangle \quad ,$$

debiéndose la última igualdad al hecho siguiente:

$$\langle A_{\nabla_X H}Y - A_{\nabla_H X}Y,F\rangle = \langle A_{[X,H]}Y,F\rangle = 0$$

pues $[X,H]$ es vertical.

El lema siguiente nos permitirá simplificar la fórmula de curvatura (3) obtenida anteriormente.

Lema 2.1. Si F es vertical y S denota la suma cíclica sobre los campos horizontales X,Y,H entonces

$$S\langle (\nabla_Y A)_H X,F\rangle = \frac{1}{2} S\langle T_{[H,X]}Y,F\rangle \ .$$

Demostración: Como la ecuación anterior es tensorial podemos suponer X,Y,H campos básicos y $[X,Y]$, $[X,H]$, $[Y,H]$ campos verticales. De

$$\langle [[H,X]Y],F\rangle = \langle \nabla_{[H,X]}Y,F\rangle - \langle \nabla_Y[H,X],F\rangle$$

$$= \langle T_{[H,X]}Y,F\rangle - 2\langle \nabla_Y A_H X,F\rangle \ ,$$

obtenemos $2S\langle \nabla_Y A_H X,F\rangle = S\langle T_{[H,X]}Y,F\rangle$. Ahora bien como

$$\langle (\nabla_Y A)_H X - \nabla_Y A_H X,F\rangle = \langle -A_{\nabla_Y H}X - A_H \nabla_Y X,F\rangle$$

$$= \langle A_X H \nabla_Y H - A_H \nabla_Y X,F\rangle$$

$$= \langle A_X \nabla_Y H - A_H \nabla_Y X,F\rangle$$

resulta

$$S \langle (\nabla_Y A)_H X - \nabla_Y A_H X, F \rangle = \langle A_X [Y,H] + A_H [X,Y] + A_Y [H,X], F \rangle$$

$$= 0$$

pues $A_X[Y,H]$, $A_H[X,Y]$ y $A_Y[H,X]$ son verticales. ‖

Reemplazando la expresión del lema 2.1 en (3) obtenemos

$$\langle R(H,X)Y,F \rangle = \langle T_{[H,X]} Y,F \rangle - \langle (\nabla_H A)_X Y,F \rangle - \langle (\nabla_X A)_Y H,F \rangle$$

$$= \langle T_{[H,X]} Y,F \rangle - \frac{1}{2} S \langle T_{[H,X]} Y,F \rangle + \langle (\nabla_Y A)_H X,F \rangle$$

y finalmente

$$(3) \qquad \underline{\langle R(H,X)Y,F \rangle = \frac{1}{2} \langle T_{[H,X]} Y,F \rangle - \frac{1}{2} \langle T_{[X,Y]} H,F \rangle - \frac{1}{2} \langle T_{[Y,H]} X,F \rangle + \langle (\nabla_Y A)_H X,F \rangle}$$

En lo que sigue calcularemos $\langle R(H,X)Y,Z \rangle$ para H,X,Y campos básicos, Z horizontal. Podemos suponer $[H,X]$, $[H,Y]$, $[X,Y]$ campos verticales y recordemos que con X_* denotamos campo inducido en N y con ∇^* conexión riemanniana en N.

Para calcular (4) observar que de la propiedad 1.3 resulta

$$\langle \nabla_{[H,X]} Y,Z \rangle = \langle A_Y [H,X], Z \rangle = 2 \langle A_Y A_H X, Z \rangle .$$

Además

$$\langle \nabla_H \nabla_X Y, Z\rangle = \langle \mathcal{H} \nabla_H \mathcal{H} \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_H A_X Y, Z\rangle$$

$$= \langle \left(\mathcal{H} \nabla_H \mathcal{H} \nabla_X Y\right)_* , Z_*\rangle + \langle A_H A_X Y, Z\rangle$$

$$= \langle \nabla^*_{H_*} \nabla^*_{X_*} Y_*, Z_*\rangle + \langle A_H A_X Y, Z\rangle \ ,$$

$$\langle \nabla_X \nabla_H Y, Z\rangle = \langle \nabla^*_{X_*} \nabla^*_{H_*} Y_*, Z_*\rangle + \langle A_X A_H Y, Z\rangle \ ,$$

y por lo tanto

(4) $\underline{\langle R(H,X)Y,Z\rangle = \langle R^*(H_*,X_*)Y_*,Z_*\rangle - \langle A_H A_X Y,Z\rangle - \langle A_X A_Y H,Z\rangle + 2\langle A_Y A_H X,Z\rangle}$

Reescribimos (0), ..., (4) en el caso $T \equiv 0$ o sea cuando las fibras son totalmente geodésicas.

(0) $\langle R(U,V)W,F\rangle = \langle \hat{R}(U,V)W,F\rangle$

(1) $\langle R(U,V)W,H\rangle = 0$

(2) $\langle R(X,U)Y,F\rangle = \langle \left(\nabla_U A\right)_X Y,F\rangle - \langle A_Y A_X U,F\rangle$

(3) $\langle R(H,X)Y,F\rangle = \langle \left(\nabla_Y A\right)_H X,F\rangle$

(4) $\langle R(H,X)Y,Z\rangle = \langle R^*(H_*,X_*)Y_*,Z_*\rangle - \langle A_H A_X Y,Z\rangle - \langle A_X A_Y H,Z\rangle + 2\langle A_Y A_H X,Z\rangle$

Las curvaturas seccionales (cuando $T \equiv 0$) se obtienen de

(0') $\langle R(U,V)U,V\rangle = \langle \hat{R}(U,V)U,V\rangle$

(2') $\langle R(X,U)X,U\rangle = \|A_X U\|^2$

(3') $\langle R(H,X)H,X\rangle = \langle R^*(H_*,X_*)H_*,X_*\rangle - \frac{3}{4}\|\mathcal{V}[H,X]\|^2$.

§ 3. Curvatura seccional en $G/_H$.

Como primera aplicación de la fórmula de O'Neill (0'), (2') y (3'), sección § 2, calcularemos curvatura seccional en $G/_H$. Comenzaremos con el caso especial $H = \{e\}$ y G un grupo de Lie con métrica invariante a izquierda.

Proposición 3.1. Sea $\langle\ ,\ \rangle$ métrica invariante a izquierda en G , ∇ la conexión riemanniana asociada y sean X,Y,Z campos invariantes a izquierda entonces

(i) $$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle [X,Y],Z\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\langle \mathrm{ad}_X Y - \mathrm{ad}_X^* Y - \mathrm{ad}_Y^* X, Z\rangle\right\}$$

(ii) $$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle [Y[X,Y]],X\rangle - \|[X,Y]\|^2 + \|\nabla_X Y\|^2 - \langle \nabla_X X, \nabla_Y Y\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\|\mathrm{ad}_X^* Y + \mathrm{ad}_Y^* X\|^2 - \frac{3}{4}\|[X,Y]\|^2$$

$$- \langle \mathrm{ad}_X^* X, \mathrm{ad}_Y^* Y\rangle - \frac{1}{2}\langle [[X,Y]Y],X\rangle - \frac{1}{2}\langle [[Y,X]X],Y\rangle$$

(iii) $$\langle r(X),X\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{trad}_X^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{trad}_X^*\mathrm{ad}_X - \mathrm{trad}_{\nabla_X X} + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\langle [E_i,E_j],X\rangle^2$$

donde $E_1 \ldots E_n$ es una base ortonormal de campos invariantes a izquierda y r es la transformación de Ricci.

Demostración: (i) sigue del hecho $0 = X\langle Y,Z\rangle = Y\langle X,Z\rangle = Z\langle X,Y\rangle$ pues X,Y,Z son campos invariantes a izquierda.

Para obtener (ii) observemos que:

$$\langle \nabla_{[X,Y]}X,Y\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle [[X,Y]X],Y\rangle - \|[X,Y]\|^2 + \langle [Y[X,Y]],X\rangle\right\},$$

$$-\langle \nabla_X\ \nabla_Y X,Y\rangle = \langle \nabla_Y X,\ \nabla_X Y\rangle = \|\nabla_X Y\|^2 - \langle \nabla_X Y,[X,Y]\rangle$$

$$= \|\nabla_X Y\|^2 - \frac{1}{2}\left\{\|[X,Y]\|^2 - \langle [Y[X,Y]],X\rangle + \langle [[X,Y]X],Y\rangle\right\}$$

$$\langle \nabla_Y\ \nabla_X X,Y\rangle = -\langle \nabla_X X,\ \nabla_Y Y\rangle$$

por lo tanto, sumando las identidades anteriores, obtenemos

$$(*)\qquad \langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle [Y[X,Y]],X\rangle - \|[X,Y]\|^2 + \|\nabla_X Y\|^2 - \langle \nabla_X X,\ \nabla_Y Y\rangle\ .$$

Si usamos (i) resulta

$$\nabla_X X = -ad_X^* X\ ,$$

$$\|\nabla_X Y\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|[X,Y]\|^2 + \|ad_X^* Y + ad_Y^* X\|^2 - 2\langle ad_X Y,\ ad_X^* Y + ad_Y^* X\rangle\right)$$

y sustituyendo en (*) obtenemos la segunda identidad en (ii).

(iii) Para obtener (iii) recordemos que la transformación autoadjunta de Ricci r en $\mathcal{g}$ está definida por

$$r(X) = \Sigma\ R(E_i,X)E_i$$

donde $E_1 \ldots E_n$ es una base ortonormal de $\mathcal{g}$. Por lo tanto

$$\langle r(X),X\rangle = \sum_i \langle \nabla_{[X,E_i]}X - \nabla_X\nabla_{E_i}X,E_i\rangle + \sum_i \langle \nabla_{E_i}\ \nabla_X X,E_i\rangle$$

Usando que $\nabla_X - \nabla X = ad_X$ obtenemos

$$\nabla_{[X,E_i]} X - \nabla_X \nabla_{E_i} X = \nabla_X \, ad_X E_i - ad_X^2 E_i - \nabla_X^2 E_i + \nabla_X \, ad_X E_i$$

$$= - \left(\nabla X\right)^2 (E_i)$$

y como $\langle \nabla_{E_i} \nabla_X X, E_i \rangle = - \langle [\nabla_X X, E_i], E_i \rangle$ resulta

$$\langle r(X), X \rangle = -tr\left(\nabla X\right)^2 - tr\, ad_{\nabla_X X} \quad .$$

De la expresión de la conexión

$$\langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle = \frac{1}{2} \left\{ - \langle ad_X E_i, E_j \rangle - \langle ad_X E_j, E_i \rangle + \langle [E_j, E_i], X \rangle \right\}$$

y como consecuencia

$$tr\left(\nabla X\right)^2 = \sum_{i,j} \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle \langle \nabla_{E_j} X, E_i \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \left(\langle ad_X E_i, E_j \rangle + \langle ad_X E_j, E_i \rangle \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [E_i, E_j], X \rangle^2$$

$$= \frac{1}{4} \, tr\left(ad_X + ad_X^*\right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [E_i, E_j], X \rangle^2 \, ,$$

luego (iii) sigue. ||

<u>Corolario 3.2</u>. Si la métrica en G es bi-invariante entonces

(i) $\nabla_X Y = \frac{1}{2} \, ad_X Y$,

(ii) $\langle R(X,Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4} \, \|[X,Y]\|^2$,

(iii) $\langle r(X), X \rangle = \frac{1}{4} \sum_i \|[X, E_i]\|^2$, $\{E_i\}$ base ortonormal.

Demostración: Es consecuencia inmediata de 3.1 y del hecho que ad_X es antisimétrica, cualquiera sea $X \in \mathfrak{g}$. ||

Consideraremos ahora el caso $G/_H$. La aplicación $\pi : G \to G/_H$ es una fibración, luego una submersión.
Vimos en la demostración de 1.5(ii), Capítulo II, que si $G/_H$ posee métrica G-invariante $\langle\langle\ \ \rangle\rangle$ y la acción es efectiva, existe en G una métrica $\langle\ ,\ \rangle$ invariante a izquierda por G y a derecha por H tal que π se transforma en submersión riemanniana. Más aún si $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^{\perp}$ respecto de $\langle\ \ \rangle$ entonces "$\langle\ \ \rangle|_{\mathfrak{m}} = \langle\langle\ \ \rangle\rangle_{eH}$" . Podemos entonces concluir que si X,Y son elementos de $\mathfrak{m}$, sigue de (2')

Proposición 3.3. La curvatura de una métrica G-invariante en $G/_H$ está dada por

$$\langle\langle R^*(X_*,Y_*)X_*,Y_*\rangle\rangle = \frac{1}{4}\|ad_X^*Y + ad_Y^*X\|^2 - \frac{3}{4}\|[X,Y]_{\mathfrak{m}}\|^2 - \langle ad_X^*X, ad_Y^*Y\rangle$$

$$- \frac{1}{2}\langle[[X,Y]Y],X\rangle - \frac{1}{2}\langle[[Y,X]X],Y\rangle .$$

Cuando la métrica en G es bi-invariante se dice que la métrica en $G/_H$ es normal. Como en 3.2 la fórmula de la curvatura se simplifica cuando la métrica en $G/_H$ es normal.

Corolario 3.4. Si la métrica en $G/_H$ es normal entonces

$$\langle\langle R^*(X_*,Y_*)X_*,Y_*\rangle\rangle = \|[X,Y]_{\mathfrak{h}}\|^2 + \frac{1}{4}\|[X,Y]_{\mathfrak{m}}\|^2 .$$

Ejemplo 3.5. El espacio proyectivo complejo CP^n es difeomorfo a $SU(n+1)/_{U(n)}$

y admite una métrica $SU(n+1)$ invariante tal que las curvaturas seccionales están comprendidas entre $\frac{1}{4}$ y 1. Para probarlo recordamos que

$$U(k) = \{U \in GL(n,C) : U\bar{U}^t = I\}$$

y $$SU(k) = \{U \in U(k) : \det U = 1\}$$

son grupos de Lie compactos (demostración análoga a 5.1(ii), Capítulo I). Además sus álgebras de Lie coinciden con

$$\mathcal{U}(k) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,C) : A + \bar{A}^t = 0\}$$

$$\mathcal{SU}(k) = \{A \in \mathcal{U}(k) : \operatorname{tr} A = 0\} .$$

Para obtener CP^n, la inmersión de $U(n)$ en $SU(n+1)$ está dada por $U \to \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & (\det U)^{-1} \end{array}\right)$ y la inmersión de $\mathcal{U}(n)$ en $\mathcal{SU}(n+1)$ está dada por $A \to \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & -\operatorname{tr} A \end{array}\right)$.

Sea $\langle A,B\rangle = -2 \operatorname{tr} AB$. Notar que $\operatorname{tr} AB$ es real pues $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr}(-\bar{A}^t)(-\bar{B}^t) = \operatorname{tr}(\overline{AB})^t = \operatorname{tr} \overline{AB} = \overline{\operatorname{tr} AB}$. Además $\langle\ ,\ \rangle$ satisface ad_Z antisimétrica, cualquiera que sea $z \in \mathcal{SU}(n+1)$. En efecto

$$\langle [Z,A],B\rangle = -2 \operatorname{tr}[Z,A]B = -2 \operatorname{tr}(ZA)B + 2 \operatorname{tr}(AZ)B$$

$$= -2 \operatorname{tr} A(BZ) + 2 \operatorname{tr} A(ZB) = -\langle A,[Z,B]\rangle .$$

Si $Z \in \mathcal{U}(n)$, $ad_Z : \mathcal{U}(n) \to \mathcal{U}(n)$ y siendo ad_Z antisimétrica, preserva $m = \mathcal{U}(n)^{\perp}$ en $\mathcal{SU}(n+1)$. Como la métrica resulta bi-invariante, para calcular curvaturas seccionales aplicaremos 3.4. Notemos primero que $X \in m$ sí y sólo si

$$X = \begin{bmatrix} & & -\bar{x}_1 \\ & & \vdots \\ & 0 & \\ & & -\bar{x}_n \\ x_1 & \cdots \; x_n & 0 \end{bmatrix}$$

Más aún, $[X,Y] \in u(n)$ si $X,Y \in m$ pues

$$[X,Y] = \begin{bmatrix} -\bar{x}_i y_j + \bar{y}_i x_j & 0 \\ & \\ 0 & \sum_i \bar{x}_i y_i - \bar{y}_i x_i \end{bmatrix}$$

y por lo tanto la curvatura seccional en CP^n está dada por

$$\langle\langle R(X_*,Y_*)X_*,Y_* \rangle\rangle = \|[X,Y]\|^2 \quad , \qquad X,Y \in m \ .$$

Para ver que la curvatura está comprendida entre $\frac{1}{4}$ y 1 calculamos $\|[X,Y]\|^2$ en $su(n+1)$.

$$\|[X,Y]\|^2 = -2 \ \mathrm{tr}[XY][XY]$$

$$= -2 \sum_{ij} \left(-\bar{x}_i y_j + \bar{y}_i x_j\right)\left(-\bar{x}_j y_i + \bar{y}_j x_i\right) - 2 \sum_{ij} \left(\bar{x}_i y_i - \bar{y}_i x_i\right)\left(\bar{x}_j y_j - \bar{y}_j x_j\right)$$

$$= 4 \sum_i x_i \bar{x}_i \sum_j y_j \bar{y}_j - 2 \sum_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j y_i y_j - 2 \sum_{ij} x_i x_j \bar{y}_i \bar{y}_j$$

$$- 2 \sum_i \left(\bar{x}_i y_i - \bar{y}_i x_i\right) \sum_j \left(\bar{x}_j y_j - \bar{y}_j x_j\right) \ .$$

Observemos que

(1) $\langle X,Y\rangle = -2 \operatorname{tr} XY = 2 \left(\Sigma\, \bar{x}_i y_i + x_i \bar{y}_i\right)$

(2) $i\langle X,JY\rangle = -2i \operatorname{tr} XJY = 2 \left(\Sigma - \bar{x}_i y_i + x_i \bar{y}_i\right)$

donde

$$J \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} -\bar{y}_n \\ \vdots \\ -\bar{y}_n \end{matrix} \\ y_1 \cdots y_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} i\bar{y}_1 \\ \vdots \\ i\bar{y}_n \end{matrix} \\ iy_1 \cdots iy_n & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $$\frac{\left(i\langle X,JY\rangle\right)^2 + \langle X,Y\rangle^2}{4} = 2 \sum_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j y_i y_j + 2 \sum_{ij} x_i x_j \bar{y}_i \bar{y}_j$$

Por lo tanto

$$\|[X,Y]\|^2 = \frac{1}{4}\|X\|^2\|Y\|^2 - \frac{1}{4}\left[\left(i\langle X,JY\rangle\right)^2 + \langle X,Y\rangle^2\right] + \frac{1}{2}\langle X,JY\rangle^2 ,$$

de donde tomando $\langle X,Y\rangle = 0$, $\|X\|^2 = \|Y\|^2 = 1$, resulta la afirmación. Notar que siempre se alcanza curvatura 1 y si la dimensión de m es mayor que 2 se alcanza curvatura 1/4.

Conviene observar además que sigue de (4) que en $SU(n+1)$, para X,Y,Z campos horizontales

(I) $$R^*(X_*,Y_*)Z_* = \left(R(X,Y)Z + A_X A_Y Z + A_Y A_Z X - 2\, A_Z A_X Y\right)_*$$

donde $*$ significa tomar derivada de la submersión.

Si X,Y,Z son campos invariantes a izquierda en $SU(n+1)$ tal que en la identidad toman valores en m (luego son horizontales) resulta

$A_Y Z = \frac{1}{2}[Y,Z]$, $A_Z X = \frac{1}{2}[Z,X]$ y $A_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ pues $[m,m]$ es espacio vertical. Como además la métrica es bi-invariante y estamos trabajando con campos invariantes a izquierda, aplicando 3.2 obtenemos $A_X[Y,Z] = \nabla_X[Y,Z] = \frac{1}{2}[X[Y,Z]]$, $A_Y[Z,X] = \frac{1}{2}[Y[Z,X]]$ y $A_Z[X,Y] = \frac{1}{2}[Z[X,Y]]$ y sustituyendo en (I) se obtiene

$$R^*(X_*,Y_*)Z_* = [[X,Y]Z]_* \quad \text{ó} \quad \overline{R^*(E,F)}G = H[[\bar{E},\bar{F}]\bar{G}] \ .$$

Una variedad riemanniana simplemente conexa y tal que $\nabla R \equiv 0$ se denomina <u>espacio simétrico</u>. No es difícil verificar que CP^n (ejemplo anterior) es un espacio simétrico. En efecto, como $CP^n \simeq \frac{SU(n+1)}{U(n)}$ de la sucesión de grupos de homotopía correspondiente a $SU(n+1) \supset U(n)$ obtenemos

(i) $$\to \pi_2\left(CP^n\right) \to \pi_1\left(U(n)\right) \to \pi_1\left(SU(n+1)\right) \to \pi_1\left(CP^n\right) \to \{e\} \ .$$

Como $SU(n+1)/SU(n) \approx S^{2n+1}$ resulta j un isomorfismo para $n \geq 1$ pues

$$\to \pi_2(S^{2n+1}) \to \pi_1\left(SU(n)\right) \to \pi_1\left(SU(n+1)\right) \to \pi_1(S^{2n+1}) \quad ,$$

y como $SU(1)$ es simplemente conexo, $\pi_1\ SU(n) = \{e\}$ cualquiera sea n. Sustituyendo en (i) obtenemos que CP^n es simplemente conexo. Para calcular $\nabla^* R^*$ utilizamos la expresión de R^* que obtuvimos previamente

$$\overline{(\nabla^*_E R^*)(F,G)H} = \overline{\nabla^*_E\left(R^*(F,G)H\right)} - \overline{R^*\left(\nabla^*_E F,G\right)H} - \overline{R^*\left(F,\nabla^*_E G\right)H} - \overline{R^*(F,G)\nabla^*_E H}$$

(II) $$= H\,\nabla_{\bar{E}}\,\overline{R^*(F,G)H} - H[[\overline{\nabla^*_E F},\bar{G}]\bar{H}] - H[[\bar{F},\overline{\nabla^*_E G}]\bar{H}]$$

$$- H[[\bar{F},\bar{G}]\,\overline{\nabla^*_E H}] \ .$$

Recordemos que $\overline{\nabla^*_E G} = \mathcal{H}\, \nabla_{\bar{E}} \bar{G}$ y que si V es vertical y $\bar{H}$ es básico entonces el corchete de Lie es vertical. Por lo tanto

$$\mathcal{H}[[\overline{\nabla^*_E F},\bar{G}]\bar{H}] = \mathcal{H}[[\nabla_{\bar{E}} \bar{F},\bar{G}]\bar{H}]$$

(III)

$$\mathcal{H}[[\bar{F}, \overline{\nabla^*_E G}]\bar{H}]] = \mathcal{H}[[\bar{F}, \nabla_{\bar{E}} \bar{G}]\bar{H}] \ .$$

Además

$$\text{(IV)} \qquad \mathcal{H}[[\bar{F},\bar{G}]\, \overline{\nabla^*_E H}] = \mathcal{H}[\mathcal{H}[\bar{F},\bar{G}],\ \nabla_{\bar{E}} \bar{H}] - \mathcal{H}[\mathcal{H}[\bar{F},\bar{G}], \mathcal{V}\, \nabla_{\bar{E}} \bar{H}]$$

$$+ \mathcal{H}[\mathcal{V}[\bar{F},\bar{G}],\ \overline{\nabla^*_E H}] = \mathcal{H}[\mathcal{H}[\bar{F},\bar{G}], \nabla_{\bar{E}} \bar{H}] = \mathcal{H}[[\bar{F},\bar{G}], \nabla_{\bar{E}} \bar{H}]$$

donde la última igualdad se debe a

$$[\mathcal{V}[\bar{F},\bar{G}],\ \nabla_{\bar{E}} \bar{H}] = [\mathcal{V}[\bar{F},\bar{G}],\ \overline{\nabla^*_E H}] + [\mathcal{V}[\bar{F},\bar{G}],\ \mathcal{V}\, \nabla_{\bar{E}} \bar{H}]$$

y ambos sumandos son verticales.

Finalmente

$$\mathcal{H}\, \nabla_{\bar{E}} [[\bar{F},\bar{G}]\bar{H}] = \mathcal{H}\, \nabla_{\bar{E}} \mathcal{H}[[\bar{F},\bar{G}]\bar{H}] + \mathcal{H}\, \nabla_{\bar{E}} \mathcal{V}[[\bar{F},\bar{G}]\bar{H}]$$

(V)

$$= \mathcal{H}\, \nabla_{\bar{E}} \mathcal{H}[[\bar{F},\bar{G}]\bar{H}] = \mathcal{H}\, \nabla_{\bar{E}} \overline{R^*(F,G)H}$$

donde la segunda igualdad se debe a que $[[\bar{F},\bar{G}]\bar{H}]$ es un múltiplo de $R(\bar{F},\bar{G})\bar{H}$ (ver 3.2) y por lo tanto es un tensor. Luego para cada punto $x \in G$

podemos tomar campos invariantes a izquierda que coincidan en x con $\bar{F},\bar{G}$ y $\bar{H}$ respectivamente y usando que $[m,m] \subset h$ y $[m,h] \subset m$ resulta $\mathcal{V}[[\bar{F},\bar{G}]\bar{H}] = 0$.

Sustituyendo III, IV y V en II se tiene

$$\overline{\left(\nabla^*_E R^*\right)(F,G)H} = 4\ \mathcal{H}\left(\nabla_{\bar{E}} R\right)(\bar{F},\bar{G})\bar{H}$$

pues $R(\bar{F},\bar{G})\bar{H} = \frac{1}{4}[[\bar{F},\bar{G}]\bar{H}]$. Es inmediato ahora verificar, usando la identidad de Jacobi, que $\nabla R = 0$ y luego $\nabla^* R^* = 0$.

C A P I T U L O IV

CURVATURAS DE RICCI Y ESCALAR DE SUBMERSIONES RIEMANNIANAS

En este Capítulo, luego de una sección preliminar donde obtendremos fórmulas de curvaturas de Ricci y escalar de N , $\pi : M \to N$ submersión riemanniana, obtendremos en la sección 2 una serie de consecuencias sobre curvatura de Ricci de variedades homogéneas, varias de ellas generalizaciones del caso de grupos de Lie con métrica invariante a izquierda (ver [M]). En la sección 3 analizaremos algunos resultados debidos a L. Bernard Bergery sobre curvatura escalar de espacios homogéneos $G/_H$, G grupo de Lie compacto.

§ 1. Preliminares.

Sea $\pi : M \to N$ una submersión riemanniana tal que las fibras son totalmente geodésicas, o sea $T \equiv 0$ (ver Capítulo III). De las fórmulas sobre el tensor de Riemann que aparecen en el Capítulo anterior obtendremos en lo que sigue fórmulas de curvaturas de Ricci y escalar.

Recordemos que en una variedad riemanniana M , la transformación de Ricci r y curvatura escalar ρ están dadas por

$$r(E) = \Sigma\, R(E_i,E)E_i$$

$$\rho = \Sigma \langle r(E_i),E_i \rangle$$

donde $\{E_i\}$ es una base ortonormal local de campos. Además $\operatorname{Ric} E = \langle r(E),E\rangle$ es la curvatura de Ricci cuando E es unitario

Como todo campo en M es suma de un campo vertical y un campo horizontal y como los campos básicos son localmente base de campos horizontales, en un entorno de $p \in M$ tomaremos V_i base ortonormal de campos verticales, H_j base ortonormal de campos básicos, X campo horizontal y U campo vertical. Entonces, de las fórmulas de O'Neill, Capítulo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle r(U+X),U+X\rangle &= \sum_i \langle R(V_i,U+X)V_i,\ U+X\rangle + \sum_j \langle R(H_j,U+X)H_j,\ U+X\rangle \\ &= \langle \hat{r}\ (U),U\rangle + \sum_i \|A_X V_i\|^2 + \sum_j \|A_{H_j} U\|^2 + 2\sum_j \langle (\nabla_{H_j} A)_{H_j}\ X,U\rangle \\ &\quad + \langle r^*(X_*),X_*\rangle - 3\sum_j \|A_{H_j} X\|^2 .\end{aligned}$$

En particular

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned}\langle r(U),U\rangle &= \langle \hat{r}(U),U\rangle + \sum_j \|A_{H_j} U\|^2 \\ \langle r(X),X\rangle &= \langle r^*(X_*),X_*\rangle - 2\sum_j \|A_{H_j} X\|^2\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned}\sum_i \|A_X V_i\|^2 &= \sum_{i,j} \langle A_X V_i,H_j\rangle^2 = \sum_{i,j} \langle A_X H_j,V_i\rangle^2 \\ &= \sum_j \Big(\sum_i \langle A_{H_j} X,V_i\rangle^2\Big) = \sum_j \|A_{H_j} X\|^2 .\end{aligned}$$

Ahora resulta inmediato obtener la curvatura escalar en $p \in M$ en término de las curvaturas escalares de fibra y base respectivamente. En efecto

$$\begin{aligned}\rho(p) &= \Sigma \langle r(V_i),V_i\rangle_p + \Sigma \langle r(H_j),H_j\rangle_p \\ &= \hat{\rho}(p) + \rho^*(\pi(p)) + \sum_{j,i} \|A_{H_j} V_i\|_p^2 - 2 \sum_{j,k} \|A_{H_j} H_k\|_p^2 \\ &= \hat{\rho}(p) + \rho^* \pi(p) - \sum_{j,k} \|A_{H_j} H_k\|_p^2\end{aligned}$$

(usamos en la última igualdad la identidad II).

§ 2. Curvatura de Ricci en $G/_H$.

Sea G un grupo de Lie conexo actuando efectivamente en $G/_H$, H subgrupo cerrado de G . Si $G/_H$ posee métrica G-invariante consideraremos en G una métrica invariante a izquierda de tal forma que $\pi : G \to G/_H$ sea sub - mersión riemanniana (ver 3.3, Capítulo II).

De (I) obtenemos

$$\mathrm{Ric}^*(X_*) = \mathrm{Ric}\, X + 2\, \Sigma \|A_{H_j} X\|^2$$

donde X_* es unitario en $T_{eH}\left(G/_H\right)$, X es unitario en $\mathfrak{m}$ y $\left(d\pi\right)_e X = X_*$ ($\mathfrak{m}$ complemento $\mathrm{Ad}(H)$ invariante de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$) y $\{H_j\}$ es una base ortonormal local de campos horizontales. Como la métrica en G es invariante a izquierda y A es un tensor podemos tomar $\{H_j\}$ campos invariantes a izquierda tales que en la identidad constituyan una base ortonormal de $\mathfrak{m}$. Si usamos entonces la expresión de Ric X para métricas invariantes a izquierda, que obtuvimos en 3.1, Capítulo III y el hecho $A_X H = \frac{1}{2} \mathcal{V}[X,H]$ si X y H son campos horizontales tenemos

$$\mathrm{Ric}^*X_* = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X^*\,\mathrm{ad}_X - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\nabla_X X} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\langle [V_i,H_j],X\rangle^2$$

$$\text{(III)}\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\langle [H_i,H_j],X\rangle^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\langle [X,H_j],V_i\rangle^2$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X^2 - \frac{1}{2}\sum_j \|[X,H_j]_m\|^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\nabla_X X} + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\langle [H_i,H_j],X\rangle^2$$

donde la última igualdad es consecuencia de

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X^*\,\mathrm{ad}_X = -\frac{1}{2}\left(\Sigma\,\|[X,V_i]\|^2 + \Sigma\,\|[X,H_j]_h\|^2 + \Sigma\,\|[X,H_j]_m\|\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\Sigma\langle [X,V_i],H_j\rangle^2 - \frac{1}{2}\,\Sigma\langle [X,H_j],V_i\rangle^2 - \frac{1}{2}\,\Sigma\,\|[X,H_j]_m\|^2$$

y del hecho que $\mathrm{ad}_V : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es antisimétrica si $V \in \mathfrak{h}$.

Obtenemos a seguir algunas consecuencias de la expresión (III).

<u>Proposición 2.1</u>. Si existe $X \in \mathfrak{m}$ tal que ad_X es antisimétrica entonces $\mathrm{Ric}\,X_* \geq 0$ y $\mathrm{Ric}\,X_* = 0$ sí y sólo si $X \in [\mathfrak{m},\mathfrak{g}]^\perp$ (comparar [M]).

<u>Demostración</u>: Supongamos $X \in \mathfrak{m}$ satisface ad_X antisimétrica. Entonces

i) $\quad -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X^2 = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\|[X,V_i]\|^2 + \frac{1}{2}\,\Sigma\,\|[X,H_j]\|^2$,

ii) $\quad \nabla_X X = 0$ ya que $\langle \nabla_X X,Y\rangle = \langle [Y,X],Y\rangle$.

Luego, la expresión de Ric^*X_* que aparece en III se transforma en:

$$\mathrm{Ric}^*X_* = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\|[X,V_i]\|^2 + \frac{1}{2}\,\Sigma\,\|[X,H_j]_h\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\langle [H_i,H_j],X\rangle^2$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma\langle [X,V_i],H_j\rangle^2 + \frac{1}{2}\Sigma\langle [X,H_j],V_i\rangle^2 + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\langle [H_i,H_j],X\rangle^2$$

$$= \sum_{ij}\langle [V_i,H_j],X\rangle^2 + \frac{1}{2}\sum_{i<j}\langle [H_i,H_j],X\rangle^2 ,$$

(usamos $\langle [X,H_j],V_i\rangle = -\langle H_j,[X,V_i]\rangle = \langle [V_i,H_j],X\rangle$) lo que implica claramente la proposición. ||

<u>Proposición 2.2</u>. Si G admite métrica invariante a izquierda tal que ad_X es antisimétrica, cualquiera sea $X \in \mathcal{g}$, entonces toda métrica G-invariante en $G/_H$ tiene direcciones de curvatura de Ricci ≥ 0 . Más aún, para toda métrica G-invariante existen direcciones de $Ric > 0$ a menos que $\mathcal{g} = h \oplus z(\mathcal{g})$, $z(\mathcal{g})$ centro del álgebra de Lie de G .

<u>Demostración</u>: Sea $(,)$ métrica en $\mathcal{g}$ tal que ad_X es antisimétrica y $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ métrica G-invariante en $G/_H$. Consideremos $\mathcal{g} = h \oplus m$ donde m es $(,)$ ortogonal a h y denotemos con $\langle\ ,\ \rangle$ la métrica invariante a izquierda en G que coincide con $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ en m y con $(,)$ en h. Sea σ transformación simétrica, definida positiva (respecto de $(,)$) tal que $\langle x,y\rangle = (x,\sigma y)$, x,y en $\mathcal{g}$.

Es claro que σ preserva la descomposición $h \oplus m$, coincidiendo con la identidad en h . Denotemos con V_i y H_j a bases ortonormales (respecto de $(,)$) , de h y m respectivamente, de autovectores de σ con autovalores 1 y λ_j .

Para calcular curvatura de Ricci observemos que

i) $$-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}^2_{H_r} = \frac{1}{2}\Sigma\left(\operatorname{ad}_{H_r}V_i,\operatorname{ad}_{H_r}V_i\right) + \frac{1}{2}\Sigma\left(\operatorname{ad}_{H_r}H_i,\operatorname{ad}_{H_r}H_i\right)$$

$$= \sum_{i,s}\left([H_r,V_i],H_s\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left([H_r,H_i],H_j\right)^2$$

ii) $$-\frac{1}{2}\Sigma\left\|\left[H_r,\frac{H_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right]_m\right\|^2 = -\frac{1}{2}\sum_{j,i}\left\langle\left[H_r,\frac{H_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right],\frac{H_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\rangle^2$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j,i}\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\left([H_r,H_j],H_i\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i<j}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}+\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)\left([H_i,H_j],H_r\right)^2$$

iii) $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\nabla_{H_r}H_r} = 0$ pues ad_Z es antisimétrica respecto de alguna métrica, cualquiera sea $Z \in g$;

iv) $$\frac{1}{2}\sum_{i<j}\left\langle\left[\frac{H_i}{\sqrt{\lambda_i}},\frac{H_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right],H_r\right\rangle^2 = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\frac{\lambda_r^2}{\lambda_i\lambda_j}\left([H_i,H_j],H_r\right)^2 .$$

Resulta de las consideraciones anteriores que

$$\langle\langle\, r^*(H_r)_*,(H_r)_*\rangle\rangle =$$

$$= \sum_{i,s}\left([H_r,V_i],H_s\right)^2 + \sum_{i<j}\left(1-\frac{\lambda_i}{2\lambda_j}-\frac{\lambda_j}{2\lambda_i}+\frac{\lambda_r^2}{2\lambda_i\lambda_j}\right)\left([H_i,H_j],H_r\right)^2$$

y el coeficiente de $\left([H_i,H_j],H_r\right)^2$ es $\dfrac{\lambda_r^2-(\lambda_i-\lambda_j)^2}{2\lambda_i\lambda_j}$.

Por lo tanto, tomando H_r como un autovector de autovalor máximo obtenemos la primera afirmación de la proposición. Para obtener la segunda observemos que usando la expresión de curvatura de Ricci anterior, que si $\operatorname{Ric}^*X_* \leq 0$ en

$G/_H$ entonces $m \subset z(g)$. En efecto, los autovectores con autovalor máximo pertenecen al centro del álgebra pues $\mathrm{Ric}^* \leq 0$ implica $([H_r,V_i],H_s) = 0 =$ $= ([H_r,H_s],V_i)$ cualquiera sea i,s y como $\lambda_r^2 - (\lambda_i - \lambda_j)^2 > 0$ debe ocurrir $([H_r,H_i],H_j) = 0$ cualquiera sea i,j . Por lo tanto H_r es central como afirmamos. Sea ahora H_k autovector con autovalor $\lambda_k < \lambda_r$, λ_k máximo dentro de $\{\lambda : \lambda \text{ autovalor}, \ \lambda \neq \lambda_r\}$. Entonces, si V_r denota el autoespacio correspondiente al autovalor λ_r , resulta

$$\sum_{i,s} \left(\mathrm{ad}_{H_k} V_i,H_s\right)^2 = \sum_{i,H_s\in V_r^\perp} \left(\mathrm{ad}_{H_k} V_i,H_s\right)^2$$

$$\sum_{i<j} \frac{\lambda_k^2 - (\lambda_i - \lambda_j)^2}{2\lambda_i\lambda_j} \left([H_i,H_j],H_k\right)^2 = \sum_{\substack{i<j \\ H_i,H_j\in V_r^\perp}} \frac{\lambda_k^2 - (\lambda_i - \lambda_j)^2}{2\lambda_i\lambda_j} \left([H_i,H_j],H_k\right)^2$$

luego vale el argumento usado antes y como consecuencia V_s , autoespacio correspondiente al autovalor λ_s , está contenido en $z(g)$. Continuando con este proceso obtenemos $m \subset z(g)$ y de las fórmulas de O'Neill resulta $K^* \equiv 0$ en $G/_H$ luego ⟨⟨ ⟩⟩ en $G/_H$ es flat. Notemos que si $z(g) \supset m$ entonces $z(g) = m \oplus (z(g) \cap h)$ pero como la acción es efectiva $z(g) \cap h = 0$ y como consecuencia $g = h \oplus z(g)$, h álgebra de Lie semisimple (ver 2.2, Capítulo II). ||

<u>Observación</u>. Una demostración de la proposición anterior en el caso $H = \{e\}$ y g k-álgebra (incluye el caso G admitiendo métrica invariante con ad_X antisimétrica) aparece en [D].

<u>Definición 2.3</u>. Una métrica G-invariante en $G/_H$ se dice naturalmente reductiva respecto de una descomposición reductiva $g = h \oplus m$ si en m

$$\langle [X,Y]_m, Z\rangle + \langle Y, [X,Z]_m\rangle = 0$$

cualquiera sean X,Y,Z en m .

Observación 2.4. Si la métrica en $G/_H$ es naturalmente reductiva entonces

i) G es unimodular. En efecto $\operatorname{tr} ad_X = 0$ sí $X \in h$ y si $X \in m$,

$$\operatorname{tr} ad_X = \Sigma \langle ad_X V_i, V_i\rangle + \Sigma \langle ad_X H_j, H_j\rangle$$

$$= \Sigma \langle ad_X H_j, H_j\rangle = - \Sigma \langle ad_X H_j, H_j\rangle$$

luego $\operatorname{tr} ad_X = 0$ cualquiera sea X en g .

ii) Si $X \in m$ es unitario

$$\operatorname{Ric}^* X_* = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} ad_X^2 - \frac{1}{2} \Sigma \| [X,H_i]_m \|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle [H_i,H_j], X\rangle^2$$

y como

$$\operatorname{tr} ad_X^2 = \Sigma \langle [X[X,V_i]], V_i\rangle + \Sigma \langle [X[X,H_j]], H_j\rangle$$

$$= 2\, \Sigma \langle [X,V_i], H_j\rangle \langle [X,H_j], V_i\rangle - \Sigma \| [X,H_j]_m \|^2$$

resulta

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{Ric}^* X_* = - \sum_{i,j} \langle [X,V_i], H_j\rangle \langle [X,H_j], V_i\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle [H_i,H_j], X\rangle^2$$

Lema 2.5. (ver [G-Z, lemma (3)]). Supongamos $G/_H$ es naturalmente reductivo con respecto a la descomposición $g = h + m$. Sea u subalgebra de g tal que $h \subset u$ y existe un producto interno en u tal que $ad_X : u \to u$ es antisimétrica, cualquiera sea $x \in u$. Entonces $u = h \oplus u \cap m$ con $u \cap m \subset z(u)$ y

Ric $X_* = 0$, para todo $X \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$ ó existe $X \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$ tal que $\mathrm{Ric}^* X_* > 0$.

Demostración: Si $\mathfrak{u}$ es una subalgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{h}$ entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde $\mathfrak{m} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ es el complemento ortogonal de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$ en $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{u} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$. Si denotamos con $\{Z_i\}$ base ortonormal de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$ y con $\{H_j\}$ base ortonormal de $\mathfrak{p}$, para $X \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$ sigue de IV que

$$\mathrm{Ric}^* X_* = - \Sigma \langle [X,V_i],Z_j\rangle \langle [X,Z_j],V_i\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle [Z_i,Z_j],X\rangle^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle [Z_i,H_j],X\rangle^2 + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle [H_i,H_j],X\rangle^2 .$$

Supongamos $\mathrm{Ric}^* X_* \leq 0$ cualquiera sea $X \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$. Entonces debe ser no positiva la expresión

$$\text{(V)} \qquad - \Sigma \langle [X,V_i],Z_j\rangle \langle [X,Z_j],V_i\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle [Z_i,Z_j],X\rangle^2$$

que coincide con la curvatura de Ricci de una métrica naturalmente reductiva con respecto a la descomposición $\mathfrak{u} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$. Como $\mathfrak{u}$ admite métrica tal que ad_X es antisimétrica, cualquiera sea $x \in \mathfrak{u}$, argumentando como en 2.2 obtenemos $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \subset z(\mathfrak{u})$ (luego V debe ser $\equiv 0$) y como consecuencia $\mathrm{Ric}^* X_* = 0$ cualquiera sea $X \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$. ||

Observación 2.6. En el artículo de Gordon-Ziller el lema anterior aparece casi idéntico. La única excepción es que supone $\mathfrak{u}$ subalgebra tal que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}$ y existe un producto interno en $\mathfrak{g}$ con ad_X antisimétrica, $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, cualquiera sea $X \in \mathfrak{u}$. La conclusión es que $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \subset z(\mathfrak{g})$ o existen direcciones en $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$ de curvatura de Ricci estrictamente positiva. Para demostrarlo supongamos $\mathrm{Ric}^* X_* \leq 0$, para todo $X_* \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$. Entonces, vemos en 2.5 que

$\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$ es abeliana, como consecuencia (V) es identicamente nula y $\langle [H_i,H_j],X\rangle = 0$ cualquiera sea $X \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$. Luego

$$\operatorname{tr} \operatorname{ad}_X^2 = 2\,\Sigma \langle [X,V_i],Z_j\rangle \langle [X,Z_j],V_i\rangle - \Sigma \|[X,H_j]_{\mathfrak{m}}\|^2 = 0$$

obteniendo así $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{m} \subset z(\mathfrak{g})$. ||

<u>Observación 2.7</u>. El lema 2.5 debido a Gordon-Ziller fue incluído pues la demostración que aparece en estas notas es distinta a la dada por los autores y usa técnicas que veníamos desarrollando. Además, fue probado en $[D_2]$ que si G/H posee métrica invariante con $\mathrm{Ric} < 0$ y G es unimodular entonces G es semisimple y cerrado en $I(G/H)$. Por lo tanto, como consecuencia de este resultado y del lema 2.5 obtenemos

<u>Corolario 2.8</u>. Toda variedad riemanniana naturalmente reductiva con $\mathrm{Ric} < 0$ es simétrica (comparar [G-Z]).

<u>Demostración</u>: Si G/H es naturalmente reductiva respecto de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ entonces G es unimodular. Por lo tanto sigue del resultado que aparece en $[D_2]$ que G es semisimple y H es compacto cuando $\mathrm{Ric} < 0$. El lema 2.5 asegura que en esas condiciones, $\mathrm{Ric} < 0$, H es maximal y como consecuencia G/H es simétrico. ||

§ 3. <u>Curvatura escalar en G/H</u> .

Sea G un grupo de Lie conexo y unimodular actuando efectivamente en G/H . Si denotamos por $\hat{\rho}$, ρ y ρ^* las curvaturas escalares de H, G y G/H respectivamente, vimos en § 1 que

$$\rho^* = \rho - \hat{\rho} + \Sigma \, \| A_{H_i} H_j \|^2$$

donde $\{H_i\}$ es una base ortonormal de campos horizontales. Siendo A un tensor tomamos $\{H_i\}$ base ortonormal de m , $g = h \oplus m$ descomposición $Ad(H)$ invariante, y extendemos como campos invariantes a izquierda.

Sea $\{X_i\}$ base ortonormal de g, g unimodular, entonces la curvatura escalar en g está dada por

$$\rho = -\frac{1}{2} \Sigma \, \mathrm{tr}\, ad^2_{X_i} - \frac{1}{2} \sum_i \mathrm{tr}\, ad^*_{X_i} \, ad_{X_i} + \frac{1}{2} \sum_{j<k,i} \langle [X_j, X_k], X_i \rangle^2$$

$$= -\frac{1}{2} \Sigma \, \mathrm{tr}\, ad^2_{X_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \| [X_i, X_j] \|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} \langle [X_j, X_k], X_i \rangle^2$$

$$= -\frac{1}{2} \Sigma \, \mathrm{tr}\, ad^2_{X_i} - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \| [X_i, X_j] \|^2 .$$

Supongamos ahora que la métrica en g satisface ad_X antisimétrica cualquiera sea $X \in h$ y que $\langle X,Y \rangle = 0$ si $X \in h$, $Y \in m$. Si $\{V_i\}$ es una base ortonormal de h entonces

$$\rho = \hat{\rho} - \frac{1}{2} \sum_i \mathrm{tr}_m \, ad^2_{V_i} - \frac{1}{2} \sum_j \mathrm{tr}\, ad^2_{H_j} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \| [V_i, H_j] \|^2 - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \| [H_i, H_j] \|^2$$

$$= \hat{\rho} - \frac{1}{2} \sum_j \mathrm{tr}\, ad^2_{H_j} - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \| [H_i, H_j] \|^2 ,$$

donde en la última igualdad usamos que $ad^*_V = -ad_V$ si $V \in h$.

Como $\sum_{i,j} \| A_{H_i} H_j \|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} \langle [H_i, H_j], V_k \rangle^2$ obtenemos finalmente

$$\rho^* = -\frac{1}{2} \sum_j \mathrm{tr}\, ad^2_{H_j} - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \| [H_j, H_i]_m \|^2 .$$

A seguir demostraremos un teorema de caracterización de curvaturas escalares de espacios homogéneos compactos debido a L. Berard Bergery (ver [B])

Teorema 3.1. (ver [B]). Sea $M = G/_H$, un espacio homogéneo simplemente conexo donde G es un grupo de Lie conexo y compacto actuando efectivamente en M . Entonces alguna de las siguientes tres condiciones ocurre:

a) M es de tipo normal con G abeliano y toda métrica G-invariante en M es flat.

b) M es de tipo normal con G no abeliano y toda métrica G-invariante en M tiene curvatura escalar estrictamente positiva.

c) M no es de tipo normal y existen en M métricas G-invariantes con curvatura escalar negativa y métricas G-invariantes con curvatura escalar positiva.

Demostración: Debemos antes que nada definir espacios de tipo normal

Definición 3.2. Sea $M = G/_H$, G grupo de Lie conexo y compacto, H subgrupo cerrado y tal que la acción de G en $G/_H$ sea efectiva. Diremos que M es de tipo normal si toda métrica G-invariante en M es normal o sea proviene de una métrica bi-invariante en G .

Supongamos $M = G/_H$ homogéneo como en el enunciado del teorema y que G es abeliano. Entonces toda métrica G-invariante en $G/_H$ proviene de una métrica bi-invariante en G (pues toda métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie abeliano es también invariante a derecha). Por lo tanto M es de tipo normal con G-abeliano. Como estamos considerando acciones efectivas,

$$N = \{x \in G : y^{-1} x\, y \in H, \ \ \forall\, y \in G\}$$

debe ser la identidad; pero si G es abeliano sigue que $H = N$ por lo tanto M es un grupo abeliano con métrica invariante luego flat.

Supongamos ahora que $M = G/_H$ es de tipo normal y que G no es un grupo abeliano. Sigue de 2.1 que

$$\mathrm{Ric}^* X_* = \Sigma \,\|[X,H_j]_h\|^2 + \frac{1}{4}\Sigma \,\|[X,H_j]_m\|^2 .$$

Si $\mathrm{Ric}^* \equiv 0$ resulta m un ideal abeliano. Además siendo la métrica bi-invariante $([h,m],m) = (h,[m,m]) = 0$ y como consecuencia h es un ideal. Siendo la acción efectiva, $h = \{0\}$ y por lo tanto si G no es abeliano la curvatura escalar resulta positiva.

Obtuvimos hasta ahora a) y b) del teorema 3.1. (Notar que a) y b) valen sin suponer M simplemente conexa); c) resultará como consecuencia de resultados que probaremos a continuación. Para ello encontraremos condiciones necesarias y suficientes sobre $G/_H$, H conexo, para que satisfaga la condición de normalidad (3.2).

Sea G un grupo de Lie conexo y compacto con una métrica bi-invariante $(\ ,\ )$. Entonces $g = h \oplus m$ con m Ad(H)-invariante y $(h,m) = \{0\}$. Sea $m = \oplus \Sigma\, m_i$ una descomposición ortogonal de m en módulos Ad(H) irreducibles y sea $m_o = m_{i_1} \oplus \ldots \oplus m_{i_k}$ la suma de los submódulos donde la acción es trivial.

<u>Lema 3.3</u>. Si $M = G/_H$, H conexo, satisface (N) : $[m_i,m_j] = 0 \quad i \neq j$ entonces M es de tipo normal.

<u>Demostración</u>: Observemos que $[m_o,m_o] = 0$ pues $[m_{i_j},m_{i_\ell}] = 0$ y $\dim m_{i_j} = 1$,

$\ell, j = 1, \ldots, k$. Además

$$([m_i, m_i], m_j) = (m_i, [m_i, m_j]) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq j$$

por lo tanto $m_i + [m_i, m_i] \subset h \oplus m_i$.

Sea $V_i = m_i + [m_i, m_i]$. Entonces

i) V_i ideal en g

ii) $[V_i, V_j] = 0$ si $i \neq j$.

Por lo tanto $g = \oplus \Sigma V_i + u$ suma directa de ideales. Como $\oplus \Sigma V_i \supset \Sigma m_i$ resulta $u \subset h$ y por efectividad $u = \{0\}$.

Sea $h_i = h \cap V_i$, ideal de h . Si $h_i = 0$ entonces $[h, m_i] = 0$ pues $h_i = 0$ implica $[m_i, m_i] \subset m_i$ luego $([h, m_i], m_i) = (h, [m_i, m_i]) = 0$ y como H es conexo resulta $i = i_1 \circ \ldots \circ i_k$.

Si la representación de h en m_i no es trivial entonces $h_i \neq \{0\}$. Más aún $[h_i, m_i] \neq 0$ (pues $[h_j, m_i] = 0$ $j \neq i$) y $[h_i, m_j] = 0$ $i \neq j$. Deducimos entonces que m_i no es equivalente a m_j como Ad(H) módulos, cuando $h_i \neq \{0\}$. En efecto, $m_i \sim m_j$ implica que existe un isomorfismo $T : m_j \to m_i$ tal que $T \circ Ad(h) = Ad(h) \circ T$ luego $ad_X \circ T = T \circ ad_X$ cualquiera sea $x \in h$. Sea entonces $x \in h_i$. Como $[x, m_j] = 0$ resulta $[x, m_i] = 0$ lo que es un absurdo pues x es arbitrario.

Sea ahora un producto interno $\langle \ , \ \rangle$, Ad(H) invariante en $m = \oplus \Sigma m_i$. Si $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ entonces $m = m_o \oplus \oplus \sum_{i \notin J} m_i$ y vimos que si $i \notin J$, $h_i \neq \{0\}$ y m_i no es equivalente a m_j cualquiera sea el índice j .

Sea σ simétrica definida positiva respecto de $(\ ,\ )$ y tal que $\langle X,Y\rangle = (X,\sigma Y)$ para X,Y en m . Como ambos productos internos son $Ad(H)$ invariantes en m resulta $\sigma Ad(h) = Ad(h)\sigma$ cualquiera sea $h \in H$. Por lo tanto $\sigma : m_i \to m_i$ $i \notin J$ y por irreducibilidad resulta $\sigma|m_i = \lambda_i I_d$. En efecto, probaremos $\sigma : m_i \to m_i$, $i \neq i_1 \dots i_k$. Si $\sigma m_i = \tilde{m}_i$. Consideremos $p_j|\tilde{m}_i : \tilde{m}_i \to m_j$ $j \neq i$. Como $p_j(\tilde{m}_i)$ es $Ad(H)$ invariante y m_j irreducible resulta $p_j(\tilde{m}_i) = 0$ ó $p_j(\tilde{m}_i) = m_j$. Debe ser $p_j(\tilde{m}_i) = 0$ luego $\tilde{m}_i = m_i$ de lo contrario $p_j \circ \sigma : m_i \to m_j$ sería una equivalencia. Además siendo σ simétrica, se diagonaliza en cada m_i y como $\sigma Ad(h) = Ad(h)\sigma$ y m_i irreducible debe ser σ = múltiplo de la identidad. Definamos σ en V_i como $\lambda_i I_d$ y verifiquemos que σ así definida en todo g conmuta con ad_X cualquiera sea X en g .

Como $g = \oplus \sum_{i \notin I} V_i \oplus m_o$, esta descomposición es en ideales y σ preserva cada ideal. Es inmediato verificar que $ad_X \sigma|V_i = \sigma ad_X|V_i$, X en V_i y $ad_X\sigma|m_o = \sigma ad_X|m_o$, X en m_o . Siendo G conexo resulta $\sigma Ad(g) = Ad(g)\sigma$ y por lo tanto la extensión resulta ser $Ad(g)$-invariante. $\|$

<u>Lema 3.4</u>. Si $M = G/_H$, H conexo, no es de tipo normal existen en M métricas G-invariantes con $\rho < 0$.

<u>Demostración</u>: Sea $g = h \oplus m$, $m = \oplus \sum m_i$ tal que m es $Ad(H)$-invariante y m_i son $Ad(H)$-irreducibles. Sigue de 3.3 que existen índices $k \neq j$ tales que $[m_k,m_j] \neq 0$. Como $([m_k,m_j],h) = 0$ si llamamos $p_1 = m_k$, $p_2 = \sum_{i\neq k} m_i$ resulta $([p_1,p_2],p_1) \neq 0$ ó $([p_1,p_2],p_2) \neq 0$. Asumiremos $([p_1,p_1],p_2) \neq 0$ y definimos σ en g tal que $\sigma|h = id$, $\sigma|p_1 = id$ y $\sigma|p_2 = \lambda id$, $\lambda > 0$.

Como $Ad(H)$ preserva p_1 y p_2 resulta $Ad(h)\sigma = \sigma Ad(h)$, $h \in H$ y como consecuencia σ define una estructura G-invariante en $G/_H$.

Sean $\{V_i\}$, $\{Y_j\}$ y $\{Z_k\}$ bases ortonormales respecto de $(,)$ de h , p_1 y p_2 respectivamente. Entonces $\{V_i\}$, $\{Y_j\}$ y $\{\frac{Z_k}{\sqrt{\lambda}}\}$ es un sistema ortonormal respecto de $\langle U,V\rangle = (U,\sigma V)$. Usando la expresión que obtuvimos, previo a 3.1, de la curvatura escalar en $G/_H$, resulta

$$\rho^* = -\frac{1}{2}\Sigma\, tr\, ad^2_{Y_j} - \frac{1}{2\lambda}\Sigma\, tr\, ad^2_{Z_k} - \frac{1}{2}\sum_{i<j} \|[Y_i,Y_j]_m\|^2$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\sum_{i,j} \|[Y_i,Z_j]_m\|^2 - \frac{1}{2\lambda}\sum_{i<j} \|[Z_i,Z_j]_m\|^2 .$$

Observemos que

(i) $$-\frac{1}{2}\sum_j tr\, ad^2_{Y_j} = \frac{1}{2}\sum_{j,i} \|[Y_j,V_i]\|^2_o + \frac{1}{2}\sum_{j,i}\|[Y_j,Y_i]\|^2_o + \frac{1}{2}\sum_{j,i}\|[Y_j,Z_i]\|^2_o$$

donde $\| \ \|_o$ denota longitud respecto de $(,)$,

(ii) $$-\frac{1}{2\lambda}\sum_k tr\, ad^2_{Z_k} = \frac{1}{2\lambda}\sum_{k,i}\|[Z_k,V_i]\|^2_o + \frac{1}{2\lambda}\sum_{k,i}\|[Z_k,Y_i]\|^2_o + \frac{1}{2\lambda}\sum_{k,i}\|[Z_k,Z_i]\|^2_o$$

(iii) $$-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\|[Y_i,Y_j]_m\|^2 = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}\|[Y_i,Y_j]_{p_1}\|^2_o - \frac{\lambda}{4}\sum_{i,j}\|[Y_i,Y_j]_{p_2}\|^2_o$$

(iv) $$-\frac{1}{2\lambda}\sum_{i,j}\|[Y_i,Z_j]_m\|^2 = -\frac{1}{2\lambda}\Sigma\|[Y_i,Z_j]_{p_1}\|^2_o - \frac{1}{2}\Sigma\|[Y_i,Z_j]_{p_2}\|^2_o$$

(v) $$-\frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i<j}\|[Z_i,Z_j]_m\|^2 = -\frac{1}{4\lambda^2}\sum_{i,j}\|[Z_i,Z_j]_{p_1}\|^2_o - \frac{1}{4\lambda}\sum_{i,j}\|[Z_i,Z_j]_{p_2}\|^2_o$$

Sumando convenientemente obtenemos

$$\rho^* = \sum_{j,i,k} \left([Y_j,Y_i],V_k\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_{j,i,k} \left([Y_j,Y_i],Y_k\right)^2$$

$$+ \left(1-\frac{\lambda}{4}\right)\sum_{j,i,k} \left([Y_j,Y_i],Z_k\right)^2 + \frac{1}{\lambda}\Sigma \left([Z_j,Z_i],V_k\right)^2$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{4\lambda^2}\right)\sum_{j,i,k} \left([Z_j,Z_i],Y_k\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_{j,i,k}\left([Z_j,Z_i],Z_k\right)^2 .$$

Los últimos tres términos tienden a cero cuando $\lambda \to \infty$; los dos primeros no dependen de λ y el tercero tiende a $-\infty$ pues $\Sigma \left([Y_j,Y_i],Z_n\right)^2 \neq 0$. ||

Observación 3.5. El lema 3.4 demuestra c) de 3.1 en el caso H conexo (luego M simplemente conexa) pues siendo G compacto (y no abeliano) una métrica bi-invariante produce curvatura escalar estrictamente positiva en $G/_H$. Para isotropía arbitraria no he conseguido demostrar el lema 3.3. En la demostración de 3.3, L. Bérard Bergery no asume H conexo pero no entiendo cual será el argumento que le permite afirmar que $[h,m_i] = 0$ implica Ad(H) actúa trivialmente en m_i .

REFERENCIAS.

[B] BERARD, BERGERY L., Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogenes, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4a. Serie, t. 11, 1978, p. 543 a 576.

[B-G] BOGGINO, J. , GARCIA, A., Introducción a la Geometría Riemanniana. Grupo de Isometrías, VIII Seminario Nacional de Matemática, Vol I, 1986.

[D_1] DOTTI, I., Ricci curvature on semidirect products, Quarterly Journal Math., Oxford (2), (1986), 309-314.

[D_2] DOTTI, I., Transitive group actions and curvature, Enviado para publicación.

[D-M] DOTTI, I., MIATELLO, R., Transitive isometry groups with non compact isotropy, aparecerá en Pacific Journal of Mathematics.

[G-Z] GORDON, C., ZILLER, W., Naturally reductive metrics of non positive Ricci curvature, Proc. Math. Soc. Vol 91,N° 2, 1984, 287-290.

[H] HELGASON, S., Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric spaces, Academic Press, New York, San Francisco, London 1978.

[J] JACOBSON, N., Lie Algebras, Interscience Tracts # 10, Interscience, New York, 1962.

[M] MILNOR, J., Curvature of left invariant metrics on Lie groups, Adv. in Math. 21 (1976), 243-329.

[M-S_1] MILNOR, J., STASHEFF, J., Characteristic Classes, Annals of Math. Studies, Princeton University Press.

[M-S_2] MYERS, B., STENROOD, E., The group of isometries of a Riemannian manifold, Ann. of Math. 40 (1939) 400-416..

[O'N] O'NEILL, B., The fundamental equation of a submersion, Mich. Math. J. 13 (1966) 459-469.

[V] VARADARAJAN, V., Lie groups, Lie algebras and their representations, Prentice Hall Series in Modern Analysis, Prentice Hall 1974.

[W] WARNER, F., Foundations of Differentiable manifolds and Lie groups, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.